57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

Uma aplicação de dimensionamento de lotes com expedição e tempo de maturação no setor frigorífico: Formulação e desigualdades válidas

Fernando Senna
Minerva Foods
Av. Antônio Manço Bernardes, s/n, Barretos - SP
fernandordsenna@gmail.com

Jorge Menezes dos Santos
Minerva Foods
Av. Antônio Manço Bernardes, s/n, Barretos - SP
jorge.santos@minervafoods.com

Paulo Henrique de Campos
Minerva Foods
Av. Antônio Manço Bernardes, s/n, Barretos - SP
paulo.campos@minervafoods.com

Ariel Faria do Prado
Minerva Foods
Av. Antônio Manço Bernardes, s/n, Barretos - SP
ariel.prado@minervafoods.com

Saymon Galvão Bandeira
Minerva Foods
Av. Antônio Manço Bernardes, s/n, Barretos - SP
saymon.bandeira@minervafoods.com

Lucas Sirimarco Moreira Guedes
Minerva Foods
Av. Antônio Manço Bernardes, s/n, Barretos - SP
lucas.moreira@minervafoods.com

RESUMO

Problemas de dimensionamento de lotes são problemas de otimização que refletem uma questão recorrente em fábricas: como dimensionar a produção de forma a atender as demandas e minimizar os custos ou maximizar os lucros? Este artigo apresenta um problema de dimensionamento de lotes que considera características especiais: tempo de maturação, custo de *setup*, tempo e custo de transporte e custo de estoque linear por partes, uma combinação até então inédita na literatura. Tal problema emerge de uma aplicação desenvolvida pela equipe de Pesquisa Operacional da Minerva Foods, empresa do setor frigorífico. Ele reflete o dimensionamento de lotes de subprodutos do setor frigorífico. O problema é formalmente definido e uma formulação de programação inteira mista é proposta para representá-lo. Ademais, desigualdades válidas são introduzidas para melhorar o desempenho de solvers ao resolver o problema de otimização, o que é confirmado por experimentos computacionais com instâncias reais.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

PALAVRAS CHAVE. Dimensionamento de lotes, Pesquisa Operacional na indústria, desigualdades válidas, tempo de maturação.

Tópicos: PO na Indústria; Pesquisa Operacional na Administração e Gestão da Produção

ABSTRACT

Lot-sizing problems are optimization problems that reflect a recurring question in factories: how to divide the production lots in order to serve the demands while minimizing costs or maximizing profit? This paper presents a lot sizing problem with special characteristics: maturation time, setup costs, transportation cost and time, and piecewise linear stock costs, an unprecedented combination in the literature. This problem arises from an application developed by the Operations Research Team at Minerva Foods, a meat processing company. The problem reflects the lot sizing of byproducts of the meat processing industry. The problem is formally defined and a mixed-integer programming formulation is proposed. Moreover, valid inequalities are introduced to improve the performance of general-purpose solvers when solving the problem. This impact is confirmed by computational experiments run on real-world instances.

KEYWORDS. Lot-sizing, Operations Research in industry, valid inequalities, maturation time.

Paper topics: Operations Research in Industry; Operations Research for Production Management

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

1. Introdução

Problemas de dimensionamento de lotes (PDLs) são clássicas aplicações de otimização e Pesquisa Operacional na indústria [Karimi et al., 2003]. O objetivo desses problemas é definir quais produtos devem ser produzidos e em que momento ao longo do horizonte de planejamento. Algumas questões recorrentes nesses problemas são capacidade produtiva, custo de *setup* e *lead time* de produção, entre outros. Além de definir como se dará a produção, é de suma importância para as empresas definir a forma como esses itens serão expedidos e transportados até o cliente final.

Neste artigo, é apresentada uma solução desenvolvida pela equipe de Pesquisa Operacional da Minerva Foods, uma empresa do setor frigorífico. Foi proposto um problema de otimização que combina o dimensionamento de lotes com a expedição em um horizonte de duas semanas para uma aplicação voltada à produção de subprodutos do abate bovino na América Latina e sua expedição para mercados internos e externos.

O PDL capacitado é a versão mais comum e recorrente na literatura [Karimi et al., 2003]. Considerando-se um horizonte de planejamento e demandas para um conjunto de itens, deseja-se definir o tamanho dos lotes de produção em cada período de forma que as demandas sejam atendidas, os custos sejam minimizados e as capacidades produtivas respeitadas.

