Teorema da Vizinhança Tubular de Weinstein

Leonardo Schultz Araujo*, Lino Grama.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um importante resultado da geometria simplética, o teorema da vizinhança tubular de Weinstein, que relaciona uma subvariedade lagrangiana de uma variedade simplética M com seu mergulho na seção zero do fibrado cotangente T^*M .

Palavras-chave:

Geometria simplética, Subvariedades lagrangianas, Teorema da vizinhança tubular de Weinstein.

Introdução

Seja ω uma 2-forma diferenciável em uma variedade M , i.e para cada $p \in M$, a aplicação $w_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é bilinear e antissimétrica no espaço tangente a M no ponto p , e w_p é suave em p . Dizemos que ω é fechada se satisfaz a equação diferencial $d\omega = 0$, onde d é a derivada exterior.

Uma 2-forma diferenciável é simplética se ω é fechada e para cada p , w_p é não degenerada.

Uma variedade simplética é um par (M, ω) , onde M é uma variedade diferenciável e ω é simplética.

Dizemos que uma subvariedade $X \subset M$ é lagrangiana se, dada a inclusão $i : X \rightarrow M$, $i^* \omega = 0$ e $\dim X = (1/2)\dim M$.

Nosso objetivo é estudar a relação entre uma subvariedade lagrangiana $X \subset M$ de uma variedade simplética M compacta e seu mergulho na seção zero do fibrado cotangente T^*M munido com a estrutura simplética canônica.

Resultados e Discussão

Primeiramente vejamos que se M é uma $2n$ -variedade, ω_0 e ω_1 são formas simpléticas em M e X é subvariedade lagrangiana de (M, ω_0) e (M, ω_1) , então existem vizinhanças U_0 e U_1 de X em M e um difeomorfismo $\phi : U_0 \rightarrow U_1$ tal que $\phi(x) = x$, $\forall x \in X$ e $\phi^* \omega_1 = \omega_0$.

Para isto, utilizaremos o seguinte teorema:

Teorema de Moser: Seja M uma variedade, X uma subvariedade compacta de M , $i : X \rightarrow M$ inclusão, ω_0 e ω_1 formas simpléticas tais que $\omega_0|_p$ e $\omega_1|_p$, $\forall p \in X$. Então existem vizinhanças U_0 e U_1 de X em M , e um difeomorfismo $\phi : U_0 \rightarrow U_1$ tal que $\phi(x) = x$, $\forall x \in X$ e $\phi^* \omega_1 = \omega_0$.

Fixe $p \in X$. Seja $V = T_p M$ e $U = T_p X$. Se $i : X \rightarrow M$ é inclusão, uma vez que $i^* \omega_0 = i^* \omega_1 = 0$, segue que U é um subespaço lagrangiano de $(V, \omega_0|_p)$ e $(V, \omega_1|_p)$. Podemos então obter um isomorfismo $L_p : T_p M \rightarrow T_p M$, tal que $L_p|_{T_p X} = \text{Id}$ e $L_p^* \omega_1|_p = \omega_0|_p$, de modo que L_p é diferenciável em p .

Pelo teorema de Whitney, existe uma vizinhança N de X e um mergulho $h : N \rightarrow X$, com $h|_x = \text{Id}$ e $dh(p) = L_p$, $p \in X$. Desta forma, para cada $p \in X$, $(h^* \omega_1)_p = (dh(p))^* \omega_1|_p = L_p^* \omega_1|_p = \omega_0|_p$.

Aplicando o teorema de Moser a ω_0 e $h^* \omega_1$, encontramos uma vizinhança U_0 de X e um mergulho $f : U_0 \rightarrow N$ tal que $f|_X = \text{Id}$ e $f^*(h^* \omega_1) = \omega_0$ em U_0 . Basta tomarmos então $\phi = h \circ f$, donde obtemos nosso resultado.

Considere então (M, ω) variedade simplética compacta, X uma subvariedade lagrangiana de M , e (T^*M, ω_0) o fibrado cotangente de M munido de ω_0 , estrutura simplética canônica. Utilizando o teorema da vizinhança tubular e identificando $NX \simeq T^*X$, onde NX é o fibrado normal de X , obtemos um difeomorfismo $\psi : V_0 \rightarrow V$, onde V_0 é vizinhança de X em T^*X , com X visto como seção zero do fibrado, e V é vizinhança de X em M . Aplicando o resultado anterior para $\psi^* \omega$ e ω_0 , obtemos $\phi : V_0 \rightarrow U_1$ tal que $\phi^* \psi^* \omega = (\psi \circ \phi)^* \omega = \omega_0$. Donde temos que $\theta = \psi \circ \phi$ é um difeomorfismo tal que $\theta(x) = x$, $\forall x \in X$ e $\theta^* \omega$ é a forma simplética canônica.

Conclusão

Chegamos então a uma demonstração do seguinte teorema:

Teorema da vizinhança tubular de Weinstein: Seja (M, ω) uma variedade simplética compacta e X uma subvariedade lagrangiana de M . Então existe uma vizinhança U_0 da seção zero do fibrado T^*X , uma vizinhança U de X em M e um difeomorfismo $\theta : U_0 \rightarrow U$ tal que $\theta(x) = x$ $\forall x \in X$, e $\theta^* \omega$ é a forma simplética canônica.

Agradecimentos

Agradeço ao CNPq/PIBIC pelo financiamento desta pesquisa.

¹MACARINI, Leonardo (Coaut. de); BURSZTYN, Henrique. Introdução a geometria simplética. Rio de Janeiro, RJ; São Paulo, SP: IMPA: USP, 2006.

²da Silva, A.C.: Lectures on Symplectic Geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1764. Springer, Berlin (2001)

³Weinstein, A., Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, Advances in Math. 6(1971), 329–346.