57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

APRESENTAÇÃO DE UM APLICATIVO WEB PARA AUXÍLIO NO CÁLCULO DE EQUAÇÕES DE SALVA

Tullio Mozart Pires de Castro Araujo
Centro de Desenvolvimento Doutrinário de Guerra Naval
Ilha de Mocanguê - S/N - Niterói - RJ
tullio.mozart@marinha.mil.br

Alberto Ferreira Filho
Centro de Desenvolvimento Doutrinário de Guerra Naval
Ilha de Mocanguê - S/N - Niterói - RJ
alberto.filho@marinha.mil.br

Marcos dos Santos
Escola Naval
Ilha de Villegagnon - Rio de Janeiro - RJ
marcosdossantos@ime.eb.br

Carlos Francisco Simões Gomes
Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria - S/N - Niterói - RJ
cfsg1@bol.com.br

Bruce Engle Fróes
Diretoria Industrial da Marinha - DIM
Arsenal de Marinha do Rio de Janeiro - S/N - Rio de Janeiro - RJ
bruce.engle@marinha.mil.br

RESUMO

Este artigo visa apresentar um aplicativo web para facilitar a utilização equações de salva. Apresenta-se seu histórico e utilização no contexto da guerra naval, bem como diferentes modelos matemáticos a respeito das referidas equações. Por fim, é apresentado o aplicativo web propriamente dito, nas suas diferentes configurações

PALAVRAS CHAVE. Análise Operacional, Equações de Salva, Simulação, Pesquisa Operacional, Ciência Militar.

Tópicos (SE-PODMAR, SIM, D&SP)

ABSTRACT

This article seeks to present a web app to facilitate the use of the so called salvo-equations. Their context in naval warfare is presented, as well as their many mathematical models. Finally, the aformentioned web app is presented, in it‘s different configurations.

KEYWORDS. Operational Analysis, Salvo Equations, Simulation, Operations Research, Military Sciences.

Paper topics (SE-PODMAR, SIM, D&SP)

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

1. Introdução

O comércio marítimo é, hoje, aquilo que liga todos os países entre si, inclusive aqueles que não possuem acesso ao mar. Manter essas linhas de comunicação marítimas é uma preocupação constante dos países, em especial de suas marinhas.

A expressão do poder nacional sobre o mar é conhecida como Poder Marítimo, e sua parcela militar (por sua vez), é conhecida como Poder Naval.

Mahan [2010], que é o grande teórico da guerra naval americano, enfatiza a importância da proteção das linhas de comunicação marítimas, mediante o seu patrulhamento e controle pelas marinhas. Com base nesse raciocínio, observou-se uma proliferação de bases navais das grandes potências, ao longo do globo.

Contudo, na medida em que as sucessivas revoluções tecnológicas se fizeram sentir também no ambiente da guerra do mar, assim como pessoas de diferentes nacionalidades e separadas por centenas e, até mesmo milhares de quilômetros, se fizeram próximas, o mesmo ocorreu com os armamentos embarcados nos navios de guerra. Enquanto nos tempos antigos o padrão da guerra no mar consistia em um navio abordar o outro, para guerra homem a homem, agora os navios de guerra são capazes de projetar poder a milhares de quilômetros.

Face ao exposto, Hughes [1995] empreendeu uma robusta pesquisa acerca do uso do poder navio a navio, e a partir das chamadas "equações de Lanchester"consolidou o seu modelo como aquilo que ficou conhecido como as equações de salva.

De forma resumida, as equações de salva visam simular, dados certos parâmetros, como se comportaria um engajamento entre duas forças inimigas. Dessa forma, os diferentes tomadores de decisão das marinhas poderiam utilizar essas ferramentas para planejar a configuração de suas forças, nos diferentes escalões (Estratégico, Operacional e Tático).

Face ao exposto, este artigo visa apresentar uma ferramenta computacional desenvolvida com Python, no *framework streamlit*, de modo a facilitar o calculo das equações de salva, em diferentes configurações.

Dessa forma, o artigo está separado em 5 seções: 1 - Introdução, 2 - Referencial Teórico, 3 - Metodologia, 4 - Aplicação e 5 - Considerações Finais.

