

O PROBLEMA DO CAIXEIRO VIAJANTE DEPENDENTE DO TEMPO DE VIAGEM

Nathan Batistelli de Oliveira

Instituto Federal de Santa Catarina - IFSC
Avenida Nereu Ramos 3450D, Bairro Seminário, Chapecó, SC
nathan.bo10@aluno.ifsc.edu.br

Eduardo Paz Putti

Instituto Federal de Santa Catarina - IFSC
Avenida Nereu Ramos 3450D, Bairro Seminário, Chapecó, SC
eduardo.p2005@aluno.ifsc.edu.br

Carise Elisane Schmidt

LABICON, Instituto Federal de Santa Catarina - IFSC
Avenida Nereu Ramos 3450D, Bairro Seminário, Chapecó, SC
carise.schmidt@ifsc.edu.br

RESUMO

Este estudo aborda o Problema do Caixeiro Viajante com custos de viagem variáveis ao longo do horizonte de planejamento, que buscam modelar o efeito do congestionamento do tráfego em diferentes períodos do dia. São apresentados dois modelos matemáticos de programação linear inteira mista, reforçados com desigualdades válidas. Essas abordagens de resolução são avaliadas e comparadas em instâncias geradas a partir de dados reais de tráfego, que consideram a dinâmica de trânsito que ocorre em grandes centros urbanos. Os testes computacionais foram conduzidos com a inclusão de uma solução inicial, gerada heurísticamente, e avaliados considerando ou não a inclusão das desigualdades válidas. Os resultados mostram que ambas as formulações são capazes de produzir soluções médias semelhantes em relação ao tempo total de deslocamento, dado um contexto que envolve congestionamento. Contudo, em relação aos limitantes inferiores, uma das abordagens apresentou melhoria de quase 11% em relação à outra.

PALAVRAS CHAVE. Modelo matemático, Congestionamento, Tráfego urbano.

Tópicos: L&T – Logística e Transportes

ABSTRACT

This study addresses the Traveling Salesman Problem with varying travel costs over the planning horizon, aiming to model the effects of traffic congestion at different times of day. Two mixed-integer linear programming models, strengthened by valid inequalities, are presented. These solution approaches are evaluated and compared on a set of instances derived from real traffic data, reflecting the dynamics encountered in large urban centers. Computational experiments were conducted using a heuristic initial solution and were carried out both with and without valid inequalities. The results show that, in a congestion-aware context, both formulations yield similar average solutions in terms of total travel time. However, with respect to the lower bounds, one approach achieved an improvement of almost 11% over the other.



KEYWORDS. Mathematical model, Congestion, Urban traffic.

Paper topics: L&T – Logistic and Transportation

1. Introdução

O crescente aumento do tráfego urbano, aliado com a frequente limitação da estrutura viária existente, compromete a eficiência do fluxo de veículos em grandes centros [Montero et al., 2017]. Isso resulta em congestionamentos e impacta negativamente a mobilidade urbana, uma vez que reduz a velocidade média de deslocamento, aumentando o tempo de viagem.

Nesse contexto, o transporte urbano de mercadorias ainda enfrenta desafios específicos, que agravam a ineficiência logística e tornam o planejamento de rotas ainda mais desafiador [Grazia Speranza, 2018]. Regulamentações específicas para alguns veículos de carga podem restringir a sua circulação em certos horários do dia e limitar seu acesso à áreas centrais, por exemplo. Outro desafio comum é a escassez de espaços adequados para estacionamento e operações de carga e descarga. Combinada com essas questões, a complexidade do planejamento de rotas ainda é acentuada pelas variações no tempo de viagem entre entregas, causadas principalmente pela dinâmica do tráfego [Montero et al., 2017]. Tais restrições, associadas à necessidade de cumprir os prazos de entrega, podem comprometer ou impor custos adicionais às operações logísticas.

Observar a dinâmica de tráfego e considerá-la no planejamento das rotas é uma estratégia que pode ser usada para reduzir os riscos e impactos negativos no transporte de mercadorias [Schmidt et al., 2019]. A preocupação com o tempo de deslocamento no planejamento de rotas não é nova. Um exemplo é o trabalho de Lucena [1990], que aborda o caso de um entregador que atende diferentes cidades, onde o tempo de deslocamento é tratado de forma discreta e dependente da posição da cidade na rota.

Ao modelar tempos de deslocamento, nem todos os fatores que geram o congestionamento são previsíveis. Efeitos pontuais causados pelo clima ou por acidentes são um exemplo disso [Malandraki e Dial, 1996]. Contudo, habitualmente, a maior intensidade de veículos está concentrada em alguns períodos do dia (horários de pico) e sua ocorrência frequentemente está relacionada a algum sentido de deslocamento ou zona específicos [Kok et al., 2012]. Mapeando essas flutuações no fluxo de veículos, é possível planejar a execução das rotas visando a redução do tempo total de viagem, ao invés de reduzir apenas a distância total percorrida [Jaballah et al., 2021].

