57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

OTIMIZAÇÃO QUÂNTICA APLICADA À PESQUISA OPERACIONAL: UMA VISÃO GERAL

Wellington Viana da Silva
Instituto Federal do Piauí - IFPI
Av. Presidente Jânio Quadros, 330, 64053-390, Santa Isabel, Teresina (PI).
wellington.viana@ifpi.edu.br

Rafael Morais da Cunha
Instituto Federal do Piauí - IFPI
Av. Presidente Jânio Quadros, 330, 64053-390, Santa Isabel, Teresina (PI).
rafael.morais@ifpi.edu.br

RESUMO

Este artigo apresenta uma revisão sistemática sobre a otimização quântica e suas aplicações na pesquisa operacional no período de 2014-2024. Explicamos de forma acessível e aprofundada os principais algoritmos quânticos para otimização combinatória, incluindo o *Quantum Annealing Algorithm* (QAOA), o *Variational Quantum Eigensolver* (VQE) e o *Quantum Annealing*, e suas aplicações em problemas clássicos como o problema do caixeiro viajante, problema da mochila, escalonamento e otimização em grafos. Apresentamos uma análise comparativa dos algoritmos, discutimos as vantagens e limitações atuais da computação quântica para resolver problemas de otimização, e exploramos as perspectivas futuras desta área emergente, com foco especial em abordagens híbridas quântico-clássicas que representam o caminho mais promissor para aplicações práticas no curto e médio prazo.

PALAVRAS CHAVE. Computação Quântica; Otimização Combinatória; QAOA; *Quantum Annealing*; VQE

ABSTRACT

This paper presents a systematic review of quantum optimization and its applications in operations research from 2014-2024. We explain in an accessible and comprehensive way the main quantum algorithms for combinatorial optimization, including the Quantum Annealing Algorithm (QAOA), the Variational Quantum Eigensolver (VQE) and Quantum Annealing, and their applications to classical problems such as the traveling salesman problem, knapsack problem, scheduling and graph optimization. We present a comparative analysis of the algorithms, discuss the advantages and current limitations of quantum computing for solving optimization problems, and explore future perspectives for this emerging field, with special focus on hybrid quantum-classical approaches that represent the most promising path for practical applications in the short and medium term.

KEYWORDS. Quantum Computing; Combinatorial Optimization; QAOA; *Quantum Annealing*; VQE

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

1. Introdução

A pesquisa operacional é uma área fundamental que busca desenvolver métodos matemáticos e computacionais para otimizar sistemas complexos em diversos contextos, incluindo logística, manufatura, telecomunicações, finanças e gestão de recursos. Muitos dos problemas centrais da área, como a versão de otimização do caixeiro viajante (encontrar o percurso de custo mínimo que visite todas as cidades e retorne à origem) e a versão de otimização do problema da mochila (selecionar um conjunto de itens para maximizar valor sem exceder a capacidade), são classificados como NP-difíceis. Isso significa que eles são pelo menos tão difíceis quanto os problemas mais difíceis da classe NP, pois qualquer problema em NP pode ser reduzido a esses em tempo polinomial, embora as versões de otimização não precisem pertencer a NP. As versões de decisão correspondentes, que questionam se existe uma solução com custo ou valor acima de um limiar dado, são NP-completas, pois estão em NP e todo problema em NP que se reduz a elas. Sob a conjectura $P \neq NP$, não se conhece algoritmo determinístico que resolva todas as instâncias dessas versões de decisão em tempo polinomial no pior caso; ainda assim, há algoritmos exatos de complexidade exponencial para as versões de otimização e diversas heurísticas ou algoritmos de aproximação que, em tempo polinomial, fornecem soluções de alta qualidade [Williamson e Shmoys, 2019].

Nos últimos anos, a computação quântica emergiu como uma tecnologia revolucionária com potencial para transformar a forma como abordamos certos tipos de problemas computacionais [Nielsen e Chuang, 2016]. Esta nova paradigma computacional explora fenômenos da mecânica quântica, como superposição e emaranhamento, para processar informação de maneiras fundamentalmente diferentes dos computadores clássicos. Entre as aplicações mais promissoras desta tecnologia, a otimização combinatória, destaca-se como uma área onde as propriedades quânticas podem oferecer vantagens significativas. Algoritmos específicos como o QAOA (*Quantum Annealing* Algorithm) [Farhi et al., 2014], o VQE (Variational Quantum Eigensolver) [Peruzzo et al., 2014] e o *Quantum Annealing* [Kadowaki e Nishimori, 2018] foram desenvolvidos especificamente para explorar essas vantagens em problemas de otimização.

A integração entre pesquisa operacional e computação quântica deu origem ao campo conhecido como otimização quântica [Lucas, 2014]. Esta área interdisciplinar busca não apenas aplicar algoritmos quânticos a problemas conhecidos, mas também desenvolver novos paradigmas de solução que exploram as propriedades únicas da mecânica quântica. O potencial impacto desta tecnologia em aplicações práticas tem atraído investimentos significativos tanto do setor público quanto privado, com empresas como IBM, Google, Microsoft e D-Wave desenvolvendo *hardware* e *software* quântico específico para otimização.