2. Referencial Teórico

2.1. Pesquisa Operacional em aplicações Militares

Segundo Hillier e Lieberman [2001], dada a complexidade que envolve a maioria dos problemas militares, a Pesquisa Operacional (PO) surgiu durante a Segunda Guerra Mundial como uma abordagem científica para a tomada de decisões, principalmente na esfera militar.

Um exemplo de aplicação militar dá-se no contexto da utilização dos chamados Auxílios Multicritério a Decisão (AMD). Um exemplo (de Souza et al. [2022]), onde os autores demonstram a capacidade combinada do PSM VFT(Value-Focused Thinking), para escolha de drones. Outros exemplos são de Almeida et al. [2022] que utilizaram do multicritério para seleção de bases para a Marinha do Brasil e Logullo et al. [2022], que utilizaram do método multicritério AHP e do método de estruturação de problemas *Value Focused Thinking - VFT*, em problemas da Força Aérea Brasileira.

2.2. As Equações de Salva

Em que pese a importância do tema, numa busca feita tanto na base de dados Scopus quanto na *Web of Science - WoS*, foram encontrados somente 9 documentos diretamente atrelados ao conceito das equações de salva.

No documento mais citado, Lucas e McGunnigle [2003] propõem que embora os modelos das equações de salva sejam relativamente simples, isso os torna mais propensos a serem adotados, justamente por isso.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

Em seguida, por ordem de citação, seguem-se 3 artigos do mesmo autor. No primeiro, Armstrong [2004] procura demonstrar, através do uso das equações de salva, como quantificar o grau de letalidade de um combate naval. O autor apresenta modelos contínuos e discretos das equações de salva, de modo a demonstrar diferentes abordagens. Em seguida, Armstrong [2014] o autor demonstra um modelo estocástico das equações de salva. Por fim, Armstrong [2013] apresenta o emprego das referidas equações, em contexto de fogo em área, no sentido de uso de armamentos lançados de terra anti-navios, com capacidade de causar dano por área.

3. Metodologia

3.1. Equação de Salva Clássica

As equações de salva clássica, propostas por Hughes [1995] são as seguintes:

$$\Delta B = \frac{\alpha A - b_3 B}{b1} \tag{1}$$

$$\Delta A = \frac{\beta B - a_3 A}{b1} \tag{2}$$

Onde:

1. ΔA: número de unidades da força A que são postas fora de ação pelo fogo de B
2. ΔB: número de unidades da força B que são postas fora de ação pelo fogo de A
3. A: número de unidades na força A
4. B: número de unidades na força B
5. α: mísseis/tiros certeiros lançados por A
6. β: mísseis/tiros certeiros lançados por B
7. a_1: quantidade de mísseis/tiros dados por B necessários para colocar A fora de ação
8. b_1: quantidade de mísseis/tiros dados por A necessários para colocar B fora de ação
9. a_3: número de mísseis/tiros certeiros interceptados por cada A
10. b_3: número de mísseis/tiros certeiros interceptados por cada B

O modelo acima, proposto por Hughes, pode ser utilizado para descrever diversas circunstâncias. Notavelmente, a priori, o modelo serviu para colocar em cheque a própria crença do mesmo de que numa marinha, navios maiores e com muitos armamentos deveriam ter prioridade de aquisição. O modelo mostrou, em diferentes ocasiões, que uma força relativamente inferior em termos de poder de fogo poderia derrotar uma força com maior vantagem nesse critério. Nessas ocasiões, a força mais "fraca"pode ser capaz de concentrar fogos de maneira a realmente ameaçar a força mais poderosa. Ainda que a força mais poderosa pudesse, por sua própria conta, ser capaz de derrotar a mais fraca, diversas vezes.

3.2. Equação de Salva Contínua

Proposta por Armstrong [2013], a equação de salva modificada utiliza equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{dx}{dt} = -f_y \cdot y(t) \cdot (1 - q_x) \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = -f_x \cdot x(t) \cdot (1 - q_y) \tag{4}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

Onde:

1. $x(t)$: Número de unidades e/ou capacidade da força X num instante t
2. $y(t)$: Número de unidades e/ou capacidade da força Y num instante t
3. f_x, f_y: Poder de fogo por unidade das forças X e Y, respectivamente (*rate* de dano)
4. q_x, q_y: Efetividade defensiva das forças X e Y, respectivamente

Desse modo, o termo $(1 - q)$ das equações representa a fração de ataques que penetram ou são efetivos.