Uma particularidade do problema considerado é a existência de um tempo de maturação entre a produção e a possibilidade de expedição dos itens produzidos. Na literatura, tais questões temporais aparecem com frequência na forma de tempos de *setup* e *lead times*. O tempo de *setup* é o período necessário para a configuração do maquinário para a produção de cada item, normalmente consumindo tempo e capacidade produtiva, ou implicando em custos [Trigeiro et al., 1989; Önal e Romeijn, 2010]. Já o *lead time* é o tempo necessário para a produção do item, implicando, por exemplo, que, se a produção começou num período t e o *lead time* é de dois períodos, os itens só estarão prontos no período $t + 2$ [Almeder et al., 2015].

Em alguns cenários, tempos de maturação podem ser modelados como tempos de *setup* ou *lead times*. Todavia, esse nem sempre é o caso. Baldo et al. [2014] e Baldo et al. [2017] avaliam problemas de dimensionamento de lote no contexto da produção cervejeira com tempo de maturação. Como exposto nesses trabalhos, o tempo de maturação se distingue do *lead time* e do tempo de *setup* por não afetar a capacidade e o tempo de produção, mas sim o estoque. De fato, enquanto tempos de *setup* e *lead times* impactam o processo produtivo, tempos de maturação atuam como um "congelamento do estoque", fazendo com que os produtos sejam mantidos em estoque por um período após a produção antes de serem expedidos ou utilizados em outras etapas da produção, afetando os custos e capacidades de estoque, em vez dos custos e capacidades de produção.

Outrossim, um aspecto importante do problema de otimização estudado neste artigo é a avaliação conjunta da produção e da expedição. Em geral, em PDLs, a presença de demandas bem definidas por períodos faz com que a expedição seja previamente estabelecida. Todavia, em situações em que há flexibilidade e variações de custo, é importante acoplar as decisões de produção e expedição. Wolsey [2006] considera indiretamente a questão da expedição ao assumir a existência de janelas de tempo para a produção de itens baseados nos clientes. Já Mishra et al. [2011] incluem na otimização da produção a questão das datas limites que devem ser cumpridas pelos produtores, enquanto Jaruphongsa et al. [2004] combina ambas as questões. Shu et al. [2015] vão além ao incluir, também, os tempos e custos de transporte.

O problema apresentado neste artigo combina essas características para definir um rico PDL que considera capacidade produtiva, custos de *setup*, tempo de maturação, custos e tempo de transporte e custos de estoque lineares por partes. Ate onde se sabe, tal problema nunca foi abordado na literatura.

Além de definir-se formalmente o problema, é apresentada uma formulação de programação

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

inteira mista para modelá-lo e resolvê-lo. Ainda, são propostas desigualdades válidas para melhorar o desempenho do *solver* utilizado. Por fim, experimentos computacionais realizados com instâncias baseadas em dados reais da companhia demonstram o impacto positivo das desigualdades válidas, além de comparar o desempenho prático de diferentes *solvers*.

O restante do documento se organiza da seguinte forma. Na Seção 2, o problema é formalmente definido e formulado. A Seção 3 apresenta as desigualdades válidas desenvolvidas. Na Seção 4, os resultados dos experimentos computacionais são apresentados e discutidos. Por fim, a Seção 5 discute as conclusões do trabalho.

2. Definição e formulação do problema

O PDL em questão considera a definição da produção de itens em diferentes unidades (fábricas) com a finalidade de atender a demanda dos clientes ao longo de um horizonte de tempo. As demandas são expressas na forma de contratos, com volumes e números de contêineres previamente estabelecidos. A cada contrato, está associado, também, um produto (SKU, do inglês Stock Keeping Unit) e o mercado de destino que, dependendo da unidade que o produz, pode ser considerado como mercado interno ou externo.

Cada unidade possui uma capacidade de produção pré-definida que é, sempre, completamente esgotada em todos os períodos, pois, sendo um subproduto, tal capacidade está vinculada à produção dos itens principais de cada unidade. Essa capacidade pode ser dividida entre os diferentes SKUs, com cada SKU tendo uma capacidade de produção própria. Além disso, quando há produção de itens com destino a um dado mercado, existe um custo de *setup* que deve ser contabilizado por fábrica e por período de produção.

Uma vez produzidos, os SKUs precisam permanecer em estoque durante um período de maturação, o qual depende da unidade em que a produção é realizada e do mercado de destino, para o qual o produto será enviado. Após esse período de maturação, os produtos podem ser expedidos para o destinatário final. Em consequência disso, o horizonte de planejamento de expedição considerado é maior do que o horizonte de planejamento da produção, pois deve-se considerar, também, os períodos de maturação.