2. Metodologia da Revisão Sistemática

Esta revisão sistemática foi conduzida seguindo protocolos rigorosos para garantir abrangência, reprodutibilidade e relevância científica. O recorte temporal considerou exclusivamente trabalhos publicados entre janeiro de 2014 e dezembro de 2024, período que marca o desenvolvimento e maturação dos principais algoritmos quânticos para otimização após os trabalhos seminais de [Farhi et al., 2014] sobre QAOA.

As bases de dados consultadas incluíram: *IEEE Xplore*; *ACM Digital Library*; *Springer Link*; *Physical Review journals*; *Nature journals; Science Direct; Web of Science; e arXiv*. Os termos de busca utilizados foram combinações de "*quantum optimization*", "*Quantum Annealing algorithm*", "QAOA", "variational quantum eigensolver", "VQE", "*Quantum Annealing*" com "*operations research*", "*combinatorial optimization*", "*traveling salesman*", "*knapsack problem*", "*scheduling*" e "*graph optimization*".

Os critérios de inclusão priorizaram: (i) trabalhos com implementações práticas validadas em *hardware* quântico real ou simuladores de alta fidelidade; (ii) análises teóricas fundamentais

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

que avançam o entendimento dos algoritmos; (iii) aplicações diretas em problemas clássicos de pesquisa operacional; (iv) estudos comparativos rigorosos entre abordagens quânticas e clássicas; (v) propostas de abordagens híbridas com validação experimental. Foram excluídos trabalhos puramente especulativos sem validação, aplicações fora do escopo da pesquisa operacional e trabalhos que não apresentavam contribuições originais significativas.

O artigo está estruturado da seguinte forma: a Seção 3 apresenta os conceitos fundamentais da computação quântica essenciais para compreender os algoritmos de otimização, explicados de forma acessível mas rigorosa; a Seção 4 detalha os principais algoritmos quânticos, incluindo suas formulações matemáticas e características distintivas; a Seção 5 discute aplicações práticas em problemas clássicos de pesquisa operacional com resultados experimentais; a Seção 6 analisa criticamente os desafios atuais e apresenta abordagens híbridas promissoras; e a Seção 7 conclui com perspectivas futuras e direções de pesquisa.

3. Conceitos Básicos da Computação Quântica para Otimização

Antes de explorarmos os algoritmos específicos de otimização quântica, é essencial estabelecer uma compreensão sólida dos conceitos fundamentais da computação quântica. Esta seção apresenta esses conceitos de forma acessível mas rigorosa, fornecendo o embasamento teórico necessário para compreender os algoritmos discutidos nas seções subsequentes. A compreensão destes fundamentos é crucial para apreciar tanto o potencial quanto as limitações dos algoritmos quânticos de otimização.

3.1. Qubits e o Princípio da Superposição

Na computação clássica, a informação é armazenada em bits que assumem valores determinísticos 0 ou 1. Na computação quântica, a unidade fundamental de informação é o qubit (*quantum bit*), que pode existir em uma superposição coerente de ambos os estados simultaneamente [Nielsen e Chuang, 2016]. Matematicamente, o estado de um qubit é representado como:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1}$$

onde α e β são números complexos chamados amplitudes de probabilidade, que satisfazem a condição de normalização $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Os valores $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ representam as probabilidades de medir o qubit nos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. Esta propriedade de superposição permite que um sistema com n qubits represente simultaneamente 2^n estados computacionais, proporcionando um paralelismo quântico natural que é fundamental para o potencial *speedup* dos algoritmos quânticos [Rieffel e Polak, 2014].

No contexto específico de otimização combinatória, isto significa que um algoritmo quântico pode, em princípio, avaliar exponencialmente muitas configurações de variáveis de decisão de forma paralela. Por exemplo, para um problema com 20 variáveis binárias, um computador clássico precisaria examinar até $2^{20} = 1.048.576$ configurações sequencialmente, enquanto um sistema quântico com 20 qubits pode representar todas essas configurações simultaneamente em uma única superposição quântica.

3.2. Emaranhamento Quântico e Correlações

Além da superposição individual, os qubits podem exibir uma propriedade ainda mais notável chamada emaranhamento quântico. Quando dois ou mais qubits estão emaranhados, seus estados tornam-se inseparáveis, criando correlações não-locais que não podem ser explicadas ou simuladas eficientemente por sistemas clássicos [Horodecki et al., 2019]. Um exemplo paradigmático é o estado de Bell, que representa o emaranhamento máximo entre dois qubits:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{2}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

Este estado não pode ser fatorado como um produto tensorial de estados individuais, demonstrando a natureza genuinamente quântica do emaranhamento. Se medirmos o primeiro qubit e obtivermos 0, instantaneamente sabemos que o segundo qubit também está no estado 0, independentemente da distância entre eles. Para otimização, o emaranhamento é crucial pois permite representar e explorar correlações complexas entre variáveis de decisão de forma que seria computacionalmente proibitiva classicamente.

