57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

UMA FORMULAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO DC PARA O PROBLEMA DE PERMUTAÇÃO FLOW SHOP

Roberto Quirino do Nascimento
Depto. de Computação Científica-CI - UFPB
roberto@ci.ufpb.br

Rubia Mara Oliveira Santos
Instituto de Matemática - UFMS
rubia.oliveira@ufms.br

Willy Alves Oliveira Soler
Instituto de Matemática - UFMS
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP
willy.oliveira@ufms.br

Lucídio dos Anjos Formiga Cabral
Depto. de Computação Científica-CI - UFPB
lucidio@ci.ufpb.br

RESUMO

Este estudo propõe a aplicação da teoria de otimização global baseada na Diferença de Funções Convexas (*Otimização* DC) para solução do problema de Permutação *Flow Shop* (PPFS), cujo objetivo é determinar a sequência de processamento das tarefas que minimize o tempo de conclusão da última tarefa (*makespan*). As restrições de integralidade do PPFS podem ser representadas como a diferença entre duas funções convexas, permitindo sua reformulação na forma canônica de um problema DC. Essa abordagem viabiliza a obtenção de soluções globais sob certas condições teóricas. Adota-se o modelo proposto por Wilson [Stafford et al., 2005], reformulado neste trabalho como um problema localmente convexo com restrições lineares de igualdade. Um método de pontos interiores é implementado para resolvê-lo. As condições de otimalidade da teoria DC são exploradas de forma inédita para o PPFS. Resultados computacionais validam a proposta.

PALAVRAS CHAVE. Programação Matemática, Pontos Interiores e Escalonamento.

ABSTRACT

This study applies global optimization theory based on Difference of Convex functions (DC *programming*) to solve the Permutation Flow Shop Scheduling Problem (PFSSP), which seeks to determine the processing sequence of jobs that minimizes the completion time of the last job (makespan). The integrality constraints of the PFSSP can be expressed as the difference of two convex functions, allowing the problem to be reformulated in the canonical form of a DC program. This reformulation makes it possible to identify global solutions under certain theoretical conditions. The model proposed by Wilson [Stafford et al., 2005] is adopted and reformulated in this work as a locally convex problem with linear equality constraints. An interior-point method is implemented to solve it. The optimality conditions of DC theory are explored for the PFSSP for the first time. Computational results validate the effectiveness of the proposal.

KEYWORDS. Mathematical Programming. Interior Point. Scheduling.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

1. Introdução

Problemas de *Flow Shop* (PFS) são comuns em diversos contextos industriais, especialmente em ambientes nos quais tarefas (*tasks*) precisam ser processadas em série em diversas máquinas, envolvendo múltiplos estágios de produção [Grabowski e Pempera, 2007]. Mais especificamente, o PFS considera um cenário em que um conjunto de tarefas $\mathcal{N} = \{1, \ldots, N\}$ deve ser processado num conjunto de máquinas $\mathcal{M} = \{1, \ldots, M\}$. Cada tarefa $j \in \mathcal{N}$ possui um tempo de processamento T_{rj} em cada máquina $r \in \mathcal{M}$. Assume-se que cada máquina pode processar apenas uma tarefa por vez, e que cada tarefa só pode ser processada por uma máquina de cada vez. Além disso, todas as tarefas estão disponíveis para processamento no início do horizonte de planejamento (tempo zero). Neste trabalho, estudamos uma versão do PFS conhecida na literatura como problema de permutação *Flow Shop* (PPFS). De acordo com [Stützle, 1998], no PPFS todas as tarefas são processadas na mesma ordem em todas as máquinas. O objetivo é determinar a sequência de processamento das tarefas que minimiza o tempo de completamento da última tarefa, conhecido como *makespan*.

Devido a sua importância no contexto do planejamento da produção, o PPFS tem sido amplamente estudado na literatura. [Johnson, 1954] desenvolveu um algoritmo exato em tempo polinomial, com complexidade $\mathcal{O}(N \log N)$, capaz de solucionar o PPFS para o caso de duas máquinas ($M = 2$). Todavia, [Garey et al., 1976] provou que o caso geral, com $M \geq 3$, pertence à classe de problemas $\mathcal{NP}$-difícil. Nesse contexto, a literatura da área reporta diversos métodos customizados de solução, tanto exatos como heurísticos, para lidar com instâncias de grande porte do PPFS. Uma revisão desses métodos pode ser encontrada em [Reza Hejazi e Saghafian, 2005]. [Stafford et al., 2005] estudou diversos modelos de otimização linear inteira mista para o PPFS, estabelecendo as formulações mais promissoras do ponto de vista computacional. Neste trabalho, adotaremos a formulação descrita a seguir, que será posteriormente reformulada como um problema de diferença de funções convexas (DC).