Este estudo envolve o Problema do Caixeiro Viajante dependente do Tempo de Viagem [Malandraki e Daskin, 1992; Malandraki e Dial, 1996], uma generalização do clássico Problema do Caixeiro Viajante. Nele, a premissa de velocidade constante que existe na versão clássica do problema não é considerada. Em vez disso, velocidade e, consequentemente, tempo de deslocamento são influenciados pelas condições de tráfego, ou seja, o custo em cada arco pode variar conforme o horário do dia e o sentido do deslocamento. Com essa inclusão da dependência de tempo, o problema busca contemplar condições mais realistas, especialmente quando aplicadas ao roteamento em grandes centros urbanos [Montero et al., 2017; Arigliano et al., 2018].

O tempo é uma variável contínua, de forma que, em redes reais de tráfego a propriedade FIFO (“*first-in – first-out*”) é respeitada de forma inerente [Ichoua et al., 2003]. Contudo, essa mesma premissa não se aplica, necessariamente, quando o tempo de deslocamento é discretizado em intervalos. Neste estudo, o modelo LTM (*Link Travel Model*) é aplicado [Cooke e Halsey, 1966]. Ele considera que, durante a travessia de um arco, a velocidade de deslocamento é constante, sendo definida pelo momento de início dessa travessia. Logo, ele não respeita a propriedade FIFO e a desigualdade triangular. No entanto, a utilização de dados reais de tráfego na geração das instâncias, pré-processados a partir da velocidade observada, produz um grafo cujos tempos respeitam essa propriedade, independente do método aplicado. Além disso, embora o modelo não garanta o atendimento da propriedade, ele é amplamente utilizado em ambientes urbanos e apresenta bons resultados em situações de tráfego mais intenso, tendo apresentado desempenho semelhante a modelos mais complexos [Jaballah et al., 2023].

Considerar o efeito do congestionamento do tráfego em problemas de roteamento, além de exigir novas abordagens de solução para tratá-los [Gendreau et al., 2015], também amplia a complexidade da sua resolução [Vidal et al., 2021; Schmidt et al., 2023]. Neste estudo, propõe-se a análise do desempenho de dois modelos matemáticos para resolução do Problema do Caixeiro Viajante dependente do Tempo usando, para isso, instâncias baseadas em dados reais de tráfego. Ambas as formulações são adaptações de dois modelos amplamente conhecidos na literatura para problemas clássicos de roteamento, onde a dependência de tempo foi integrada.

A partir das próximas seções, o artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, o problema é descrito e são apresentadas duas formulações matemáticas, adaptadas para tratar da dependência de tempo. A condução dos experimentos computacionais é detalhada na Seção 3, onde também são descritas as instâncias de testes e o algoritmo usado para geração de uma solução inicial. Na Seção 4 são apresentados os resultados dos testes computacionais, incluindo um comparativo entre as abordagens propostas. Por fim, na Seção 5, são apresentadas as conclusões.

2. Descrição do problema e formulação

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado, onde $V = \{0, 1, 2, \dots, n, n+1\}$ representa o conjunto de vértices e $A = \{(i, j) \in V \times V : i \neq j\} \setminus \{(i, 0), (n+1, j)\}$ representa o conjunto de arcos. Considere que o vértice inicial $0 \in V$ represente o depósito, e que o vértice final $n+1 \in V$ seja fictício, denominado de terminal e caracterizado como uma cópia do depósito. Seja V_c o subconjunto de vértices de V que representa todos os clientes que demandam atendimento, isso é, $V_c = V \setminus \{0, n+1\}$. Para cada cliente $i \in V$ está associado um tempo de serviço s_i não nulo.

O grafo G é dependente do tempo, ou seja, conforme mudam as condições de tráfego, o tempo de deslocamento em um arco $(i, j) \in A$ também varia. Seja $H = 0, 1, 2, \dots, m$ um conjunto de $m+1$ intervalos de tempo de igual comprimento $\bar{T}$, que caracterizam o horizonte de planejamento. Para cada intervalo $h \in H$, as condições de tráfego são consideradas constantes. A cada arco $(i, j) \in A$ é associado um tempo de deslocamento determinístico t_{ijh} , vinculado a cada $h \in H$.

Sabendo que todos os clientes precisam ser servidos uma única vez, e que a rota deve iniciar no depósito no início do horizonte de planejamento, e finalizar no terminal, o objetivo é minimizar o tempo total de deslocamento. A seguir, são apresentados dois modelos de programação linear inteira mista, adaptados da literatura para considerar a dependência de tempo.