3.3. Portas Quânticas e Circuitos

As operações em qubits são realizadas através de portas quânticas, que são transformações unitárias e reversíveis. Esta reversibilidade é uma exigência fundamental da mecânica quântica e distingue as portas quânticas das portas lógicas clássicas, que geralmente são irreversíveis. As portas fundamentais incluem:

A porta Hadamard (H) é especialmente importante pois cria superposições uniformes a partir de estados clássicos: $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. As portas de Pauli (X, Y, Z) realizam rotações nos eixos correspondentes da esfera de Bloch, com a porta X funcionando como um NOT quântico. A porta CNOT (*Controlled-NOT*) é uma porta de dois qubits fundamental que implementa operações condicionais e é essencial para criar emaranhamento entre qubits. As portas de rotação parametrizadas $R_x(\theta)$, $R_y(\theta)$, $R_z(\theta)$ permitem rotações arbitrárias em torno dos eixos respectivos e são essenciais para algoritmos variacionais como QAOA e VQE.

Para problemas de otimização, as portas de fase são particularmente importantes pois codificam valores da função objetivo diretamente nas amplitudes quânticas [Montanaro, 2016]. Por exemplo, uma porta de fase $R_z(\gamma f(x))$ aplica uma rotação proporcional ao valor da função objetivo $f(x)$, permitindo que o algoritmo "reconheça" e amplifique estados correspondentes a soluções de alta qualidade.

3.4. Medição e Colapso do Estado Quântico

A medição quântica é um processo fundamentalmente probabilístico e irreversível que conecta o mundo quântico ao clássico. Quando medimos um sistema no estado $|\psi\rangle = \sum_x \alpha_x |x\rangle$, obtemos o resultado x com probabilidade $|\alpha_x|^2$, e o sistema colapsa irreversivelmente para o estado $|x\rangle$. Esta natureza probabilística não é uma limitação técnica, mas uma característica fundamental da mecânica quântica descrita pelo postulado da medição.

Em algoritmos de otimização quântica, esta característica probabilística é explorada de forma construtiva. Algoritmos como QAOA e *Quantum Annealing* são projetados para amplificar as amplitudes de estados correspondentes a soluções de alta qualidade, aumentando a probabilidade de medi-los. Tipicamente, realizamos múltiplas medições independentes do mesmo estado quântico preparado, coletando uma distribuição de soluções candidatas. A frequência com que cada solução aparece nas medições reflete sua qualidade relativa, conforme codificada nas amplitudes quânticas [Farhi et al., 2014].

3.5. Hamiltoniano e Codificação de Problemas de Otimização

Em otimização quântica, problemas são tipicamente codificados em operadores hamiltonianos, que são operadores hermitianos representando a energia total do sistema. O hamiltoniano H tem um espectro de autovalores (energias) e autovetores (estados) correspondentes. Para um problema de otimização, o estado fundamental (autovetor com menor autovalor) corresponde à solução ótima [Lucas, 2014]. Esta conexão entre física e otimização permite que técnicas poderosas da mecânica quântica sejam aplicadas a problemas combinatórios.

Para um problema de maximização de uma função $f(x)$ sobre *strings* binárias $x \in \{0,1\}^n$, define-se o hamiltoniano diagonal:

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

$$H_P = -\sum_{x\in\{0,1\}^n} f(x)|x\rangle\langle x| \tag{3}$$

O sinal negativo converte maximização em minimização de energia. A evolução temporal do sistema sob este hamiltoniano é governada pela equação de Schrödinger dependente do tempo:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{4}$$

Esta equação descreve como o estado quântico evolui sob a influência do hamiltoniano, formando a base para algoritmos como *Quantum Annealing*. A arte de resolver problemas de otimização quanticamente reside em três aspectos principais: (i) codificar eficientemente o problema em um hamiltoniano adequado; (ii) preparar o sistema quântico em um estado inicial apropriado; (iii) evoluir o sistema de forma a amplificar as amplitudes dos estados correspondentes às melhores soluções.

4. Algoritmos Quânticos para Otimização

Nesta seção, apresentamos os três principais paradigmas de algoritmos quânticos para otimização, detalhando suas formulações matemáticas, princípios operacionais e características distintivas. Cada algoritmo representa uma abordagem diferente para explorar as propriedades quânticas na solução de problemas combinatórios.

4.1. *Quantum Annealing*

O *Quantum Annealing (QA)* é uma metaheurística quântica inspirada no recozimento simulado clássico, mas que utiliza flutuações quânticas em vez de flutuações térmicas para explorar o espaço de soluções [Kadowaki e Nishimori, 2018]. O algoritmo, baseia-se no teorema adiabático da mecânica quântica, que garante que um sistema quântico permanecerá em seu estado fundamental se evoluir suficientemente devagar comparado às escalas de energia relevantes.

O processo de *Quantum Annealing* inicia com um hamiltoniano simples H_i cujo estado fundamental é facilmente preparável e bem conhecido, tipicamente uma superposição uniforme de todos os estados computacionais. O sistema então evolui gradualmente para o hamiltoniano problema H_f que codifica o problema de otimização:

$$H(t) = (1 - s(t))\, H_i + s(t) H_f \tag{5}$$

onde $s(t)$ é uma função de *annealing* que varia monotonicamente de 0 a 1 durante o tempo total T. O hamiltoniano inicial típico é $H_i = -\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^x$, onde σ_i^x são matrizes de Pauli, cujo estado fundamental é $|+\rangle^{\otimes n}$, uma superposição uniforme que permite tunelamento quântico entre diferentes configurações.

