Dinâmica Simbólica: uma Introdução via Exemplos Hiperbólicos

Pedro G. Mattos*, Régis Varão.

Resumo

Este trabalho de Iniciação Científica tem como objetivo estudar alguns exemplos clássicos de sistemas dinâmicos e conhecer, através deles, os principais conceitos da área. Os exemplos estudados incluem os principais modelos dinâmicos, como os shifts de Bernoulli, endomorfismos expansores no círculo S^1 , automorfismos hiperbólicos no toro e a ferradura de Smale. Também são estudadas conjugações desses sistemas com o shift de Bernoulli e com cadeias de Markov.

Palavras-chave:

Sistemas dinâmicos, dinâmica simbólica, automorfismos hiperbólicos.

Introdução

A noção de sistemas dinâmicos utilizada foi a de um sistema dinâmico discreto: um par (X, f) em que X é um conjunto e $f: X \rightarrow X$ a dinâmica. Inicialmente, são estudados alguns sistemas dinâmicos clássicos. O estudo desses sistemas clássicos consiste na definição do espaço e da dinâmica envolvidos e de proposições e teoremas sobre periodicidade da órbita dos pontos, densidade de órbitas e de conjuntos de pontos no espaço em questão. Foram então estudados os conceitos de uma conjugação entre sistemas dinâmicos, o importante shift de Bernoulli e, por fim, algumas dinâmicas mais interessantes, como automorfismos hiperbólicos no toro $\mathbb{T}^2$, a ferradura de Smale e cadeias de Markov.

Resultados e Discussão

Os primeiros sistemas estudados foram a rotação e a expansão no círculo S^1 , que é definido como o intervalo $[0, 1]$ em que 0 e 1 são identificados. A rotação R_α é definida a partir de um número real α como $R_\alpha(x) = x + \alpha \bmod 1$. A expansão E_m é definida a partir de um número natural m como $E_m(x) = mx \bmod 1$. Pontos com órbitas periódicas são classificados.

Define-se uma conjugação entre dois sistemas dinâmicos (X, f) e (Y, g) como uma função sobrejetiva e contínua $\pi: X \rightarrow Y$ que satisfaz $\pi \circ f = g \circ \pi$ e cuja inversa também tem as mesmas propriedades.

Em seguida, o shift de Bernoulli foi estudado, sistema importante na teoria de sistemas dinâmicos por representar uma grande classe de sistemas. Ele consiste em um espaço de sequências $\Sigma_m = \{0, \dots, m-1\}^{\mathbb{N}}$ e uma função $\sigma: \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$ definida por $\sigma(x_n) = (x_{n+1})$. Algumas conjugações entre o shift de Bernoulli e sistemas estudados foram apresentadas.

O toro $\mathbb{T}^2$ é definido como o produto cartesiano de dois círculos S^1 . Nesse espaço, são estudados automorfismos hiperbólicos definidos por uma matriz $A_{2 \times 2}$ que satisfaz três propriedades: (1) suas entradas

são inteiras, (2) seu determinante é unitário e (3) os autovalores são distintos. A dinâmica leva um ponto x do toro no ponto Ax . A primeira propriedade garante que a dinâmica é bem definida no toro, a segunda, que ela é invertível, e a terceira, que ela é hiperbólica. São estudados pontos periódicos e conjuntos densos no toro relacionados a essa dinâmica.

Por fim, sistemas um pouco mais interessantes como a ferradura de Smale e cadeias de Markov foram brevemente estudados.

Conclusão

O estudo ainda não foi concluído. Nos próximos meses, os sistemas citados no final da discussão serão mais aprofundadamente analisados em relação com conjugação com o shift de Bernoulli. Até o momento, o trabalho cumpriu o objetivo de apresentação da área de sistemas dinâmicos e permitiu que alguns problemas específicos fossem estudados e resolvidos. As referências usadas estão mencionadas abaixo.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, José Régis Azevedo Varão Filho, e ao IMECC por tornarem esse trabalho possível. Este projeto foi financiado pela FAPESP.

¹ Brin, Michael; Stuck, Garrett. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

² Barreira, Luis; Valls, Claudia. *Dynamical systems. An introduction*. Universitext. Springer, London, 2013.

³ Devaney, Robert L. *An introduction to chaotic dynamical systems. Algumas conjugações entre o shift de Bernoulli e sistemas estudados foram apresentadas*. Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.