Geometria, física e bilhares matemáticos

Matheus de Carvalho Loures*

Resumo

Os bilhares matemáticos são objetos pontuais que se movem com velocidade constante no espaço onde estão contidos. Eles necessariamente preservam o ângulo de incidência e reflexão ao colidir com a fronteira da região. O trabalho consistiu em, a partir destas propriedades, determinar como um bilhar se comporta dentro de um círculo e calcular o número pi através de um método que mistura conceitos de mecânica e de matemática.

Palavras-chave:

Bilhares, sistemas dinâmicos, geometria

Introdução

A primeira parte do estudo consistiu em pensar o círculo como o intervalo [0,1], identificando o 0 e o 1 como o mesmo ponto, e, a partir disto, definir os conceitos de órbita e rotação. Em seguida, classifica-se a rotação entre racional e irracional, e então estuda-se a periodicidade do movimento dos bilhares sob ambos os casos.

Na segunda parte apresenta-se um método para calcular π. O procedimento é bem simples: Posiciona-se o bilhar de massa menor entre o bilhar de massa maior e uma parede lisa e bem resitente. Após este passo, lança-se o bilhar de massa maior contra o bilhar de massa menor que, por sua vez, colidirá com a parede depois retornará e colidirá com o bilhar de massa maior. O número de colisões N que ocorrem é o que determinará π (lembrando que todas as colisões são perfeitamente elásticas, isto é, não dissipam energia do sistema e observando que não há atrito com a superfície em que os bilhares estão). O grande segredo para conseguir calcular π está na escolha da proporção das massas dos bilhares. Seja M a massa do bilhar maior e m a do menor, se $M/m=100^N$ tem-se π com N digitos decimais.

Resultados e Discussão

Para a primeira parte, encontra-se, a partir da definição de bilhar matemático e da geometria, que a rotação do bilhar no círculo é dada por: $R_\theta(x)=x+\theta \, mod \, 1$.

Além disso, define-se órbita como a sequência numérica gerada pela composição da função acima para algum x no intervalo [0,1]. Também observa-se que sob rotação racional, isto é θ racional, a órbita do bilhar é periódica. Contudo, caso θ seja irracional, isto não ocorre, a sua órbita nunca retornará ao mesmo ponto do intervalo. Aprofundando-se sobre a rotação irracional encontrou-se que sua órbita é densa e equidistribuida no círculo, ou seja, para todo subintervalo do intervalo [0,1] existe pelo menos um ponto da órbita pertencente à ele (densidade) e a frequência relativa de visitas do bilhar à um subintervalo é igual ao coprimento do arco (equidistribuição).

Na segunda parte , atribuindo coordenadas x e y para as posições de cada um dos bilhares, define-se o espaço de configuração do sistema, isto é, a região do plano xy que contém todas as possibilidades de posição dos bilhares. No caso em questão, atribuindo coordenada x para o bilhar de massa menor e y para o maior, tem-se como espaço de conguração a região entre a reta y=x e o eixo Oy. Em seguida define-se uma mudança de coordenadas, por uma transformação linear, que leva e a coordenada de cada bilhar na sua coordenada multiplicada pela raiz quadrada da sua massa. Isto é:

$$(\bar{x},\bar{y})=(m^{1/2}x, M^{1/2}y)$$

assim obtem-se um novo espaço de configuração . Após isto mostra-se que ,dada uma posição inicial para as esferas, o ponto P que representa os bilhares no novo sistema de coordenadas se comporta como um bilhar matemático dentro do espaço de configuração. Daí utiliza-se a técnica de refletir o espaço de configuração quando o ponto P colide contra a fronteira da região. Seja α o ângulo que define o espaço de configuração do sistema obtem-se por geometria que

$$\alpha=\arctan(10^{-N})$$

assim, tem-se que o número de colisões N será dado por: $N=\pi/\arctan(10^{-N})\approx 10^N\pi$ onde esta aproximação é feita de forma cuidadosa, com algumas sutilezas.

Conclusão

Assim concluiu-se este estudo sobre os bilhares matemáticos, que utilizou muitas ferramentas de cálculo , análise e mecânica. Este estudo também foi uma introdução à área de sistemas dinâmicos, uma vez que utiliza ferramentas importantes para esta área.

Agradecimentos

Agradecimentos à minha família e amigos, ao meu orientador Prof. Dr. José Régis Azevedo Varão Filho e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, Fapesp.

---

[1] G. Galperin. Playing pool with π (the number π from a billiard point of view). Regul. Chaotic Dyn., 8(4):375–394, 2003.

[1] Boris Hasselblatt, Anatole Katok. A First Course in Dynamics with a Panorama of RecentDevelopments. Cambridge University Press, 2003.

DOI: 10.19146/pibic-2017-78759