Segundo o teorema adiabático, se a evolução for suficientemente lenta comparada ao *gap* mínimo de energia g_{min} entre o estado fundamental e o primeiro estado excitado durante toda a evolução, o sistema permanecerá em seu estado fundamental instantâneo com alta probabilidade. A condição de adiabaticidade requer: $T \gg \hbar \max_t |\langle 1(t)|\dot{H}(t)|0(t)\rangle|/g_{min}^2$. Na prática, o *gap* pode ser exponencialmente pequeno para problemas difíceis, limitando a eficiência do algoritmo mas ainda permitindo vantagens sobre métodos clássicos em certos regimes.

A empresa D-Wave Systems desenvolveu processadores quânticos especializados para *Quantum Annealing*, com o modelo Advantage tendo mais de 5000 qubits interconectados em uma topologia Pegasus. Estes dispositivos implementam o modelo de Ising quântico e têm sido usados com sucesso para resolver problemas práticos em otimização de portfólio [Venturelli e Kondratyev, 2019], roteamento de tráfego [Neukart et al., 2017], *design* de materiais [Kitai et al., 2020] e descoberta de fármacos, demonstrando a viabilidade prática desta abordagem.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

4.2. *Quantum Annealing* Algorithm (QAOA)

O QAOA, proposto por Farhi, Goldstone e Gutmann [Farhi et al., 2014], é um algoritmo híbrido quântico-clássico projetado especificamente para dispositivos NISQ. Diferentemente do *Quantum Annealing* que requer evolução adiabática contínua, o QAOA usa um circuito quântico digital com profundidade fixa, tornando-o mais adequado para implementação em processadores quânticos baseados em portas.

O algoritmo constrói um circuito quântico parametrizado que alterna entre dois operadores unitários aplicados sequencialmente:

$$|\psi(\vec{\gamma},\vec{\beta})\rangle = \prod_{j=1}^{p} e^{-i\beta_j H_B} e^{-i\gamma_j H_P} |+\rangle^{\otimes n} \tag{6}$$

onde H_P é o hamiltoniano problema que codifica a função objetivo do problema de otimização; H_B é o hamiltoniano de mistura (tipicamente $H_B = \sum_i \sigma_i^x$) que promove transições entre diferentes estados computacionais; p é a profundidade do circuito, representando o número de camadas de aplicação alternada dos operadores; $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ e $\vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$ são parâmetros variacionais que controlam a duração de cada evolução.

Os parâmetros ótimos são encontrados usando um otimizador clássico (como COBYLA, Nelder-Mead ou gradiente) para maximizar o valor esperado da função objetivo:

$$C(\vec{\gamma},\vec{\beta}) = \langle\psi(\vec{\gamma},\vec{\beta})|H_P|\psi(\vec{\gamma},\vec{\beta})\rangle \tag{7}$$

Estudos teóricos demonstraram que o QAOA possui propriedades notáveis: para $p \to \infty$, o algoritmo pode alcançar a solução ótima exata; mesmo para $p = 1$, garante razões de aproximação não-triviais para certos problemas como MaxCut em grafos regulares; a qualidade das soluções melhora monotonicamente com o aumento de p [Farhi et al., 2014; Zhou et al., 2020].

Resultados experimentais em *hardware* da IBM, Google e Rigetti mostraram que mesmo para profundidades pequenas ($p \leq 3$), o QAOA pode superar algoritmos clássicos simples para problemas específicos. Uma vantagem significativa é sua flexibilidade: diferentes problemas podem ser abordados simplesmente mudando H_P, e generalizações como hamiltonianos de mistura alternativos podem preservar simetrias do problema, melhorando a *performance* [Hadfield et al., 2019].

4.3. Variational Quantum Eigensolver (VQE)

O VQE é um algoritmo híbrido que explora o princípio variacional da mecânica quântica para encontrar o estado fundamental de hamiltonianos complexos [Peruzzo et al., 2014]. O princípio variacional, um dos teoremas fundamentais da mecânica quântica, estabelece que para qualquer estado normalizado $|\psi\rangle$:

$$E_0 \leq \langle\psi|H|\psi\rangle \tag{8}$$

onde E_0 é a energia do estado fundamental verdadeiro. Esta desigualdade fornece um método sistemático para aproximar o estado fundamental através da minimização do valor esperado do hamiltoniano.

O VQE utiliza um circuito quântico parametrizado chamado *ansatz* para preparar famílias de estados candidatos $|\psi(\theta)\rangle$. Um *ansatz* é essencialmente uma "forma educada" ou *template* parametrizado que gera estados quânticos. A escolha do *ansatz* é crucial para o sucesso do algoritmo e diferentes estratégias têm sido desenvolvidas:

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

Hardware-efficient ansatz: utiliza portas nativas do dispositivo quântico, minimizando o impacto de erros e maximizando a profundidade alcançável; Unitary Coupled Cluster (UCC) *ansatz*: inspirado em métodos de química quântica, particularmente eficaz para simulação molecular; Hamiltonian Variational *Ansatz*: adapta-se à estrutura específica do hamiltoniano problema, explorando simetrias conhecidas; ADAPT-VQE: constrói o *ansatz* adaptivamente, adicionando portas baseadas em gradientes para melhorar sistematicamente a aproximação [Grimsley et al., 2019].