2.1. Modelo clássico MTZ

Um modelo clássico para o Problema do Caixeiro Viajante assimétrico foi proposto por Miller et al. [1960]. A partir desse modelo, a formulação (1) – (17) incorpora a dependência de tempo durante o deslocamento. Para isso, são definidas as variáveis binárias: x_{ijh} assume valor 1 caso o arco $(i, j) \in A$ seja atravessado no intervalo $h \in H$, e 0 caso contrário; z_{ij} assume valor 1 caso o arco $(i, j) \in A$ seja atravessado, e 0 caso contrário; y_{ih} assume valor 1 caso a saída no vértice $i \in V$ ocorra no intervalo $h \in H$, e 0 caso contrário. A variável contínua e não negativa a_i representa o tempo acumulado até a saída (ou chegada) no vértice $i \in V$, com $a_0 = 0$ uma vez que o início da rota coincide com o início do horizonte de planejamento. u_i é uma variável auxiliar, contínua e não negativa, associada a cada vértice $i \in V$.

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{h \in H} x_{ijh} t_{ijh}, \quad (1)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0, i\}} z_{ij} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{n+1\}, \quad (2)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{i, n+1\}} z_{ij} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (3)$$

$$u_i - u_j + n \cdot z_{ij} \leq n - 1, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (4)$$

$$0 \leq u_i \leq n, \quad \forall i \in V, \quad (5)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0, n+1\}} x_{0j0} = 1, \quad (6)$$

$$\sum_{h \in H} x_{ijh} = z_{ij}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (7)$$

$$x_{ijh} \leq y_{ih}, \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in H, \quad (8)$$

$$\sum_{h \in H} y_{ih} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{n+1\}, \quad (9)$$

$$a_i + s_j + t_{ijh} - 2\bar{T}|H|(1 - x_{ijh}) \leq a_j \leq a_i + s_j + t_{ijh} + \bar{T}|H|(1 - x_{ijh}), \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in H, \quad (10)$$

$$\bar{T} \sum_{h \in H} h y_{ih} \leq a_i < \bar{T} \sum_{h \in H} (h+1) y_{ih}, \quad \forall i \in V \setminus \{0, n+1\}, \quad (11)$$

$$a_{m+1} < \bar{T}|H|, \quad (12)$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (13)$$

$$y_{ih} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in V \setminus \{n+1\}, \quad (14)$$

$$x_{ijh} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in H, \quad (15)$$

$$a_i \in \mathbf{R}_+, \quad \forall i \in V, \quad (16)$$

$$u_i \in \mathbf{R}_+, \quad \forall i \in V. \quad (17)$$

A função objetivo, expressa em (1), minimiza o tempo total de deslocamento da rota. As restrições (2) e (3) garantem que cada vértice seja visitado exatamente uma vez, enquanto os conjuntos (4) e (5) evitam subciclos. A restrição (6) assegura que a rota comece no depósito no início do horizonte de planejamento. Cada arco pertencente a rota é atravessado em um único intervalo de tempo, conforme imposto pelas restrições (7). Restrições (8) garantem que, se um arco pertencente a rota é atravessado em um dado intervalo de tempo, então esse é o intervalo considerado no momento de início dessa travessia. Restrições (9) asseguram que um único intervalo de tempo esteja associado com o momento de saída no depósito e em cada cliente. Usando as restrições

(10), é possível controlar o momento de saída no depósito e em cada cliente, enquanto as restrições (11) vinculam esse momento aos intervalos subsequentes, e (12) assegura que a rota seja executada dentro do horizonte de planejamento. Por fim, as restrições (13) – (17) definem o domínio das variáveis de decisão.

Para complementar o modelo matemático, visando melhorar o limitante inferior, também é apresentada uma desigualdade válida, expressa por (18).

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{h \in H} x_{ijh} \geq L. \quad (18)$$

O termo L , presente na desigualdade válida (18), representa a soma dos menores tempos de deslocamento, em qualquer intervalo, saindo do depósito e em cada um dos clientes em direção a qualquer outro cliente ou terminal definido em A . Isso é, $L = \min_{j \in V_c} t_{0j0} + \sum_{i \in V_c} \min_{j \in V \setminus \{0, i\}} \min_{h \in H} t_{ijh}$.

2.2. Modelo de fluxo de duas commodities

A partir dos modelos baseados em fluxos de duas commodities para problemas de roteamento de veículos Baldacci et al. [2003, 2004], também é possível incorporar a dependência de tempo, conforme formulação (19) – (33). Sejam χ_{ijh} uma variável binária que assume valor 1 caso o arco $(i, j) \in A$ seja atravessado no intervalo $h \in H$, e 0 caso contrário; w_{ij} , $i, j \in V \setminus \{0, n+1\}$, $i \neq j$ são variáveis contínuas e não negativas de fluxo, que definem dois caminhos de fluxo para cada rota de solução, sendo um do depósito em direção ao terminal e outro do terminal em direção ao depósito; e a_i é uma variável contínua e não negativa, que representa o tempo acumulado até a saída (ou chegada) no vértice $i \in V$, com $a_0 = 0$.

