

## Dinâmica Simbólica: uma Introdução via Exemplos Hiperbólicos

Pedro G. Mattos\*, Régis Varão.

### Resumo

Este trabalho de Iniciação Científica tem como objetivo estudar alguns exemplos clássicos de sistemas dinâmicos e conhecer, através deles, os principais conceitos da área. Os exemplos estudados incluem os principais modelos dinâmicos, como os shifts de Bernoulli, endomorfismos expansores no círculo  $S^1$ , automorfismos hiperbólicos no toro e a ferradura de Smale. Também são estudadas conjugações desses sistemas com o shift de Bernoulli e com cadeias de Markov.

### Palavras-chave:

Sistemas dinâmicos, dinâmica simbólica, automorfismos hiperbólicos.

### Introdução

A noção de sistemas dinâmicos utilizada foi a de um sistema dinâmico discreto: um par  $(X, f)$  em que  $X$  é um conjunto e  $f: X \rightarrow X$  a dinâmica. Inicialmente, são estudados alguns sistemas dinâmicos clássicos. O estudo desses sistemas clássicos consiste na definição do espaço e da dinâmica envolvidos e de proposições e teoremas sobre periodicidade da órbita dos pontos, densidade de órbitas e de conjuntos de pontos no espaço em questão. Foram então estudados os conceitos de uma conjugação entre sistemas dinâmicos, o importante shift de Bernoulli e, por fim, algumas dinâmicas mais interessantes, como automorfismos hiperbólicos no toro  $\mathbb{T}^2$ , a ferradura de Smale e cadeias de Markov.

### Resultados e Discussão

Os primeiros sistemas estudados foram a rotação e a expansão no círculo  $S^1$ , que é definido como o intervalo  $[0, 1]$  em que 0 e 1 são identificados. A rotação  $R_\alpha$  é definida a partir de um número real  $\alpha$  como  $R_\alpha(x) = x + \alpha \pmod{1}$ . A expansão  $E_m$  é definida a partir de um número natural  $m$  como  $E_m(x) = mx \pmod{1}$ . Pontos com órbitas periódicas são classificados.

Define-se uma conjugação entre dois sistemas dinâmicos  $(X, f)$  e  $(Y, g)$  como uma função sobrejetiva e contínua  $\pi: X \rightarrow Y$  que satisfaz  $\pi \circ f = g \circ \pi$  e cuja inversa também tem as mesmas propriedades.

Em seguida, o shift de Bernoulli foi estudado, sistema importante na teoria de sistemas dinâmicos por representar uma grande classe de sistemas. Ele consiste em um espaço de sequências  $\Sigma_m = \{0, \dots, m-1\}^{\mathbb{N}}$  e uma função  $\sigma: \Sigma_m \rightarrow \Sigma_m$  definida por  $\sigma(x_n) = (x_{n+1})$ . Algumas conjugações entre o shift de Bernoulli e sistemas estudados foram apresentadas.

O toro  $\mathbb{T}^2$  é definido como o produto cartesiano de dois círculos  $S^1$ . Nesse espaço, são estudados automorfismos hiperbólicos definidos por uma matriz  $A_{2 \times 2}$  que satisfaz três propriedades: (1) suas entradas

são inteiras, (2) seu determinante é unitário e (3) os autovalores são distintos. A dinâmica leva um ponto  $x$  do toro no ponto  $Ax$ . A primeira propriedade garante que a dinâmica é bem definida no toro, a segunda, que ela é invertível, e a terceira, que ela é hiperbólica. São estudados pontos periódicos e conjuntos densos no toro relacionados a essa dinâmica.

Por fim, sistemas um pouco mais interessantes como a ferradura de Smale e cadeias de Markov foram brevemente estudados.

### Conclusão

O estudo ainda não foi concluído. Nos próximos meses, os sistemas citados no final da discussão serão mais profundamente analisados em relação com conjugação com o shift de Bernoulli. Até o momento, o trabalho cumpriu o objetivo de apresentação da área de sistemas dinâmicos e permitiu que alguns problemas específicos fossem estudados e resolvidos. As referências usadas estão mencionadas abaixo.

### Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador, José Régis Azevedo Varão Filho, e ao IMECC por tornarem esse trabalho possível. Este projeto foi financiado pela FAPESP.

<sup>1</sup> Brin, Michael; Stuck, Garrett. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

<sup>2</sup> Barreira, Luis; Valls, Claudia. *Dynamical systems. An introduction*. Universitext. Springer, London, 2013.

<sup>3</sup> Devaney, Robert L. *An introduction to chaotic dynamical systems. Algumas conjugações entre o shift de Bernoulli e sistemas estudados foram apresentadas*. Second edition. Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1989.