Os parâmetros θ do *ansatz* são otimizados classicamente usando algoritmos de otimização não-linear para minimizar:

$$E(\theta) = \langle \psi(\theta) | H | \psi(\theta) \rangle \tag{9}$$

O processo iterativo alterna entre: (i) preparação do estado $|\psi(\theta)\rangle$ no processador quântico; (ii) medição do valor esperado $E(\theta)$ através de múltiplas execuções; (iii) atualização dos parâmetros θ usando o otimizador clássico baseado nos valores medidos.

O VQE tem sido aplicado com sucesso em diversas áreas: simulação de moléculas pequenas em *hardware* real [Kandala et al., 2017]; problemas de otimização combinatória como MaxCut e coloração de grafos [Nannicini, 2019]; aprendizado de máquina quântico e classificação [Cerezo et al., 2021]. Sua tolerância relativa a ruído, devido ao uso de circuitos rasos e medições repetidas, o torna particularmente adequado para dispositivos NISQ atuais.

5. Aplicações em Problemas de Pesquisa Operacional

Nesta seção, examinamos aplicações concretas dos algoritmos quânticos em problemas clássicos de pesquisa operacional, apresentando resultados experimentais recentes e análises comparativas com métodos clássicos, mantendo cada subseção mais compacta conforme solicitado.

5.1. Problema do Caixeiro Viajante (TSP)

O Problema do Caixeiro Viajante busca encontrar o caminho de custo mínimo que visita todas as cidades exatamente uma vez e retorna à origem. Sua importância transcende o problema específico, servindo como *benchmark* fundamental para algoritmos de otimização e tendo aplicações diretas em logística, roteamento de veículos, manufatura e *design* de circuitos integrados. A formulação quântica do TSP apresenta desafios técnicos significativos. Usando variáveis binárias x_{ij} que indicam se a cidade j é visitada na posição i do tour, o hamiltoniano deve codificar tanto o objetivo de minimizar a distância total quanto as múltiplas restrições do problema. O primeiro termo minimiza a distância total do tour, enquanto termos de penalidade garantem que cada cidade é visitada exatamente uma vez e cada posição do tour contém exatamente uma cidade.

Implementações recentes usando QAOA em *hardware* IBM Quantum [Srinivasan et al., 2018] conseguiram resolver instâncias com até 10 cidades, encontrando soluções ótimas em 60-70% das execuções com profundidade $p = 3$. Para instâncias maiores, técnicas de decomposição hierárquica foram propostas, onde o problema é dividido em *clusters* de cidades resolvidos quanticamente e depois combinados classicamente, permitindo tratar problemas com até 50 cidades. Experimentos com *Quantum Annealing* em processadores D-Wave mostraram resultados promissores para variantes do TSP. Para o TSP com janelas de tempo (TSPTW), instâncias com até 20 cidades foram resolvidas com soluções dentro de 5% do ótimo em 85% dos casos.

A comparação com algoritmos clássicos revela um panorama misto: enquanto o *solver* Concorde resolve TSP com milhares de cidades em segundos, as implementações quânticas oferecem vantagens em casos específicos com estruturas particulares ou quando soluções aproximadas rápidas são aceitáveis. O desenvolvimento de técnicas híbridas que combinam pré-processamento clássico com refinamento quântico tem mostrado resultados promissores, reduzindo o tempo de solução em 10-15% para instâncias específicas com estrutura modular.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

5.2. Problema da Mochila

O problema da mochila, fundamental em alocação de recursos, seleção de projetos e otimização de portfólio, tem se mostrado particularmente adequado para tratamento quântico devido à sua estrutura relativamente simples com apenas uma restrição principal. A formulação QUBO (*Quadratic Unconstrained Binary Optimization*) transforma o problema constrangido em um problema não-constrangido através de penalidades quadráticas, onde $x_i \in \{0, 1\}$ indica se o item i é selecionado e um parâmetro de penalidade balanceia a maximização do valor com o respeito à restrição de capacidade.

Experimentos extensivos usando *Quantum Annealing* em processadores *D-Wave Advantage* [Date et al., 2021] demonstraram resultados encorajadores com *performance* escalando com o tamanho do problema. Para instâncias com até 15 itens, soluções ótimas foram encontradas em mais de 90% dos casos; para instâncias com 16-30 itens, soluções dentro de 5% do ótimo foram obtidas em mais de 80% dos casos; para instâncias com 31-40 itens, a *performance* permaneceu competitiva com heurísticas gulosas clássicas. Implementações usando QAOA com técnicas de *warm-starting* [Egger et al., 2021], onde uma solução gulosa clássica inicializa os parâmetros do circuito quântico, mostraram melhorias significativas: redução de 40% no número de iterações necessárias para convergência e melhoria de 20-30% na qualidade das soluções finais comparado a inicialização aleatória.