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{h \in H} \chi_{ijh} t_{ijh}, \quad (19)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0, n+1\}} \chi_{0j0} = 1, \quad (20)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{0, i\}} \sum_{h \in H} \chi_{ijh} = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0, n+1\}, \quad (21)$$

$$\sum_{i \in V \setminus \{i, n+1\}} \sum_{h \in H} \chi_{ijh} = 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (22)$$

$$\sum_{j \in V} (w_{ji} - w_{ij}) = 2, \quad \forall i \in V \setminus \{0, n+1\}, \quad (23)$$

$$\sum_{j \in V_c} w_{0j} = n - 1, \quad (24)$$

$$\sum_{j \in V_c} w_{j0} = 0, \quad (25)$$

$$\sum_{j \in V_c} w_{nj} = n - 1, \quad (26)$$

$$w_{ij} + w_{ji} = (n - 1) \sum_{h \in H} (\chi_{ijh} + \chi_{jih}), \quad \forall (i, j) \in A, \quad (27)$$

$$a_i + s_j + t_{ijh} - 2\bar{T}|H|(1 - \chi_{ijh}) \leq a_j \leq a_i + s_j + t_{ijh} + \bar{T}|H|(1 - \chi_{ijh}), \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in H, \quad (28)$$

$$\bar{T} \sum_{j \in V \setminus \{0\}} \sum_{h \in H} h \chi_{ijh} \leq a_i < \bar{T} \sum_{j \in V \setminus \{0\}} \sum_{h \in H} (h + 1) \chi_{ijh}, \quad \forall i \in V \setminus \{0, n + 1\}, \quad (29)$$

$$a_{n+1} < \bar{T}|H|, \quad (30)$$

$$w_{ij} \in \mathbf{R}, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (31)$$

$$\chi_{ijh} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A, \forall h \in H, \quad (32)$$

$$a_i \in \mathbf{R}_+, \quad \forall i \in V, \quad (33)$$

Como no modelo prévio, a função objetivo expressa em (19), minimiza o tempo total de deslocamento da rota. As restrições (20) – (22) garantem que cada vértice seja visitado exatamente uma vez, e em um único intervalo de tempo. Restrições (23) – (26) definem um padrão de fluxo factível para duas commodities saindo da origem até o terminal. Note que, neste contexto, as commodities estão associadas com o número de clientes. Uma representa os clientes que já foram atendidos enquanto a outra indica aqueles que ainda falta atender. As restrições (27) asseguram que a soma dos fluxos das duas commodities seja igual ao número total de clientes da rota. Usando as restrições (28), é possível controlar o momento de saída no depósito e em cada cliente, enquanto as restrições (29) vinculam esse momento aos intervalos subsequentes, e (30) assegura que a rota seja executada dentro do horizonte de planejamento. Por fim, restrições (31) – (33) definem o domínio das variáveis de decisão.

Assim como no modelo anterior, uma desigualdade válida é apresentada para o complementar o modelo matemático, expressas por (34). Novamente, L representa a soma dos menores tempos de deslocamento, em qualquer intervalo, saindo do depósito e em cada um dos clientes em direção a qualquer outro cliente ou terminal.

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{h \in H} \chi_{ijh} \geq L. \quad (34)$$

3. Experimentos computacionais

Ambos os modelos foram implementados na linguagem C++ e a versão acadêmica do *solver* Gurobi Optimizer 11.0 foi usada para resolvê-los. Todos os testes computacionais foram conduzidos em um processador AMD Ryzen 7, com 8 núcleos e 4,1 GHz de frequência, 32 GB de memória RAM instalada, executando em sistema operacional Windows 11.

Um limite de tempo de processamento de 3600 segundos foi aplicado a cada instância de teste, em cada modelo. Ambos foram testados com e sem a inclusão da desigualdade válida. Em todos os testes, uma solução inicial factível, gerada heurísticamente, foi fornecida. Ao final do teste, foram obtidos: a melhor solução, o limitante inferior, o *gap* entre a melhor solução e o limitante inferior, e o tempo de processamento (s).

3.1. Instâncias de teste

Um conjunto de instâncias, baseado em dados reais de tráfego, foi adaptado para o problema em estudo, a partir de Schmidt et al. [2019]. Algumas instâncias originais contemplam mais de um depósito. Neste caso, apenas o primeiro vértice foi considerado depósito e os demais transformados em clientes. Dessa forma, o conjunto contempla instâncias com 10, 12, 14, 20, 22, 24, 50, 52, 54, 80, 82, 84, 100, 102 e 104 clientes.

Para cada cliente é considerado um tempo de serviço. Esse tempo de serviço também foi adaptado, uma vez que a grande maioria das instâncias não apresentava solução, pois foi projetada considerando múltiplas rotas de veículo. Nessa adaptação, o tempo de serviço foi gerado aleatoriamente a partir do intervalo de inteiros $[m, M]$, com os limitantes m e M definidos conforme o número de clientes. Para instâncias com 10, 12 ou 14 clientes, o tempo de serviço $s_i, i \in V_c$ pertence ao intervalo $[1800, 2700]$; para 20, 22 ou 24 clientes, ele está dentro do intervalo $[900, 1500]$; para 50, 52 e 54 clientes, no intervalo $[360, 600]$; para 80, 82 e 84 clientes, no intervalo $[180, 360]$; e para 100, 102 e 104 clientes, ele está dentro do intervalo $[120, 240]$.