3.3. Equação de Salva Estocástica

O modelo estocástico das equações insere conceitos de incerteza no seu uso:

$$\begin{aligned} A_y &= f_x \cdot x_n \cdot (1 - q_y) + \varepsilon_y, \quad \varepsilon_y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ A_x &= f_y \cdot y_n \cdot (1 - q_x) + \varepsilon_x, \quad \varepsilon_x \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \\ x_{n+1} &= \max(0, x_n - A_x) \\ y_{n+1} &= \max(0, y_n - A_y) \end{aligned} \tag{5}$$

Onde:

1. A_x: Impacto total em x
2. A_y: Impacto total em y
3. x_n: Número de unidades e/ou capacidade da força X num instante t
4. y_n: Número de unidades e/ou capacidade da força Y num instante t
5. f_x, f_y: Poder de fogo por unidade das forças X e Y, respectivamente (*rate* de dano)
6. q_x, q_y: Efetividade defensiva das forças X e Y, respectivamente
7. ϵ_x, ϵ_y: Ruído aleatório introduzido para representar a variabilidade/incerteza dos combates
8. $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$: Ruído gaussiano com média 0 e variância σ^2
9. $max(0, .)$: Assegura que o número mínimo de tropas é nenhuma (0), não havendo possibilidade negativa.

3.4. Equação de Salva com múltiplas forças

Esse modelo estende o modelo clássico para o uso com outras unidades (aeronaves, submarinos, etc.):

$$\begin{aligned} \text{Dano a unidade A } j: \quad D_j^y &= \sum_{i=1}^{3} F_{ij}^x \cdot x_i \cdot (1 - q_y) \\ \text{Dano a unidade B } j: \quad D_j^x &= \sum_{i=1}^{3} F_{ij}^y \cdot y_i \cdot (1 - q_x) \\ x_j^{(n+1)} &= \max(0, x_j^{(n)} - D_j^x) \\ y_j^{(n+1)} &= \max(0, y_j^{(n)} - D_j^y) \end{aligned} \tag{6}$$

Onde:

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

1. x_i: Número de unidades e/ou capacidade da força X num instante t
2. y_i: Número de unidades e/ou capacidade da força Y num instante t
3. q_x, q_y: Efetividade defensiva das forças x e y, respectivamente
4. F_{ij}^x: Efetividade da unidade i de B ao atacar a unidade j de A
5. F_{ij}^y: Efetividade da unidade i de A ao atacar a unidade j de B
6. D_j^x, D_j^y: Dano total recebido pela unidade j de B e A, respectivamente
7. $max(0, .)$: Sem forças negativas
8. n: *step* de tempo discreto

3.5. Equação de Salva - Simulação de Monte Carlo

O modelo é, ainda, capaz de utilizar-se de uma das principais ferramentas de simulação, que é a simulação de Monte Carlo. Dessa forma, o modelo deixa praticamente de ter uma abordagem determinística para uma probabilística.

O modelo divide-se em alguns passos:

Passo 1: Geração de fogos por distribuição de Poisson. Os fogos passam a ter um caráter probabilístico.

$$S_i^{(d)} \sim \text{Poisson}(\lambda_i^{(d)}) \tag{7}$$

Passo 2: Probabilidade de acerto e interceptação.

$$H_{i\to j}^{(d_k\to d_l)} \sim \text{Binomial}\left(S_i^{(d_k)},\ p_{\text{hit},\,i}^{(d_k\to d_l)} \cdot (1 - p_{\text{int},\,j})\right) \tag{8}$$

A probabilidade de acerto e interceptação passa a possuir um caráter segundo uma distribuição binomial.

Passo 3: Atualização das perdas.

$$U_j^{(d_l)}(t+1) = \max\left(0,\ U_j^{(d_l)}(t) - \sum_{d_k} H_{i\to j}^{(d_k\to d_l)}\right) \tag{9}$$

A cada rodada, atualiza-se a disponibilidade de meios da rodada anterior, de acordo com as perdas.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

Passo 4: Probabilidade de intervenção de reforços.

$$P^{(d)}_{\text{reinforce},\,i} = \min\left(0.02 + 0.1 \cdot \left(1 - \frac{\sum_d U_i^{(d)}(t)}{\sum_d U_i^{(d)}(0)}\right),\ 1.0\right) \tag{10}$$

Nessa passo da simulação, é possível definir um *threshold* a partir do qual, com base numa determinada quantidade de perdas, a força que está perdendo receba reforços.