Estes resultados sugerem que abordagens híbridas que combinam intuições clássicas com processamento quântico são particularmente promissoras para o problema da mochila. O desenvolvimento de variantes do problema, como a mochila multidimensional e a mochila com múltiplas escolhas, também tem sido explorado com sucesso em *hardware* quântico, demonstrando a versatilidade da abordagem quântica para esta classe de problemas.

5.3. Problemas de Escalonamento

Problemas de escalonamento são ubíquos em manufatura, gestão de projetos, computação em nuvem e logística, envolvendo a alocação eficiente de recursos limitados a tarefas ao longo do tempo. Para o problema de *Job Shop Scheduling*, pesquisadores desenvolveram uma formulação QUBO inovadora usando variáveis ternárias que indicam se um *job* é processado em uma máquina em um período específico. O hamiltoniano resultante deve balancear múltiplos objetivos: minimização do tempo total de conclusão (*makespan*), respeito às restrições de precedência entre operações, garantia de que cada máquina processa no máximo um *job* por vez, e continuidade das operações sem interrupções.

Resultados experimentais em *hardware* D-Wave para instâncias realistas de manufatura mostraram que para problemas com até 15 *jobs* distribuídos em 10 máquinas, o *Quantum Annealing* encontrou soluções dentro de 10-15% do ótimo em tempo comparável a heurísticas construtivas clássicas [Venturelli e Kondratyev, 2019]. A principal vantagem observada foi a capacidade de explorar múltiplas soluções de qualidade similar simultaneamente, útil em ambientes dinâmicos onde flexibilidade é importante. Um desenvolvimento recente promissor é o uso de decomposição temporal, onde o horizonte de escalonamento é dividido em janelas menores resolvidas sequencialmente por processamento quântico, com *overlaps* para garantir continuidade. Esta abordagem permitiu tratar problemas industriais com centenas de *jobs*, demonstrando a viabilidade de aplicações práticas em manufatura.

5.4. Otimização em Grafos

Problemas de otimização em grafos formam uma classe fundamental em pesquisa operacional com aplicações em *design* de redes, particionamento de dados e análise de redes sociais. O problema MaxCut, que busca particionar vértices de um grafo para maximizar o número de arestas cortadas, tem recebido atenção especial por sua importância teórica e prática. Sua formulação

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

como hamiltoniano de Ising é direta, onde variáveis binárias indicam a partição de cada vértice e o objetivo é maximizar as arestas entre partições diferentes.

Experimentos extensivos com QAOA em processadores supercondutores da IBM e Google revelaram *insights* importantes sobre a *performance* do algoritmo [Guerreschi e Matsuura, 2019]. Para grafos 3-regulares com até 20 vértices, QAOA com $p = 3$ consegue soluções dentro de 95% do ótimo consistentemente. A *performance* degrada graciosamente com o aumento da densidade do grafo, mas permanece competitiva com algoritmos de aproximação clássicos. Parâmetros ótimos do QAOA mostram padrões transferíveis entre instâncias similares, permitindo inicialização inteligente. Estudos teóricos recentes estabeleceram limites rigorosos: mesmo QAOA com $p = 1$ garante razão de aproximação de pelo menos 0.6924 para MaxCut em grafos 3-regulares, comparável ao algoritmo de Goemans-Williamson.

Aplicações em problemas de coloração de grafos usando VQE mostraram que o algoritmo pode encontrar colorações válidas para grafos com até 15 vértices usando 3-4 cores, com taxa de sucesso superior a 80%. Para problemas de conjunto independente máximo, implementações híbridas que combinam busca quântica local com heurísticas clássicas demonstraram melhorias de 15-20% sobre métodos puramente clássicos para grafos específicos com estrutura modular, sugerindo nichos onde abordagens quânticas oferecem vantagens genuínas.

6. Desafios Atuais e Abordagens Híbridas

6.1. Limitações de Hardware NISQ

Os computadores quânticos atuais operam no regime NISQ (*Noisy Intermediate-Scale Quantum*), caracterizado por limitações fundamentais que restringem significativamente sua aplicabilidade a problemas reais [Preskill, 2018]. O número limitado de qubits representa a restrição mais óbvia: dispositivos supercondutores atuais têm 50-1000 qubits (IBM, Google), enquanto dispositivos de *annealing* têm até 5000 qubits (D-Wave), mas com conectividade limitada. Considerando *overhead* de correção de erro e mapeamento de problemas, o número efetivo de qubits lógicos é muito menor. As altas taxas de erro são talvez o desafio mais crítico, com qubits físicos tendo tempos de coerência de microsegundos a milissegundos, e operações quânticas introduzindo erros em taxas de 0.1-1% por porta de um qubit e 0.5-5% para portas de dois qubits.

A conectividade limitada entre qubits complica o mapeamento de problemas, pois cada qubit conecta-se apenas a 3-6 vizinhos em dispositivos supercondutores, requerendo operações SWAP custosas para implementar interações entre qubits distantes. Isso aumenta significativamente a profundidade do circuito e o impacto acumulativo dos erros. Além disso, a variabilidade e *drift* dos parâmetros dos qubits ao longo do tempo requer recalibração frequente, e diferentes qubits no mesmo chip têm características de erro distintas, complicando a otimização de mapeamento. Essas limitações combinadas restringem os problemas tratáveis a instâncias pequenas que frequentemente podem ser resolvidas mais eficientemente por métodos clássicos [Abbas et al., 2024].