Para cada um desses cinco grupos de instância, há ainda três variações consideradas no tamanho do intervalo de tempo, de forma que o horizonte de planejamento foi particionado em 5, 10 e 15 intervalos distintos e de mesmo comprimento, totalizando sempre 54000 segundos. Para cada uma dessas configurações, há 5 instâncias distintas, totalizando assim um conjunto de 225 instâncias de teste.

3.2. Geração de uma solução inicial

Considerando a complexidade do problema, e buscando a geração de soluções factíveis para todas as instâncias, optou-se por fornecer uma solução inicial ao *solver*. Para isso, a heurística do Vizinho Mais Próximo foi adaptada ao problema. Por conta da dependência de tempo, a heurística foi implementada conforme segue.

A rota de solução inicia no depósito. Em seguida, partindo dele, o algoritmo buscou pelo cliente mais próximo (menor tempo de deslocamento), considerando o primeiro intervalo de tempo h . Após encontrá-lo, ele é inserido na rota e o tempo de deslocamento acumulado é calculado, com a finalidade de identificar o intervalo de tempo correspondente. Identificado esse intervalo, o próximo cliente “mais próximo” é localizado avaliando apenas o tempo de deslocamento entre o cliente anterior e ele no intervalo h atualizado. Quando encontrado, o cliente é adicionado à rota e o tempo de deslocamento acumulado computado novamente, assim como atualizado o intervalo de tempo h . O processo segue usando a mesma dinâmica até que o último cliente seja inserido na rota, seguido pelo terminal.

4. Resultados computacionais

Para a apresentação dos resultados, as instâncias foram agrupadas conforme o número de clientes e também conforme o número de intervalos de tempo distintos. Em relação ao número de clientes, foram criados cinco grupos. O primeiro contempla as instâncias com 10, 12 e 14 clientes; o segundo com 20, 22 e 24 clientes; o terceiro com 50, 52 e 54 clientes; o quarto com 80, 82 e 84 clientes; e o quinto com 100, 102 e 104 clientes. Em relação ao número de intervalos de tempo, foram criados três grupos, relativos às instâncias que contemplam 5 intervalos de 10800 segundos, 10 intervalos de 5400 segundos, e 15 intervalos de 3600 segundos.

A Tabela 1 apresenta os resultados gerados com o modelo matemático (1) – (17), sem e com a inserção da desigualdade válida (18). Os resultados de cada linha representam a média de 15 instâncias, conforme agrupamento por número de clientes e de intervalos de tempo. As duas primeiras colunas indicam, respectivamente, o número de intervalos de tempo $|H|$ e de clientes n . Em seguida, é informada a solução inicial gerada heurísticamente (SI). Os resultados gerados pelo modelo matemático, sem a inclusão da desigualdade válida são apresentados na sequência.

Primeiramente, o limitante superior (LS), seguido pelo limitante inferior (LI), pelo tempo de processamento (tempo) e pela melhoria percentual do limitante superior em relação à solução inicial (LS/SI). Em seguida, essa mesma sequência de informações é apresentada considerando a inserção da desigualdade válida. Por fim, a última coluna indica a melhoria percentual gerada no limitante inferior quando a desigualdade válida é inserida, em relação ao caso onde ela não é usada.

Tabela 1: Resultados médios para o modelo matemático da Seção 2.1, com inserção de solução inicial

$ H $	n	SI	Sem desigualdade válida				Com desigualdade válida				Melhoria (%)
			LS	LI	Tempo(s)	LS/SI (%)	LS	LI	Tempo(s)	LS/SI (%)	LI
5	[10, 14]	9046,27	8125,53	8047,33	668	10,10	8125,53	8054,47	650	10,10	0,09
	[20, 24]	13136,60	11731,13	10300,53	3600	10,55	11729,40	10323,20	3600	10,52	0,21
	[50, 54]	21668,87	20716,67	14824,87	3602	4,32	20703,67	14872,13	3602	4,38	0,30
	[80, 84]	26807,33	25579,40	17906,33	3601	4,58	25688,80	17950,47	3602	4,07	0,25
	[100, 104]	27507,60	26664,47	18694,33	3603	3,32	26464,07	18762,00	3604	4,02	0,35
Média		19633,33	18563,44	13954,68	3015	6,57	18542,29	13992,45	3011	6,62	0,24
10	[10, 14]	9205,20	8193,80	8126,27	708	10,71	8193,80	8131,40	527	10,71	0,05
	[20, 24]	13601,40	12382,87	10084,80	3600	8,48	12278,33	10127,33	3601	9,22	0,45
	[50, 54]	22109,73	21578,27	14653,80	3601	2,36	21459,73	14675,40	3602	2,88	0,15
	[80, 84]	27275,33	26508,00	17808,00	3601	2,78	26447,33	17885,73	3602	2,98	0,42
	[100, 104]	28220,00	27436,07	18803,27	3601	2,88	27388,60	18757,07	3602	3,04	-0,24
Média		20082,33	19219,80	13895,23	3022	5,44	19153,56	13915,39	2987	5,76	0,17
15	[10, 14]	9368,13	8300,80	8083,07	1277	11,34	8298,93	8096,80	1212	11,36	0,14
	[20, 24]	13662,13	12438,87	9937,53	3600	8,46	12458,07	9926,87	3600	8,40	-0,09
	[50, 54]	22060,33	21505,20	14694,60	3601	2,55	21512,47	14690,27	3601	2,49	-0,01
	[80, 84]	27054,00	26491,87	17673,67	3604	2,02	26506,53	17632,07	3607	2,00	-0,24
	[100, 104]	28411,60	27829,80	18605,60	3604	2,17	27937,13	18580,93	3607	1,86	-0,11
Média		20111,24	19313,31	13798,89	3137	5,31	19342,63	13785,39	3126	5,22	-0,06
Média global		19942,30	19032,18	13882,93	3058	5,77	19012,83	13897,74	3041	5,87	0,12