Passo 5: Colapso de Moral.

$$\frac{\sum_d U_i^{(d)}(t)}{\sum_d U_i^{(d)}(0)} < \theta_{\text{morale}} \tag{11}$$

O modelo também é capaz de definir um *threshold* a partir do qual, a depender da quantidade de perdas de uma força, isso passe a contar na capacidade dela de lutar.

Dessa forma, os parâmetros são:

1. $\lambda_i^{(d)}$: Número esperado de salvas disparadas por unidade i no domínio d (média da distribuição de Poisson).
2. $S_i^{(d)}$: Número de salvas efetivamente disparadas pela unidade i no domínio d em uma rodada (variável aleatória de Poisson).
3. $p_{\text{hit},\,i}^{(d_k \to d_l)}$: Probabilidade de que uma salva disparada pela unidade i no domínio d_k acerte um alvo no domínio d_l.
4. $p_{\text{int},\,j}$: Probabilidade de que a unidade alvo j intercepte com sucesso uma salva recebida.
5. $H_{i \to j}^{(d_k \to d_l)}$: Número de acertos bem-sucedidos da unidade i no domínio d_k contra a unidade j no domínio d_l (variável binomial).
6. $U_j^{(d)}(t)$: Quantidade de unidades operacionais do tipo j no domínio d no tempo t.
7. $U_j^{(d)}(0)$: Quantidade inicial de unidades do tipo j no domínio d.
8. $P^{(d)}_{\text{reinforce},\,i}$: Probabilidade de que a unidade i no domínio d receba reforço no tempo t.
9. θ_{morale}: Limite de colapso de moral; se a força total cair abaixo dessa fração, poderá haver colapso.
10. p_{collapse}: Probabilidade de colapso total caso a força esteja abaixo do limiar de moral.
11. N_{sim}: Número total de simulações de Monte Carlo realizadas.
12. T_{max}: Número máximo de rodadas por simulação.

O algoritmo do modelo com simulação de Monte Carlo é:

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

Algoritmo 1: Simulação de Combate com Monte Carlo

Requer: Parâmetros iniciais $\lambda_i^{(d)}, p_{\text{hit}}, p_{\text{int}}, U_i^{(d)}(0), \theta_{\text{morale}}, p_{\text{collapse}}, N_{\text{sim}}, T_{\max}$

para $s \leftarrow 1$ *até* N_{sim} **faça**
  Inicializar $U_i^{(d)}(0)$ para todos os lados e domínios;
  para $t \leftarrow 1$ *até* T_{max} **faça**
    para *cada unidade* i *em todos os domínios* d_k **faça**
      $S_i^{(d_k)} \sim \text{Poisson}(\lambda_i^{(d_k)})$;
    fim
    para *cada par atacante* i *e alvo* j *entre domínios* $d_k \to d_l$ **faça**
      Calcular $p_{\text{eff}} = p_{\text{hit},i}^{(d_k \to d_l)} \cdot (1 - p_{\text{int},j})$;
      $H_{i \to j}^{(d_k \to d_l)} \sim \text{Binomial}(S_i^{(d_k)}, p_{\text{eff}})$;
    fim
    para *cada unidade* j **faça**
      Atualizar $U_j^{(d_l)}(t+1) \leftarrow \max(0, U_j^{(d_l)}(t) - \sum H_{i \to j})$;
    fim
    para *cada lado* i **faça**
      Calcular fração restante $f_i = \frac{\sum_d U_i^{(d)}(t+1)}{\sum_d U_i^{(d)}(0)}$;
      se $f_i < \theta_{morale}$ **então**
        Testar colapso com probabilidade p_{collapse};
        se *colapsar* **então**
          Encerrar lado i;
        fim
      fim
    fim
    para *cada unidade* i **faça**
      Calcular $P_{\text{reforço}} = \min(0.02 + 0.1 \cdot (1 - f_i), 1.0)$;
      Adicionar reforços com essa probabilidade;
    fim
  fim
fim

4. Aplicação

O aplicativo *web* foi desenvolvido utilizando a linguagem de programação Python, com seu *framework* para construção de aplicativos desse tipo chamado *streamlit*, o que facilita bastante não só a codificação dos modelos, como sua implantação. O aplicativo pode ser acessado através do link `https://salvo-equations.streamlit.app/`.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