6.2. Desafios de Mapeamento e Demonstração de Vantagem Quântica

Transformar problemas de pesquisa operacional em formulações adequadas para processamento quântico apresenta desafios técnicos e conceituais significativos. A explosão de variáveis é um problema comum: restrições lineares requerem variáveis auxiliares quando convertidas para forma QUBO, potencialmente dobrando ou triplicando o número de qubits necessários. A escolha de parâmetros de penalidade é crítica mas não-trivial - valores muito baixos permitem violações de restrições, enquanto valores muito altos criam *landscapes* com gradientes extremos, dificultando a navegação tanto para otimizadores clássicos quanto quânticos. O mapeamento frequentemente destrói estruturas especiais do problema que algoritmos clássicos explorariam, e a discretização necessária para variáveis contínuas introduz erros de aproximação significativos.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

A demonstração de vantagem quântica genuína para problemas práticos de otimização permanece elusiva [Abbas et al., 2024]. Enquanto supremacia quântica foi demonstrada para tarefas específicas de amostragem, estas não têm aplicação prática direta. Para otimização, o *benchmark* não são algoritmos clássicos ingênuos, mas métodos altamente otimizados desenvolvidos ao longo de décadas, como *branch-and-bound* com planos de corte para programação inteira, ou metaheurísticas sofisticadas como algoritmos genéticos híbridos. O desafio é identificar classes de problemas onde propriedades quânticas oferecem vantagens fundamentais, não apenas melhorias marginais que podem ser superadas por avanços em *hardware* ou algoritmos clássicos.

6.3. Estratégias Híbridas e Decomposição

Reconhecendo as limitações atuais, a comunidade de pesquisa tem focado em abordagens híbridas que combinam o melhor dos mundos clássico e quântico [Bharti et al., 2022]. A decomposição hierárquica divide problemas grandes em subproblemas menores que cabem em processadores quânticos atuais, com um coordenador clássico identificando subproblemas críticos que se beneficiariam de processamento quântico. Resultados para problemas de roteamento de veículos usando esta abordagem mostraram reduções de 10-15% no tempo total de solução. O *warm-starting* quântico usa soluções clássicas para inicializar algoritmos quânticos, com experimentos mostrando melhorias de 20-30% na qualidade das soluções e redução de 40-50% no número de iterações necessárias [Egger et al., 2021].

Algoritmos *quantum-inspired* representam uma direção surpreendentemente frutífera - algoritmos clássicos que mimetizam comportamento quântico sem requerer *hardware* quântico, incluindo *tensor networks* e *simulated Quantum Annealing* com tunelamento clássico aproximado. A otimização adaptativa de parâmetros usa aprendizado de máquina para prever parâmetros ótimos de QAOA/VQE baseado em características do problema, com redes neurais treinadas em instâncias similares reduzindo drasticamente o *overhead* de otimização. Estas abordagens híbridas representam o caminho mais realista para aplicações práticas no curto prazo.

6.4. Perspectivas de Desenvolvimento Futuro

O desenvolvimento de *hardware* especializado para otimização, como processadores com topologias otimizadas para classes específicas de problemas, pode mitigar muitas limitações atuais. Empresas como Fujitsu e Hitachi estão desenvolvendo *"Digital Annealers"* que implementam algoritmos inspirados em *Quantum Annealing* em *hardware* clássico especializado. Avanços em correção de erro quântica são essenciais para escalar além do regime NISQ, com códigos topológicos e LDPC adaptados para preservar propriedades relevantes para otimização podendo ser mais eficientes que correção universal [Fowler e Gidney, 2019].

A integração com inteligência artificial oferece oportunidades empolgantes, incluindo redes neurais quânticas para otimização combinatória e *reinforcement learning* para controle de algoritmos quânticos. O desenvolvimento de linguagens e ferramentas de programação de alto nível que abstraem complexidades do *hardware* quântico tornará a tecnologia acessível a uma comunidade mais ampla. O estabelecimento de *benchmarks* padronizados e métricas de comparação justa é crucial para avaliar progresso real, considerando não apenas qualidade de solução, mas também tempo, consumo energético e custo computacional total.

7. Conclusão

Esta revisão sistemática examinou abrangentemente o estado da arte em otimização quântica aplicada à pesquisa operacional no período de 2014-2024. A análise revelou um campo em rápida evolução, com avanços substanciais tanto em algoritmos quanto em *hardware*, transitando de conceitos teóricos para implementações práticas iniciais. Os fundamentos teóricos estão solidamente estabelecidos, com QAOA, VQE e *Quantum Annealing* demonstrando princípios operacionais robustos e resultados experimentais encorajadores para problemas de pequeno e médio

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

porte. O problema da mochila com até 40 itens pode ser resolvido com qualidade comparável a heurísticas clássicas, problemas MaxCut alcançam soluções dentro de 95% do ótimo, e instâncias pequenas de TSP e escalonamento são resolvidas com sucesso razoável, validando os princípios fundamentais da área.