Ainda com respeito ao estoque, existem dois tipos de estoque em cada unidade. O estoque de tipo 1 possui uma capacidade limitada, mas não incorre em custos de estoque para a companhia. Já o estoque de tipo 2 possui capacidade grande o bastante para ser considerada ilimitada nesta aplicação, mas incorre em um custo por unidade estocada dependente da fábrica em que ocorreu a produção, o mercado de destino e o período (dia). Desta forma, pode-se dizer que o custo de estocagem neste problema é linear por partes.

Considerando-se todas essas hipóteses, busca-se definir um plano de produção e expedição dos itens demandados de forma a maximizar o lucro obtido com a operação e fornecer um elevado nível de serviço aos clientes. Diante disso, consideram-se duas funções objetivo avaliadas de forma hierárquica. Primeiro, maximiza-se o atendimento de contratos que são considerados de altíssima prioridade, chamados de “obrigatórios”. Em seguida, maximiza-se o lucro total. Por uma série de questões inerentes ao problema, o lucro obtido com a expedição de um contêiner depende não só do contrato acordado entre a empresa e o cliente, mas também da unidade em que ele foi produzido e do dia de expedição. Para o cálculo total do lucro, também são desconsiderados os custos de *setup* e de estoque. A seguir, apresenta-se uma formulação de programação inteira mista do problema. Os conjuntos utilizados são:

$\mathcal{U}$ Conjunto de unidades (fábricas);

$\mathcal{C}$ Conjunto de contratos;

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

$\mathcal{S}$ Conjunto de SKUs;

$\mathcal{T}^P = \{0, 1, \ldots, t^P_{max}\}$ Conjunto de períodos de produção, com 0 representando o estado inicial e t^P_{max} o último período de produção;

$\mathcal{T}^E = \{1, 2 \ldots, t^E_{max}\}$ Conjunto de períodos de expedição, com t^E_{max} representando o último período de expedição, que corresponde ao último período de produção (t^P_{max}) acrescido do maior tempo de maturação;

$\mathcal{M}$ Conjunto de mercados de destino;

$\mathcal{Q} = \{1, 2\}$ Conjunto de tipos de mercado;

$\overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{C}$ Conjunto de contratos obrigatórios;

$\mathcal{C}_m \subset \mathcal{C}$ Conjunto de contratos do mercado $m \in \mathcal{M}$;

$\mathcal{C}_{uq} \subset \mathcal{C}$ Conjunto de contratos que são do tipo de mercado $q \in \mathcal{Q}$, quando produzidos na unidade $u \in \mathcal{U}$;

$\mathcal{T}^P_{umt} \subset \mathcal{T}^P$ Conjunto de períodos de produção que não podem ser usados para uma expedição a partir da unidade $u \in \mathcal{U}$ no período $t \in \mathcal{T}^E$, considerando-se o tempo de maturação para o mercado $m \in \mathcal{M}$.

Além desses conjuntos, os seguintes parâmetros são utilizados na formulação:

g_{uct} Lucro obtido ao se expedir um contêiner do contrato $c \in \mathcal{C}$ da unidade $u \in \mathcal{U}$ no período $t \in \mathcal{T}^E$;

c^S_{umt} Custo de *setup* para o mercado $m \in \mathcal{M}$ na unidade $u \in \mathcal{U}$ no período $t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\}$;

c^2_{uqt} Custo de estoque de tipo 2 na unidade $u \in \mathcal{U}$ para o tipo de mercado $q \in \mathcal{Q}$ no período $t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\}$;

E_u Capacidade do estoque de tipo 1 da unidade $u \in \mathcal{U}$;

K_{ut} Capacidade de produção da unidade $u \in \mathcal{U}$ no período $t \in \mathcal{T}^P$;

p_{ust} Percentual máximo da capacidade de produção que pode ser usada para produzir o SKU $s \in \mathcal{S}$ na unidade $u \in \mathcal{U}$ no período $t \in \mathcal{T}^P$;

v_c Volume de um contêiner do contrato $c \in \mathcal{C}$;

n_c Número de contêineres associados ao contrato $c \in \mathcal{C}$.