Os resultados reportados na Tabela 1 mostram que, conforme aumenta o número de clientes e o número de intervalos de tempo das instâncias testadas, a capacidade do modelo da Seção 2.1 melhorar a solução inicial vai reduzindo, considerando a limitação imposta no tempo de processamento imposto. A melhoria média é de 5,77% e 5,87%, respectivamente, sem e com a inserção da desigualdade válida. Observa-se ainda que a inclusão dessa restrição melhora levemente o limitante superior médio, que cai de 19032 para 19013. Isso é influenciado especialmente pelos resultados dos casos onde há 5 ou 10 intervalos de tempo. Não houve redução significativa no limitante inferior médio (0,12%), assim como no tempo médio de processamento que, exceto para instâncias com 10, 12 ou 14 clientes, equivale ao limite imposto ao *solver*.

Na Tabela 2 são exibidos os resultados gerados com o modelo matemático (19) – (33), sem e com a inserção da desigualdade válida (34). Assim como na tabela anterior, cada linha indica a média de 15 instâncias, agrupadas por número de intervalos de tempo $|H|$ e de clientes n . Essas duas informações constam, respectivamente, nas duas primeiras colunas. A solução inicial (SI) é informada na sequência, sucedida pelos resultados gerados com o modelo matemático, sem a inclusão da desigualdade válida. São exibidos, nesta ordem, o limitante superior (LS), o limitante inferior (LI), o tempo de processamento (tempo) e a melhoria percentual do limitante superior em relação à solução inicial (LS/SI). Na sequência, essa mesma ordem de informações é apresentada para o caso onde a desigualdade válida é inserida. Finalmente, a última coluna indica a melhoria percentual gerada no limitante inferior quando a desigualdade válida é inserida, em relação ao caso onde ela não é usada.

De acordo com os resultados da Tabela 2, para o modelo da Seção 2.2 também há uma tendência de redução na melhoria do limitante superior em relação à solução inicial, conforme aumenta o número de clientes e de intervalos de tempo. Para esse modelo, a melhoria média é de

Tabela 2: Resultados médios para o modelo matemático da Seção 2.2, com inserção de solução inicial

H	n	SI	Sem desigualdade válida				Com desigualdade válida				Melhoria (%)	
			LS	LI	Tempo(s)	LS/SI (%)	LS	LI	Tempo(s)	LS/SI (%)	LI	
5	[10, 14]	9046,27	8125,53	8125,53	120	10,10	8125,53	8125,53	112	10,10	0,00	
	[20, 24]	13136,60	11897,87	10792,47	3382	9,22	11875,53	10792,40	3421	9,45	0,02	
	[50, 54]	21668,87	20445,00	15649,07	3601	5,56	20586,53	15647,87	3600	4,88	-0,01	
	[80, 84]	26807,33	25237,20	18875,53	3602	5,84	24941,07	18885,40	3602	6,92	0,07	
	[100, 104]	27507,60	26242,67	19377,60	3605	4,87	26126,40	19371,73	3602	5,26	-0,05	
Média		19633,33	18389,65	14564,04	2862	7,12	18331,01	14564,59	2868	7,32	0,01	
10	[10, 14]	9205,20	8193,80	8170,93	430	10,71	8193,80	8167,47	381	10,71	-0,03	
	[20, 24]	13601,40	12468,00	10491,27	3600	7,76	12256,20	10574,40	3600	9,35	0,80	
	[50, 54]	22109,73	21348,53	15498,13	3601	3,42	21256,93	15543,93	3600	3,78	0,29	
	[80, 84]	27275,33	26343,93	18549,13	3604	3,39	26347,07	18370,07	3607	3,34	-0,87	
	[100, 104]	28220,00	27506,00	18572,27	3656	2,72	27339,73	18573,13	3637	3,40	-0,03	
Média		20082,33	19172,05	14256,35	2978	5,60	19078,75	14245,80	2965	6,12	0,03	
15	[10, 14]	9368,13	8330,60	8216,53	1273	11,08	8358,80	8218,53	1259	10,83	-0,01	
	[20, 24]	13662,13	12591,00	10303,33	3601	7,47	12611,00	10348,27	3601	7,32	0,47	
	[50, 54]	22060,33	21026,33	15464,13	3601	4,66	21215,20	15392,07	3607	3,81	-0,47	
	[80, 84]	27054,00	26353,60	18262,13	3609	2,56	26406,73	18129,53	3615	2,36	-0,69	
	[100, 104]	28411,60	27641,93	18353,27	3606	2,97	27571,00	18352,73	3607	3,05	0,07	
Média		20111,24	19188,69	14119,88	3138	5,75	19232,55	14088,23	3138	5,47	-0,13	
Média global		19942,30	18916,80	14313,42	2993	6,15	18880,77	14299,54	2990	6,30	-0,03	