Ao adentrar o site, o usuário deparar-se-á com a seguinte *landing page*:

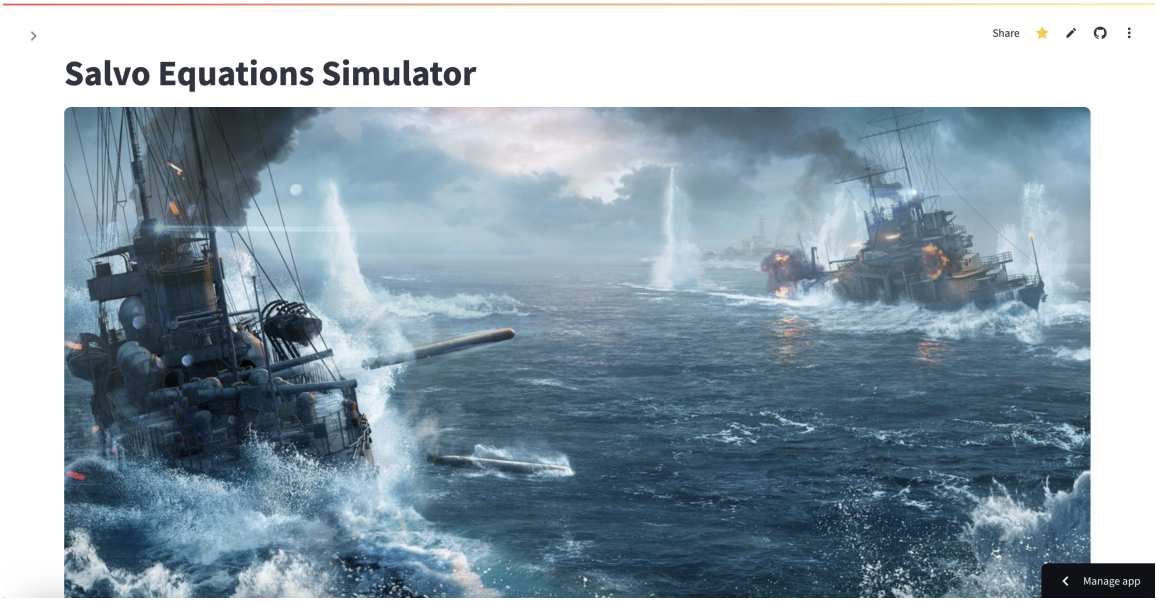


Figura 1: *Landing page* do aplicativo

Na seta no canto superior esquerdo, o usuário pode acessar o menu, onde encontrará os diferentes modelos a serem utilizados:

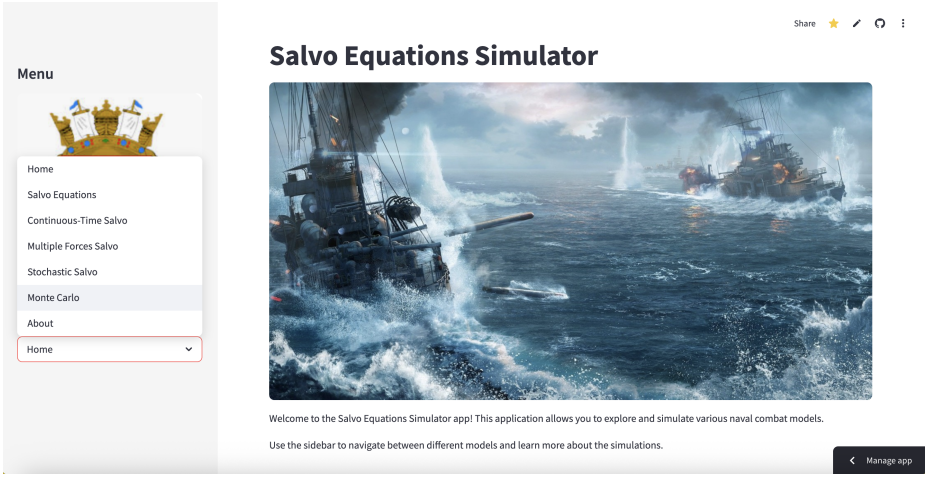


Figura 2: Menu dos modelos

Para efeito de ilustrar a utilização da plataforma, propõe-se simular um embate entre duas forças, utilizando o primeiro modelo, de equações clássicas.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