Por fim, consideram-se as seguintes variáveis:

a_{usct} Variável contínua que indica produção de SKU $s \in \mathcal{S}$ que é alocada ao contrato $c \in \mathcal{C}$, na unidade $u \in \mathcal{U}$, no período $t \in \mathcal{T}^P$ (para $t = 0$, corresponde à fração do estoque inicial que é alocada ao contrato $c \in \mathcal{C}$);

e_{uct} Variável inteira que indica o número de contêineres do contrato $c \in \mathcal{C}$ que são expedidos da unidade $u \in \mathcal{U}$ no período $t \in \mathcal{T}^E$;

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

l_{umt} Variável binária que indica se há *setup* para o mercado $m \in \mathcal{M}$ no período $t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\}$ na unidade $u \in \mathcal{U}$;

I^1_{uqt} Variável contínua que indica o nível de estoque de tipo 1 na unidade $u \in \mathcal{U}$, ao fim do período $t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\}$ com destino ao tipo de mercado $q \in \mathcal{Q}$;

I^2_{uqt} Variável contínua que indica o nível de estoque de tipo 2 na unidade $u \in \mathcal{U}$, ao fim do período $t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\}$ com destino ao tipo de mercado $q \in \mathcal{Q}$.

Com base na notação definida acima, é possível definir a seguinte formulação para o problema de otimização a ser resolvido:

$$\max \sum_{u\in\mathcal{U}}\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{c\in\overline{\mathcal{C}}}\sum_{t\in\mathcal{T}^P} a_{usct} \tag{1}$$

$$\max \sum_{u\in\mathcal{U}}\sum_{c\in\mathcal{C}}\sum_{t\in\mathcal{T}^E} g_{uct}e_{uct} - \sum_{u\in\mathcal{U}}\sum_{m\in\mathcal{M}}\sum_{t\in\mathcal{T}^P\setminus\{0\}} c^S_{umt}l_{umt} - \sum_{u\in\mathcal{U}}\sum_{q\in\mathcal{Q}}\sum_{t\in\mathcal{T}^P\setminus\{0\}} c^2_{uqt}I^2_{uqt} \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \sum_{c\in\mathcal{C}} a_{usct} \le p_{ust}K_{ut},\ \forall u \in \mathcal{U}, s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}^P \tag{3}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{c\in\mathcal{C}} a_{usct} \le K_{ut},\ \forall u \in \mathcal{U}, t \in \mathcal{T}^P \tag{4}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{t\in\mathcal{T}^P} a_{usct} = \sum_{t\in\mathcal{T}^E} v_c e_{uct},\ \forall u \in \mathcal{U}, c \in \mathcal{C} \tag{5}$$

$$\sum_{s\in\mathcal{S}}\sum_{t'\in\mathcal{T}^P_{um_ct}} a_{usct'} \le v_c \sum_{t'\in\mathcal{T}^P : t'\ge t} e_{uct},\ \forall u \in \mathcal{U}, c \in \mathcal{C}, t \in \mathcal{T}^E \tag{6}$$

$$\sum_{u\in\mathcal{U}}\sum_{t\in\mathcal{T}^E} e_{uct} \le n_c,\ \forall c \in \mathcal{C} \tag{7}$$

$$a_{usct} \le \min\{n_c v_c, p_{ust}K_{ut}\}l_{um_ct},\ \forall u \in \mathcal{U}, s \in \mathcal{S}, c \in \mathcal{C}, t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\} \tag{8}$$

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}} I^1_{uqt} \le E_u,\ \forall u \in \mathcal{U}, t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\} \tag{9}$$

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}}(I^1_{uq1} + I^2_{uq1}) = K_{u0} + K_{u1} - \sum_{c\in\mathcal{C}} v_c e_{uc1},\ \forall u \in \mathcal{U} \tag{10}$$

$$\sum_{q\in\mathcal{Q}}(I^1_{uqt} + I^2_{uqt}) = \sum_{q\in\mathcal{Q}}(I^1_{uq(t-1)} + I^2_{uq(t-1)}) - \sum_{c\in\mathcal{C}} v_c e_{uct} + K_{ut}, \quad \forall u \in \mathcal{U}, t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0,1\} \tag{11}$$

$$I^1_{uqt} + I^2_{uqt} \ge I^1_{uq(t-1)} + I^2_{uq(t-1)} - \sum_{c\in\mathcal{C}_{uq}} v_c e_{uct}, \quad \forall u \in \mathcal{U}, t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0,1\}, q \in \mathcal{Q} \tag{12}$$

$$a_{usct} \ge 0,\ \forall u \in \mathcal{U}, s \in \mathcal{S}, c \in \mathcal{C}, t \in \mathcal{T}^P \tag{13}$$

$$e_{uct} \in \{0, 1, \ldots, n_c\},\ \forall u \in \mathcal{U}, c \in \mathcal{C}, t \in \mathcal{T}^E \tag{14}$$

$$l_{umt} \in \{0, 1\},\ \forall u \in \mathcal{U}, m \in \mathcal{M}, t \in \mathcal{T}^P \tag{15}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

$$I^1_{uqt} \geq 0,\ \forall u \in \mathcal{U}, q \in \mathcal{Q}, t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\} \tag{16}$$

$$I^2_{uqt} \geq 0,\ \forall u \in \mathcal{U}, q \in \mathcal{Q}, t \in \mathcal{T}^P \setminus \{0\}. \tag{17}$$

