Detecção de Compressão com a Norma 1

Matheus Queiroz Zabin*, Lúcio Tunes dos Santos.

Resumo

No mundo atual, o fluxo de dados está crescendo cada dia mais e de forma cada vez mais rápida. Porém, o número de características realmente significativas em grandes quantidades de dados é, de forma geral, muito menor que o número de coeficientes em uma representação de dados, ou seja, os dados são compressíveis.

A técnica nomeada “Detecção de Compressão” (Compressive Sensing – CS) consiste em realizar a compressão simultaneamente com a detecção dos dados, de forma que em momento algum se faz necessário o armazenamento completo dos dados.

Palavras-chave:

Compressão, reconstrução, sinais esparsos.

Introdução

Representando os dados como um vetor discreto $x \in R^n$ tal que $Ax=b$ com $A \in R^{(m \times n)}$. O processo de obtenção de b a partir de um sinal conhecido x é chamado de codificação e o processo de recuperação de x a partir do sinal comprimido b é chamado de decodificação.

No problema $Ax=b$ quando $m=n$ para realizar a decodificação basta resolver o sistema linear. Porém, em muitas aplicações $m \ll n$ e com isso o sistema $Ax=b$ será possível indeterminado e não seria possível realizar a decodificação.

A teoria de CS (Compressive Sensing, Detecção de Compressão) garante que quando b foi obtido através de um sinal altamente esparsos é possível realizar a decodificação através de um problema de minimização mesmo quando $m \ll n$.

Resultados e Discussão

Para realizar o processo de decodificação para o caso $m \ll n$ sabendo a priori que b foi obtido através de um sinal x altamente esparsos é razoável propor que o processo de decodificação seja equivalente a resolver o problema de minimização,

$$\min \|x\|_0 \text{ s.a. } Ax=b,$$

com a norma 0 $\|x\|_0$ sendo o número de elementos não nulos de x . Isto é, a decodificação consistirá em escolher a solução mais esparsa de $Ax=b$, porém tal problema tem complexidade combinatória e portanto seria computacionalmente impraticável para dados muito grandes.

A teoria de CS diz que minimizar a norma 1 é equivalente à minimizar a norma 0 sob certas condições impostas à matriz A . Como a matriz A não tem nenhuma correlação aos dados, é possível construí-la satisfazendo as condições necessárias.

O problema de minimizar a norma 1 sujeito a restrições lineares já é conhecido¹ e pode ser resolvido utilizando as técnicas básicas de programação linear. Com isso, dado que x seja um sinal esparsos, o processo de decodificação sempre será possível.

Um exemplo das técnicas de CS aplicadas a imagens (que são, sob certas transformações, dados esparsos) é ilustrado pela Figura 1, que está utilizando $m=10n$, isto é, os dados foram reduzidos para 10% de seu tamanho original.

Figura 1. (a) Imagem original, (b) Imagem codificada.

Também existem aplicações na reconstrução de dados que sofreram algum tipo de perturbação. Como as técnicas de detecção de compressão recuperam sempre o sinal mais esparsos, quando os dados são submetidos a algum tipo de ruído, por exemplo, o sinal mais esparsos continua sendo recuperado e o ruído é desprezado. A Figura 2 ilustra um exemplo em que a decodificação do sinal com e sem ruído coincidem visualmente.

Figura 2. Comparação entre a recuperação de um sinal com e sem ruído.

Conclusão

As técnicas de detecção de compressão se mostraram muito eficazes para compressão e recuperação de dados, possuindo vasta aplicação na sociedade atual, que está sempre a expandir o tráfego de dados.

¹ HAYASHI, Kazunori; NAGAHARA, Masaaki; TANAKA, Toshiyuki. A User's Guide to Compressed Sensing for Communications Systems. Ieice Transactions On Communications, Japão, v. 96, n. 3, p.685-712, mar. 2013. ISSN : 1745-1345.