4.1. Emprego da ferramenta no modo de equações de salva clássicas

No menu lateral, o usuário deverá selecionar a opção "*Salvo Equations*". O usuário deparar-se-á com a seguinte figura:

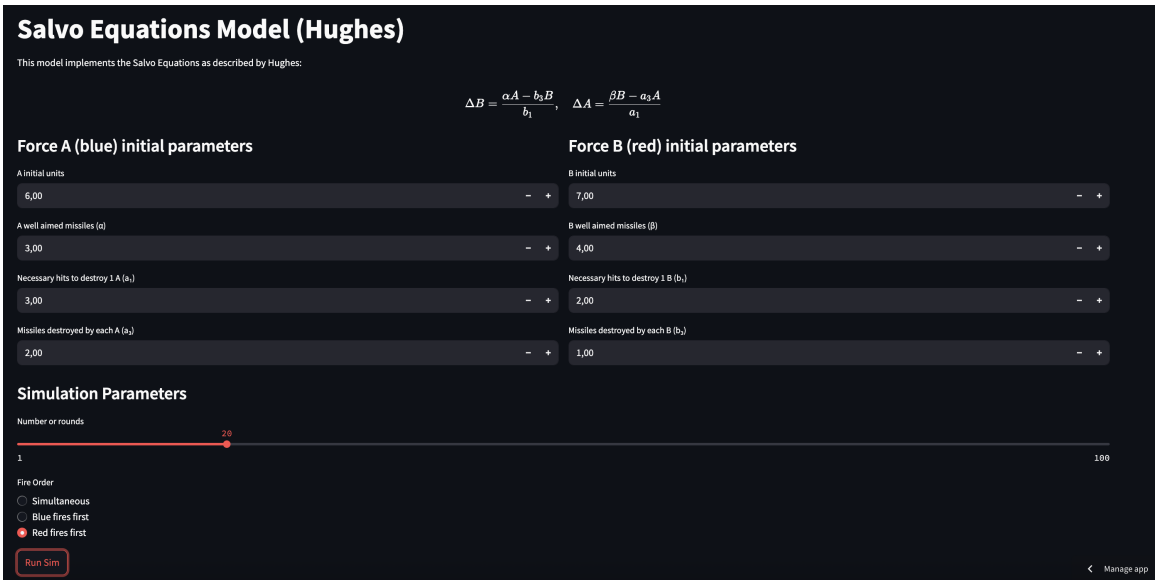


Figura 3: Parâmetros do modelo clássico

Nessa página o usuário é capaz de inserir os valores que quiser nos parâmetros do modelo, bem como roda-lo. O usuário pode definir se a salva é simultânea, ou qual das forças ataca primeiro. A partir dos valores apresentados na figura acima, rodando o modelo para salva simultânea, ao apertar o botão "*Run Simu*", tem-se o seguinte gráfico:

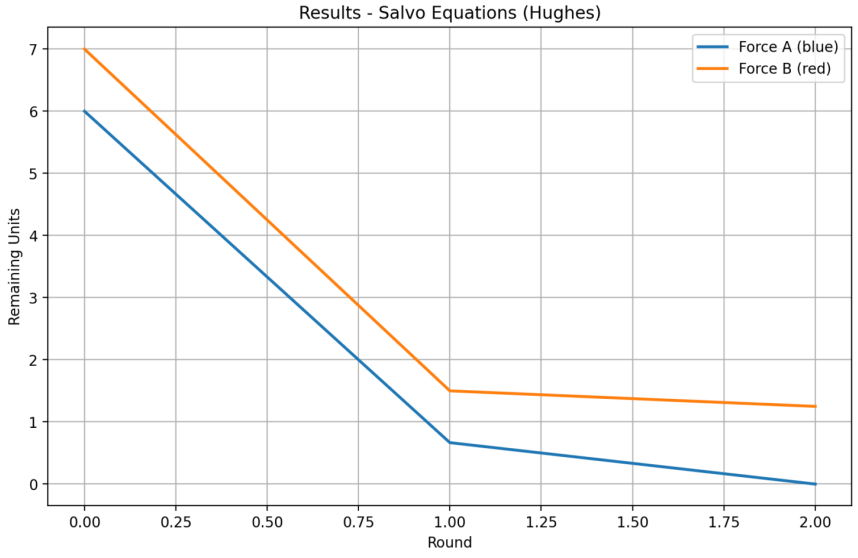


Figura 4: Resultados Força Vermelha vs Força Azul - salva simultânea

O resultado do embate é:

- Força Azul Final: 0

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

- Força Vermelha Final: 1.25

Ou seja: a força azul é dizimada, restando 1.25 unidade da força vermelha.
Para o caso em que azul ataca primeiro, tem-se:

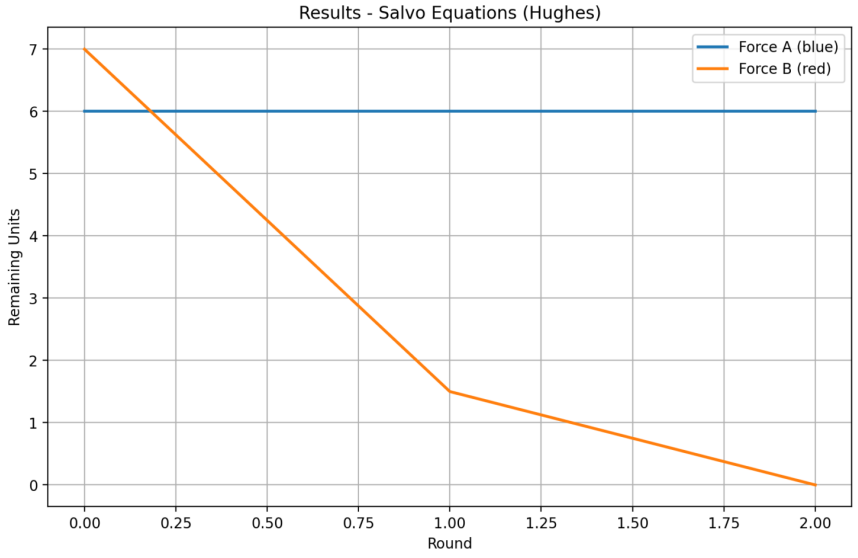


Figura 5: Resultados Força Vermelha vs Força Azul - azul ataca primeiro

Nesse caso, percebe-se vitória de azul, onde ela permanece incólume.
No caso em que vermelho ataca primeiro, tem-se:

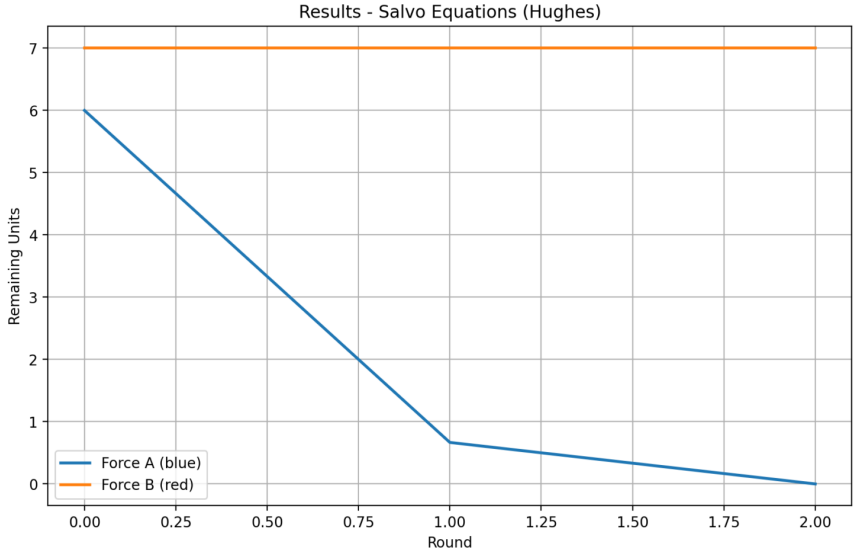


Figura 6: Resultados Força Vermelha vs Força Azul - vermelho ataca primeiro

A vitória de vermelho, nesse caso, é similar à vitória de azul no exercício anterior.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

O usuário pode, ao seu bel-prazer, realizar testes de sensibilidade, ao mudar os parâmetros tanto da força vermelha quanto da azul. Dessa forma, ele pode verificar, na margem, qual parâmetro contribui mais (ou menos), para transpassar o limiar da vitória.

5. Considerações Finais

O artigo visou apresentar uma ferramenta para facilitar o uso das equações de salva, nas suas diferentes configurações.