A função objetivo (1) maximiza o volume dos contratos obrigatórios atendidos, enquanto a função objetivo (2) maximiza o lucro total obtido com a operação. A restrição (3) limita a produção diária de cada SKU conforme o percentual máximo da capacidade disponível. A restrição (4) garante que a capacidade produtiva de cada fábrica é respeitada. A restrição (5) garante que todo o volume relativo a um contrato $c \in \mathcal{C}$ expedido da unidade $u \in \mathcal{U}$ é produzido na mesma unidade (nesta restrição, m_c representa o mercado de destino do contrato $c \in \mathcal{C}$). A restrição (6), em conjunto com a restrição (5), garante que todas as expedições respeitam o tempo de maturação necessário. A restrição (7) assegura que somente são expedidos contêineres relativos a um contrato até o limite de contêineres associado. A restrição (8) define o valor das variáveis l_{umt} que indicam a necessidade de realização de *setup*. A restrição (9) garante que a capacidade de estoque físico da unidade $u \in \mathcal{U}$ não é excedida em nenhum dia. A restrição (10) representa o balanço de estoque para o primeiro período de produção e a restrição (11) faz o mesmo para os demais dias. A restrição (12) assegura que os estoques associados a cada tipo de mercado mantenham-se consistentes ao longo do horizonte de planejamento, garantindo que não haverá transferência de produtos entre os estoques de cada tipo de mercado. Por fim, as restrições (13) a (17) definem os domínios das variáveis.

Conforme discutido anteriormente, as duas funções objetivo são consideradas de forma hierárquica. Assim, primeiro resolve-se o modelo com a função objetivo (1) e as restrições (3) a (17), obtendo-se uma solução ótima de valor z^*. Em seguida, troca-se a função objetivo por (2) e otimiza-se novamente a formulação, incluindo, além das restrições (3) a (17), a seguinte restrição:

$$\sum_{u \in \mathcal{U}} \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{c \in \overline{\mathcal{C}}} \sum_{t \in \mathcal{T}^P} a_{usct} \geq (1 - \varepsilon) z^*, \tag{18}$$

em que ε representa um valor de tolerância, usado principalmente para evitar problemas numéricos. Em nossos experimentos computacionais, essa tolerância foi definida como 1%, sendo um valor aceitável para o cliente, assegurando a estabilidade da solução sem prejudicar o serviço.

Por fim, vale ressaltar que, ao definirem-se as variáveis, é considerada em etapa de pré-processamento uma série de regras que reduzem o tamanho do problema, pois nem toda combinação (u, s, c, t), com $u \in \mathcal{U}, s \in \mathcal{S}, c \in \mathcal{C}, t \in \mathcal{T}^P$, por exemplo, é válida como índice da variável a_{usct}. Com isso, busca-se tanto impor restrições não explícitas no modelo, quanto reduzir o número de variáveis do modelo e tornar sua resolução mais eficiente. Algumas dessas regras são: as datas de entrega e os tempos de maturação relativos a cada contrato afetam os dias em que estes podem ser produzidos e expedidos em cada fábrica; nem todas as unidades são capazes de produzir todos os SKUs; nem todos os contratos podem ser produzidos por todas as fábricas; alguns contratos aceitam um número restrito de SKUs; dentre outras questões operacionais.

3. Desigualdades válidas

Conforme discutido na Seção 1, foram introduzidas desigualdades válidas para melhorar o desempenho do *solver* de programação inteira mista ao resolver este problema. As desigualdades válidas partem de três premissas principais. A primeira delas é a de que, ao fim do planejamento, a distinção de tipo de estoque remanescente (volume que não é expedido para nenhum contrato) não precisa ser diferenciada entre os tipos de mercado, e deve-se optar pela de custo mais baixo. A segunda hipótese considera que, em uma solução ótima, o estoque de tipo 2 só será alocado caso a resultante de produção menos expedição seja maior do que a capacidade física do estoque de tipo 1, uma vez que não há custos para o estoque de tipo 1, mas há para o de tipo 2. A última das premissas

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

consideradas é a de que só deve haver *setup* para um dado mercado caso haja expedição de contratos para este mercado, e vice-versa.