6,15% e 6,30%, respectivamente, sem e com a inserção da desigualdade válida. Observa-se ainda que a inclusão dessa restrição melhora levemente o limitante superior médio, que cai de 18917 para 18881. Novamente, isso é influenciado especialmente pelos resultados das instâncias com 5 ou 10 intervalos de tempo. O limitante inferior médio praticamente não varia, assim como o tempo médio de processamento, onde o limite imposto ao *solver* é atingido para todas as instâncias com 20 ou mais clientes.

Por fim, a Tabela 3 apresenta um comparativo entre os resultados dos dois modelos matemáticos, ambos considerando a inserção da desigualdade válida. Os resultados são apresentados agrupando as instâncias da mesma forma que foi exibido nas tabelas anteriores. Para facilitar a comparação, algumas informações previamente apresentadas serão reexibidas nesta tabela. O limitante superior (LS), o *gap* entre os limitantes inferior e superior, e o tempo de processamento são apresentados, primeiramente para o modelo da Seção 2.1 e, na sequência, para o modelo da Seção 2.2. Em seguida, são reportadas as melhorias percentuais do segundo modelo em relação ao primeiro, para cada uma dessas medidas.

O comparativo da Tabela 3 mostra que, em geral, o modelo baseado no fluxo de duas commodities produziu limitantes superiores levemente menores (18881 contra 19013). A redução foi, em média, de 0,42% quando comparado ao primeiro modelo. No entanto, houve uma redução significativa no *gap* médio entre os limitantes inferior e superior (10,93%). Como a melhoria em relação ao limitante superior não foi significativa, esse resultado indica que o segundo modelo foi mais eficiente em melhorar o limitante inferior, reduzindo assim o *gap* entre eles. Contudo, é possível observar *gaps* médios ainda elevados (22,29% e 19,82%, respectivamente, para o primeiro e segundo modelos), indicando a complexidade intrínseca ao problema. Por fim, em relação ao processamento, o segundo modelo exigiu um pouco mais de tempo que o primeiro nas instâncias menores, cujo processamento não foi encerrado pela limitação de tempo imposta.

De uma forma geral, e considerando o conjunto de instâncias utilizado, o modelo adaptado para a dependência de tempo baseado no fluxo de duas commodities mostrou-se uma opção mais interessante. Com a inserção da desigualdade válida e de um solução inicial heurística, o *solver* foi capaz de gerar melhores limitantes médios, superiores e inferiores, com um aumento não

Tabela 3: Comparação entre os dois modelos matemáticos, ambos com inserção de solução inicial e desigualdade válida

$ H $	n	Modelo da Seção 2.1			Modelo da Seção 2.2			Melhoria (%)		
		LS	Gap (%)	Tempo (s)	LS	Gap (%)	Tempo (s)	LS	Gap	Tempo
5	[10, 14]	8125,53	0,75	650	8125,53	0,00	112	0,00	13,33	23,41
	[20, 24]	11729,40	12,00	3600	11875,53	8,88	3421	-1,26	23,23	4,97
	[50, 54]	20703,67	28,09	3602	20586,53	23,92	3600	0,52	14,27	0,03
	[80, 84]	25688,80	30,25	3602	24941,07	24,29	3602	2,95	19,37	-0,02
	[100, 104]	26464,07	28,94	3604	26126,40	25,84	3602	1,28	10,42	0,04
	Média	18542,29	20,01	3011	18331,01	16,59	2868	0,70	16,13	5,69
10	[10, 14]	8193,80	0,59	527	8193,80	0,25	381	0,00	3,85	-18,37
	[20, 24]	12278,33	17,54	3601	12256,20	13,64	3600	0,11	22,16	0,00
	[50, 54]	21459,73	31,55	3602	21256,93	26,83	3600	0,92	14,45	0,04
	[80, 84]	26447,33	32,46	3602	26347,07	30,29	3607	0,35	6,34	-0,13
	[100, 104]	27388,60	31,58	3602	27339,73	32,14	3637	0,37	-1,70	-0,99
	Média	19153,56	22,74	2987	19078,75	20,63	2965	0,35	9,02	-3,89
15	[10, 14]	8298,93	1,96	1212	8358,80	1,26	1259	-0,57	8,88	-22,37
	[20, 24]	12458,07	20,28	3600	12611,00	17,78	3601	-1,26	10,21	-0,01
	[50, 54]	21512,47	31,62	3601	21215,20	27,36	3607	1,33	13,26	-0,18
	[80, 84]	26506,53	33,59	3607	26406,73	31,41	3615	0,36	6,42	-0,23
	[100, 104]	27937,13	33,22	3607	27571,00	33,35	3607	1,21	-0,56	0,00
	Média	19342,63	24,13	3126	19232,55	22,23	3138	0,22	7,64	-4,56
	Média global	19012,83	22,29	3041	18880,77	19,82	2990	0,42	10,93	-0,92