A exemplo da frase do Capitão de Mar e Guerra Hughes, criador das equações de salva, percebe-se a importância daquilo que ele dizia como "*fire effectively first*", isto é, atire de forma eficiente primeiro. Os modelos matemáticos das equações de salva materializam aquilo que se entende como "iniciativa das ações", que toda ação naval deve buscar. A instância demonstrada no artigo demonstra bem isso, com a força que atirou primeiro saindo incólume do combate, ao passo em que a outra é dizimada.

Ao longo da pesquisa realizada para a escrita deste trabalho, observou-se uma forte lacuna no assunto, mesmo no ambiente acadêmico e científico americano. No Brasil, por conseguinte, trata-se de um trabalho inédito. Ademais, em virtude do falecimento do CMG Hughes em 2019 (que não só é o criador do conceito, mas seu principal propagandista),

A exemplo do que é proposto por Mahon [2007], os parâmetros das equações de salva podem ser modificados, levando em conta aspectos como treinamento das tripulações, capacidade de ocultação das forças navais, etc.

O fato da ferramenta encontrar-se no ambiente *web* facilita sobremaneira o seu uso e adoção. Ademais, o intuito da construção foi modular, de modo que é possível serem inseridos diferentes modalidades da equação de salva no futuro, bem como incrementar as já existentes.

Em que pese não fique demonstrada nesse trabalho a utilização dos demais modelos das equações de salva, fica o convite para o leitor que o faça, mediante uso da plataforma *web*.

Como sugestão de trabalhos futuros, faz-se necessário acompanhar e/ou conseguir dados de operações reais, de modo a verificar se a utilização das referidas equações é de valia, bem como tem aderência. E, no contexto da MB, o conceito das Equações de Salva pode ser utilizado nos diversos exercícios e planejamentos de operações.

Referências

Armstrong, M. J. (2004). Effects of lethality in naval combat models. *Naval Research Logistics (NRL)*, 51(1):28–43. ISSN 0894-069X.

Armstrong, M. J. (2013). The salvo combat model with area fire. *Naval Research Logistics (NRL)*, 60(8):652–660. ISSN 0894069X.

Armstrong, M. J. (2014). The salvo combat model with a sequential exchange of fire. *Journal of the Operational Research Society*, 65(10):1593–1601. ISSN 0160-5682.

de Almeida, I. D. P., de Araújo Costa, I. P., de Araújo Costa, A. P., de Pina Corriça, J. V., Lellis Moreira, M. , Simões Gomes, C. F., e dos Santos, M. (2022). A multicriteria decision-making approach to classify military bases for the Brazilian Navy. *Procedia Computer Science*, 199: 79–86. ISSN 18770509.

de Souza, Y. L., Moreira, M. L., Silva, B. T. R. V., Belderrain, M. C. N., Cerqueira, C. S., dos Santos, M., e Gomes, C. F. S. (2022). Multimethodology Exploitation Based on Value-Focused Thinking: Drones Feasibility Analysis for National Defense. p. 245–256.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br

Hillier, F. S. e Lieberman, G. J. (2001). *Introduction to Operations Research*. McGraw-Hill, New York, NY, USA, seventh edition.

Hughes, W. P. (1995). A salvo model of warships in missile combat used to evaluate their staying power. *Naval Research Logistics*, 42(2):267–289. ISSN 0894069X.

Logullo, Y., Bigogno-Costa, V., Silva, A. C. S. d., e Belderrain, M. C. (2022). A prioritization approach based on VFT and AHP for group decision making: a case study in the military operations. *Production*, 32. ISSN 1980-5411.

Lucas, T. W. e McGunnigle, J. E. (2003). When is model complexity too much? Illustrating the benefits of simple models with Hughes' salvo equations. *Naval Research Logistics*, 50(3):197 – 217. ISSN 0894069X. URL https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0037385919&doi=10.1002%2fnav.10062&partnerID=40&md5=2aebe7576b3e700dcaa927febdcd7aa6.

Mahan, A. T. (2010). *The Influence of Sea Power upon History, 1660–1783*. Cambridge University Press. ISBN 9781108023719.

Mahon, C. M. (2007). A littoral combat model for land-sea missile engagements. Technical report. URL http://hdl.handle.net/10945/3274.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212647
https://proceedings.science/p/212647?lang=pt-br