Para a definição dessas restrições, além da notação apresentada na Seção 2, é considerado o parâmetro $M_{ut} = \max\{0, \sum_{t' \in \mathcal{T}^P : t' \leq t} K_{ut} - E_u\}$ que é um limitante superior para o nível de estoque de tipo 2 na unidade $u \in \mathcal{U}$ no período $t \in \mathcal{T}^P$ em uma solução ótima, considerando-se a produção e expedição dos contratos e que só se alocaria estoque de tipo 2 caso a capacidade máxima do estoque de tipo 1 fosse atingida. Outrossim, é utilizada, ainda, uma variável binária x_{ut} que indica a necessidade de utilização de estoque de tipo 2 na unidade $u \in \mathcal{U}$ no dia $t \in \mathcal{T}^P$. Com essas definições, introduzem-se as seguintes desigualdades válidas:

$$I^2_{u1(t^P_{max})} = 0,\ \forall u \in \mathcal{U} : c^2_{u1(t^P_{max})} > c^2_{u2(t^P_{max})} \tag{19}$$

$$I^2_{u2(t^P_{max})} = 0,\ \forall u \in \mathcal{U} : c^2_{u1(t^P_{max})} < c^2_{u2(t^P_{max})} \tag{20}$$

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}} I^2_{uqt} \geq \sum_{t' \in \mathcal{T}^P : t' \leq t} K_{ut'} - \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{t' \in \mathcal{T}^P : t' \leq t} v_c e_{uct'} - E_u,\ \forall u \in \mathcal{U}, t \in \mathcal{T}^P \tag{21}$$

$$M_{ut} x_{ut} \geq \sum_{t' \in \mathcal{T}^P : t' \leq t} K_{ut'} - \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{t' \in \mathcal{T}^P : t' \leq t} v_c e_{uct'} - E_u,\ \forall u \in \mathcal{U}, t \in \mathcal{T}^P \tag{22}$$

$$E_u(x_{ut} - 1) \leq \sum_{t' \in \mathcal{T}^P : t' \leq t} K_{ut'} - \sum_{c \in \mathcal{C}} \sum_{t' \in \mathcal{T}^P : t' \leq t} v_c e_{uct'} - E_u,\ \forall u \in \mathcal{U}, t \in \mathcal{T}^P \tag{23}$$

$$\sum_{q \in \mathcal{Q}} I^2_{uqt} \leq M_{ut} x_{ut},\ \forall u \in \mathcal{U}, t \in \mathcal{T}^P \tag{24}$$

$$|\mathcal{T}^P| \sum_{c \in \mathcal{C}_m} \sum_{t \in \mathcal{T}^E} e_{uct} \geq \sum_{t \in \mathcal{T}^P} l_{umt},\ \forall u \in \mathcal{U}, m \in \mathcal{M} \tag{25}$$

$$\sum_{c \in \mathcal{C}_m} \sum_{t \in \mathcal{T}^E} v_c e_{uct} \leq \sum_{t \in \mathcal{T}^P} K_{ut} l_{umt},\ \forall u \in \mathcal{U}, m \in \mathcal{M} \tag{26}$$

As restrições (19) e (20) garantem que o estoque de tipo 2 para o tipo de mercado mais caro será nulo ao fim do horizonte de planejamento. A restrição (21) define um limitante inferior para o nível de estoque de tipo 2 em cada unidade e período. As restrições (22) e (23) definem o valor da variável x_{ut} com base na capacidade produtiva e expedição dos períodos anteriores, além da capacidade de estoque de tipo 1. A restrição (24) define limitante superior para o estoque de tipo 2. A restrição (25) garante que, se existe *setup* para um mercado em uma unidade no horizonte de planejamento, existe expedição para este mercado. Por fim, a restrição (26) assegura que, se existe expedição para um mercado, existe *setup* para este mercado.

4. Experimentos computacionais

Nesta seção, apresentamos experimentos computacionais realizados para avaliar o desempenho das formulações apresentadas. Foram utilizadas dez instâncias reais, correspondendo a dez semanas de planejamento da empresa. Cada instância corresponde a um período de duas semanas, com períodos diários. As instâncias de número 8, 9 e 10 possuem mais possibilidades de expedição, tendo portanto maior número de variáveis binárias. Os experimentos foram realizados em uma CPU Intel Xeon Platinum 8275CL com 3.00GHz, com 32GB de memória RAM. Os *solvers* utilizados foram o HiGHS versão 1.9.0 e o Gurobi versão 11.0.3, com 16 *threads*.