significante no tempo de processamento.

5. Conclusões

Neste estudo foi abordado o Problema do Caixeiro Viajante dependente do tempo de viagem. A inclusão da dependência de tempo incorpora características mais reais ao problema, especialmente para contextos urbanos e com tráfego intenso. A principal contribuição deste trabalho foi propor duas formulações matemáticas para tratar a dependência de tempo, com base em modelos de roteamento clássicos da literatura. Uma desigualdade válida também foi analisada junto aos modelos, além da inserção de uma solução inicial produzida heurísticamente. Utilizando instâncias geradas a partir de dados reais de tráfego, foram analisadas configurações com até 104 clientes e 15 intervalos de tempo distintos, com auxílio de um *solver* comercial. Utilizando uma adaptação do modelo baseado em fluxo de duas commodities, foi possível melhorar as soluções iniciais geradas e, especialmente, elevar o limitante inferior.

Referências

- Arigliano, A., Calogiuri, T., Ghiani, G., e Guerriero, E. (2018). A branch-and-bound algorithm for the time-dependent travelling salesman problem. *Networks*, 72(3):382–392.
- Baldacci, R., Hadjiconstantinou, E., e Mingozzi, A. (2003). An exact algorithm for the traveling salesman problem with deliveries and collections. *Networks*, 42(1):26–41.
- Baldacci, R., Hadjiconstantinou, E., e Mingozzi, A. (2004). An exact algorithm for the capacitated vehicle routing problem based on a two-commodity network flow formulation. *Operations Research*, 52(5):723–738.

- Cooke, K. e Halsey, E. (1966). The shortest route through a network with time-dependent internodal transit times. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 14(3):493–498.
- Gendreau, M., Ghiani, G., e Guerriero, E. (2015). Time-dependent routing problems: A review. *Computers & Operations Research*, 64:189–197.
- Grazia Speranza, M. (2018). Trends in transportation and logistics. *European Journal of Operational Research*, 264(3):830–836.
- Ichoua, S., Gendreau, M., e Potvin, J.-Y. (2003). Vehicle dispatching with time-dependent travel times. *European Journal of Operational Research*, 144(2):379–396.
- Jaballah, R., Ramalho, R., Renaud, J., e Coelho, L. (2023). The impact of time aggregation and travel time models on time-dependent routing solutions. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 61(4):490–508.
- Jaballah, R., Veenstra, M., Coelho, L., e Renaud, J. (2021). The time-dependent shortest path and vehicle routing problem. *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 59(4): 592–622.
- Kok, A., Hans, E., e Schutten, J. (2012). Vehicle routing under time-dependent travel times: the impact of congestion avoidance. *Computer & Operations Research*, 39:910–918.
- Lucena, A. (1990). Time-dependent traveling salesman problem - the deliveryman case. *Networks*, 20:753 – 763.
- Malandraki, C. e Daskin, M. (1992). Time dependent vehicle routing problems: Formulations, properties and heuristic algorithms. *Transportation Science*, 26(1):185–200.
- Malandraki, C. e Dial, R. B. (1996). A restricted dynamic programming heuristic algorithm for the time dependent traveling salesman problem. *European Journal of Operational Research*, 90(1): 45–55.
- Miller, C., Tucker, A., e Zemlin, R. (1960). Integer programming formulations of traveling salesman problems. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 7:326–329.
- Montero, A., MÃ©ndez-DÃ©az, I., e Miranda-Bront, J. J. (2017). An integer programming approach for the time-dependent traveling salesman problem with time windows. *Computers & Operations Research*, 88:280–289.
- Schmidt, C. E., Silva, A. C., Darvish, M., e Coelho, L. C. (2023). Time-dependent fleet size and mix multi-depot vehicle routing problem. *International Journal of Production Economics*, 255: 108653.
- Schmidt, C., Silva, A., Darvish, M., e Coelho, L. (2019). The time-dependent location-routing problem. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 128:193–315.
- Vidal, T., Martinelli, R., Pham, T. A., e HÃ¡, M. H. (2021). Arc routing with time-dependent travel times and paths. *Transportation Science*, 55(3):706–724.