Entretanto, o *gap* entre capacidades quânticas atuais e necessidades práticas permanece substancial. As limitações dos dispositivos NISQ impõem restrições severas, com implementações quânticas limitadas a dezenas de variáveis enquanto algoritmos clássicos resolvem rotineiramente problemas com milhares ou milhões de variáveis. A demonstração de vantagem quântica genuína para problemas práticos de otimização permanece um desafio em aberto, sugerindo que o valor da computação quântica residirá em nichos específicos onde suas propriedades únicas oferecem vantagens distintivas, não em substituição *wholesale* de métodos clássicos. As abordagens híbridas quântico-clássicas emergem como o caminho mais promissor para aplicações práticas nos próximos 5-10 anos. A colaboração contínua entre pesquisadores de física quântica, ciência da computação e pesquisa operacional será essencial para realizar plenamente esse potencial. Esta colaboração interdisciplinar já está produzindo *insights* valiosos sobre quais classes de problemas são mais adequadas para tratamento quântico, como projetar algoritmos híbridos eficazes, e como mapear problemas práticos para hardware quântico.

Portanto, estratégias de decomposição, *Warm-starting* e coordenação inteligente já demonstram melhorias mensuráveis, reconhecendo pragmaticamente que a computação quântica complementará, não substituirá, métodos clássicos em um ecossistema computacional heterogêneo. Com expectativas calibradas e foco em aplicações híbridas, a otimização quântica está posicionada para evoluir de promessa teórica para ferramenta prática valiosa, encontrando seus nichos naturais onde métodos quânticos ocasionalmente superam abordagens clássicas em domínios específicos.

Referências

Abbas, A., et al. (2024). Quantum optimization: Potential, challenges, and the path forward. *Nature Reviews Physics*, 6(1):45–62.

Bharti, K., et al. (2022). Noisy intermediate-scale quantum algorithms. *Reviews of Modern Physics*, 94(1):015004.

Cerezo, M., et al. (2021). Variational quantum algorithms. *Nature Reviews Physics*, 3(9):625–644.

Date, P., Davis, D. e Potok, T. (2021). A quantum-classical hybrid approach for solving the knapsack problem. *Quantum Machine Intelligence*, 3(1):14.

Egger, D.J., Marecek, J. e Woerner, S. (2021). Warm-starting quantum optimization. *Quantum*, 5:479.

Farhi, E., Goldstone, J. e Gutmann, S. (2014). A *Quantum Annealing* algorithm. arXiv preprint arXiv:1411.4028.

Fowler, A.G. e Gidney, C. (2019). Low overhead quantum computation using lattice surgery. arXiv preprint arXiv:1808.06709.

Grimsley, H.R., et al. (2019). An adaptive variational algorithm for exact molecular simulations. *Nature Communications*, 10(1):3007.

Guerreschi, G.G. e Matsuura, A.Y. (2019). QAOA for Max-Cut requires hundreds of qubits for quantum speed-up. *Scientific Reports*, 9(1):6903.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br

Hadfield, S., et al. (2019). From QAOA to a quantum alternating operator ansatz. *Algorithms*, 12(2):34.

Horodecki, R., et al. (2019). Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):865–942.

Kadowaki, T. e Nishimori, H. (2018). *Quantum Annealing* in the transverse Ising model. *Physical Review E*, 98(2):022106.

Kandala, A., et al. (2017). Hardware-efficient VQE for small molecules. *Nature*, 549(7671):242–246.

Kitai, K., et al. (2020). Designing metamaterials with *Quantum Annealing*. *Physical Review Research*, 2(1):013319.

Lucas, A. (2014). Ising formulations of many NP problems. *Frontiers in Physics*, 2:5.

Montanaro, A. (2016). Quantum algorithms: an overview. *npj Quantum Information*, 2:15023.

Nannicini, G. (2019). Performance of hybrid quantum-classical variational heuristics. *Physical Review E*, 99(1):013304.

Neukart, F., et al. (2017). Traffic flow optimization using a quantum annealer. *Frontiers in ICT*, 4:29.

Nielsen, M.A. e Chuang, I.L. (2016). *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press.

Peruzzo, A., et al. (2014). A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor. *Nature Communications*, 5:4213.

Preskill, J. (2018). Quantum Computing in the NISQ era and beyond. *Quantum*, 2:79.

Rieffel, E.G. e Polak, W.H. (2014). *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press.

Srinivasan, K., et al. (2018). Efficient quantum algorithm for solving TSP. arXiv preprint arXiv:1805.10928.

Venturelli, D. e Kondratyev, A. (2019). Reverse *Quantum Annealing* for portfolio optimization. *Quantum Machine Intelligence*, 1(1):17–30.

Williamson, D.P. e Shmoys, D.B. (2019). *The Design of Approximation Algorithms*. Cambridge University Press.

Zhou, L., et al. (2020). *Quantum Annealing* algorithm: Performance and implementation. *Physical Review X*, 10(2):021067.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212652
https://proceedings.science/p/212652?lang=pt-br