O primeiro experimento realizado visa à identificação do impacto gerado na performance do *solver* por meio da aplicação das desigualdades válidas propostas. Para esse experimento, apenas

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

o Gurobi foi utilizado com tolerância para otimalidade de 0,1% e tempo limite de 3.600s. Esses experimentos são reportados na Tabela 1, que indica o gap de otimalidade e o tempo de execução para cada instância, além do valor médio. Os valores são apresentados para cada uma das funções objetivo utilizadas, considerando a solução sequencial e hierárquica dos dois objetivos conforme discutido na Seção 2. As execuções que tem o tempo indicado com um asterisco (*) indicam que a instância atingiu o limite de memória disponível da máquina.

Instância	Formulação compacta				Desigualdades válidas			
	1º objetivo		2º objetivo		1º objetivo		2º objetivo	
	Gap (%)	Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)
1	0,36	2.915,00*	0,52	3.602,59	0,01	4,05	0,10	39,93
2	0,18	3.604,16	0,68	3.614,83	0,10	868,62	0,39	3.604,52
3	0,13	3.603,93	0,47	3.602,98	0,09	20,48	0,09	86,73
4	0,18	3.604,16	0,68	3.614,83	0,07	171,35	0,21	3.602,44
5	0,09	17,86	0,10	468,65	0,04	5,45	0,06	25,07
6	0,31	3.606,28	0,31	3.602,86	0,10	13,58	0,10	71,62
7	0,16	3.649,84	0,36	3.602,40	0,06	23,27	0,10	86,57
8	0,11	3.603,81	0,94	3.604,98	0,04	112,76	0,10	1.662,77
9	0,14	3.365,00*	0,54	3.603,31	0,09	338,83	0,20	3.603,01
10	0,18	3.627,36	0,31	3.602,45	0,07	122,96	0,15	3.602,51
Média	0,18	3.164,67	0,49	3.291,99	0,07	168,14	0,15	1.638,52

Tabela 1: Uma avaliação do impacto das desigualdades válidas no desempenho do *solver*.

Os resultados apresentados na tabela claramente indicam a melhoria de desempenho do *solver* ao resolver o modelo com as desigualdades válidas. Apesar de os gaps encontrados serem relativamente baixos para a formulação compacta sem desigualdades válidas, o *solver* é capaz de encontrar uma solução ótima para apenas uma das instâncias em cada um dos objetivos, apresentando longos tempos de execução para as demais instâncias e estourando o limite de memória para duas delas.

Com a inclusão das desigualdades válidas, o *solver* encontra uma solução aceitável (dentro da tolerância em relação à otimalidade) para todas as instâncias considerando a formulação com a primeira função objetivo, sendo que o tempo necessário para tanto é de menos de cinco minutos para oito das dez instâncias. O desempenho ao resolver o modelo com a segunda função objetivo também melhora significativamente, com apenas quatro instâncias atingindo o tempo limite, menos da metade do que sem as desigualdades válidas. Ainda, considerando os valores médios, a inclusão das desigualdades válidas faz com que o gap seja reduzido pela metade ao considerar a primeira função objetivo e para menos de um terço ao avaliar a segunda função objetivo. O principal impacto, contudo, é nos tempos de solução, que são reduzidos em cerca de 95% para a primeira função objetivo e em cerca de 50% para a segunda. Vale salientar que, sendo uma aplicação prática em que os usuários com frequência desejam avaliar a solução de diversos cenários, o tempo de execução é um fator preponderante sobre a aceitabilidade da ferramenta desenvolvida. Com isso, está claramente demonstrado o impacto positivo causado pela inclusão das desigualdades válidas sobre o desempenho do *solver*.

O segundo experimento realizado diz respeito ao desempenho de diferentes *solvers*. Para este experimento, dado que a importância das desigualdades válidas foi plenamente demonstrada acima, foi analisada apenas a formulação com todas elas inclusas. Ainda, foi adotada como tolerância de otimalidade o valor de 1%, que é o valor utilizado na prática, uma vez que desejava-se avaliar a capacidade de cada *solver* para resolver o problema de planejamento semanal. A Tabela 2

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

apresenta os resultados obtidos.

Instância	HiGHS				Gurobi			
	1º objetivo		2º objetivo		1º objetivo		2º objetivo	
	Gap (%)	Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)	Gap (%)	Tempo (s)
1	0,71	13,74	0,92	74,10	0,26	3,56	0,70	5,53
2	1,00	383,02	1,00	115,65	0,83	4,86	0,96	5,23
3	0,95	124,85	0,91	302,96	0,75	11,14	1,00	11,84
4	0,90	1.094,57	1,00	536,83	0,96	7,05	0,95	26,56
5	0,85	58,63	0,81	16,60	0,82	4,02	0,59	5,65
6	0,87	56,32	1,00	171,24	0,93	6,03	0,23	7,09
7	0,60	74,14	0,65	9,30	0,94	3,96	0,51	4,68
8	0,97	1.156,99	1,00	1.684,15	0,81	11,23	0,98	9,39
9	1,00	2.155,95	1,24	3.600,14	0,88	12,20	0,91	42,63
10	0,75	776,21	1,00	45,84	0,87	6,28	0,72	7,58
Média	0,86	589,44	0,95	655,68	0,80	7,03	0,76	12,62

Tabela 2: Uma comparação do desempenho dos *solvers* HiGHS e Gurobi.

Conforme esperado, o Gurobi apresentou melhor desempenho do que o HiGHS para todas as instâncias. Contudo, vale salientar que o HiGHS apresentou um desempenho competitivo em muitas instâncias, tendo gasto menos de dez minutos ao resolver o modelo com cada função objetivo em seis das dez instâncias. De fato, com exceção das instâncias 8 e 9, o HiGHS conseguiu atingir a tolerância de otimalidade em menos de meia hora, combinando os modelos com cada uma das duas funções objetivo, o que é um resultado bastante positivo para um *solver open source* que não paraleliza sua busca em árvore ao competir com um *solver* comercial utilizando dezesseis threads.

5. Conclusões

Neste artigo, foi apresentado um problema de dimensionamento de lotes que envolve aspectos como tempo de maturação, custos e tempos de transporte, custo de *setup* e custo de estoque linear por partes, uma combinação até então inédita na literatura. Tal problema foi motivado pelo desenvolvimento de uma aplicação pela equipe de Pesquisa Operacional da Minerva Foods para otimização da produção e expedição de subprodutos do setor frigorífico.

A aplicação foi detalhadamente explicada e o problema formalmente definido. Uma formulação baseada em programação inteira mista foi proposta para o problema, além de desigualdades válidas para fortalecer a relaxação linear e melhorar o desempenho dos *solvers*. Experimentos computacionais confirmaram o impacto positivo das desigualdades válidas. Também foi feita uma comparação do desempenho de dois *solvers*: Gurobi e HiGHS, com o HiGHS apresentando bom desempenho, apesar da superioridade clara do Gurobi.

Referências

Almeder, C., Klabjan, D., Traxler, R., e Almada-Lobo, B. (2015). Lead time considerations for the multi-level capacitated lot-sizing problem. *European Journal of Operational Research*, 241(3): 727–738.

Baldo, T. A., Morabito, R., Santos, M. O., e Guimarães, L. (2017). Alternative mathematical models and solution approaches for lot-sizing and scheduling problems in the brewery industry: Analyzing two different situations. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017(1):6754970.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br

Baldo, T. A., Santos, M. O., Almada-Lobo, B., e Morabito, R. (2014). An optimization approach for the lot sizing and scheduling problem in the brewery industry. *Computers & Industrial Engineering*, 72:58–71.

Jaruphongsa, W., Çetinkaya, S., e Lee, C.-Y. (2004). Warehouse space capacity and delivery time window considerations in dynamic lot-sizing for a simple supply chain. *International Journal of Production Economics*, 92(2):169–180.

Karimi, B., Fatemi Ghomi, S., e Wilson, J. (2003). The capacitated lot sizing problem: A review of models and algorithms. *Omega*, 31(5):365–378.

Mishra, N., Kumar, V., Kumar, N., Kumar, M., e Tiwari, M. (2011). Addressing lot sizing and warehousing scheduling problem in manufacturing environment. *Expert Systems with Applications*, 38(9):11751–11762.

Shu, M.-H., Huang, J.-C., e Fu, Y.-C. (2015). A production–delivery lot sizing policy with stochastic delivery time and in consideration of transportation cost. *Applied Mathematical Modelling*, 39 (10):2981–2993.

Trigeiro, W. W., Thomas, L. J., e McClain, J. O. (1989). Capacitated lot sizing with setup times. *Management Science*, 35(3):353–366.

Wolsey, L. A. (2006). Lot-sizing with production and delivery time windows. *Mathematical Programming*, 107:471–489.

Önal, M. e Romeijn, H. E. (2010). Multi-item capacitated lot-sizing problems with setup times and pricing decisions. *Naval Research Logistics*, 57(2):172–187.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212629
https://proceedings.science/p/212629?lang=pt-br