Para definir o modelo matemático, consideraremos as seguintes variáveis de decisão:

- x_{rj}: tempo de início de processamento da j-ésima tarefa na máquina r; e
- $z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } i \text{ é a j-ésima tarefa a iniciar o processamento;} \\ 0, & \text{caso contrário .} \end{cases}$

O modelo matemático utilizado neste trabalho para a representação do PPFS consiste em minimizar a função objetivo (1) sujeito às restrições (2) a (10).

$$\text{PPFS} \qquad \text{Minimizar} \quad F = x_{MN} + \sum_{i \in \mathcal{N}} T_{Mi} z_{iN} \tag{1}$$

$$\text{Sujeito à:} \quad \sum_{j \in \mathcal{N}} z_{ij} = 1, \qquad i \in \mathcal{N}, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} z_{ij} = 1, \qquad j \in \mathcal{N}, \tag{3}$$

$$x_{11} = 0, \tag{4}$$

$$x_{1j} + \sum_{i \in \mathcal{N}} T_{1i} z_{ij} = x_{1j+1}, \quad j \in \mathcal{N} \setminus \{N\}, \tag{5}$$

$$x_{r1} + \sum_{i \in \mathcal{N}} T_{ri} z_{i1} = x_{r+1}, \quad r \in \mathcal{M} \setminus \{M\}, \tag{6}$$

$$x_{rj} + \sum_{i \in \mathcal{N}} T_{ri} z_{ij} \leq x_{r+1j}, \quad r \in \mathcal{M} \setminus \{M\},\ j \in \mathcal{N} \setminus \{1, N\}, \tag{7}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

$$x_{rj} + \sum_{i=1}^{N} T_{ri} z_{ij} \leq x_{rj+1}, \quad r \in \mathcal{M} \setminus \{1\},\ j \in \mathcal{N} \setminus \{N\}, \tag{8}$$

$$x_{rj} \geq 0, \qquad r \in \mathcal{M},\ j \in \mathcal{N}, \tag{9}$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad i \in \mathcal{N},\ j \in \mathcal{N}. \tag{10}$$

A função objetivo (1) consiste em minimizar o *makespan*. As restrições (2) asseguram que cada trabalho seja atribuído a uma, e apenas uma, posição de sequência de processamento, enquanto as restrições (3) garantem que cada posição seja preenchida com uma, e somente uma, tarefa. A restrição (4) estabelece que a primeira tarefa da sequência inicia seu processamento na máquina 1 no tempo 0. As restrições (5) garantem que cada tarefa inicia o processamento na máquina 1 imediatamente após sua predecessora ter concluído o processamento nessa máquina. As restrições (6) garantem que a primeira tarefa da sequência seja imediatamente processada na próxima máquina após ter terminado o processamento na máquina atual. As restrições (7) estabelecem que cada tarefa só pode ser iniciada na próxima máquina após ter concluído seu processamento na máquina atual. As restrições (8) definem que, para todas as máquinas, uma tarefa só pode ser iniciada após sua predecessora na sequência ter concluído o processamento na respectiva máquina. Por fim, as restrições (9) e (10) definem os domínios das variáveis de decisão.

A principal contribuição deste trabalho consiste em propor uma reformulação do modelo (1) - (10) como um problema de otimização de diferença de convexas e, em seguida, aplicar um método de pontos interiores para sua solução. Para tanto, as restrições de integralidade das variáveis z_{ij} são expressas como uma restrição funcional que representa uma diferença de funções convexas. Desse modo, é possível estabelecer condições de otimalidade global quando o problema estudado possui a propriedade da essencialidade.

O restante deste artigo está organizado conforme segue. Na Seção 2, apresentamos os principais fundamentos da teoria da diferença de funções convexas (DC), enquanto que, na Seção 3, descrevemos a aplicação da teoria DC para o problema de permutação *Flow Shop*, incluindo a construção e demonstração da Proposição 3, que desempenhou um papel crucial ao permitir-nos reformular o modelo (1) - (10) como um problema DC na forma padrão. As condições globais de otimalidade para o problema PPFSDC são discutidas na Seção 4. O método utilizado para resolver o problema PPFSDC$_w$ encontra-se na Seção 5. Os resultados computacionais são detalhados na Seção 6, enquanto os gráficos de Gantt de alguns problemas resolvidos pelo método são exibidos na Seção 7. Por fim, as considerações finais são apresentadas na Seção 8.

2. Fundamentos de Otimização DC

Definição 1. *Dada uma função $f : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$, e um conjunto convexo $X \subseteq \boldsymbol{R}^n$ dizemos que f é uma diferença de funções convexas (DC) em X se existem funções convexas $g, h : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ tais que:*

$$f(x) = g(x) - h(x) \ \textit{ para todo } x \in X. \tag{11}$$

Definição 2. *Um Problema de otimização é chamado de um problema de otimização DC se ele estiver escrito na forma:*

$$\textit{Minimize} \quad f_0(x) \tag{12}$$

$$DC \qquad \textit{Sujeito a:} f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m,\ x \in X \tag{13}$$

onde $f_0, \ldots, f_m$ são funções DC.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

Definição 3. *Um problema de otimização DC está escrito na forma canônica DC quando estiver escrito na seguinte forma:*

$$\textit{Minimize} \qquad c^T x \tag{14}$$

$$CDC \qquad \textit{Sujeito a:} \quad g(x) \geq 0 \quad , x \in D \tag{15}$$

onde $c \in \boldsymbol{R}^n, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ *é convexa, e* D *é um subconjunto convexo compacto do* $\boldsymbol{R}^n$*. A restrição* $g(x) \geq 0$ *dada em (15) é denominada restrição convexa reversa ou simplesmente restrição reversa.*

Proposição 1. *Sejam* f*,* f_i *funções DC. Então as seguintes funções também são DC:*

1. $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x)\ \lambda_i \in \boldsymbol{R}$*;*
2. $\max_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ *e* $\min_{i=1,\ldots,m} f_i(x)$ *;*
3. $|f(x)|$
4. $f^+ := \max\{0, f(x)\}, f^- := \min\{0, f(x)\}$*;*
5. $\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$.

Considere o problema canônico DC e seja **F** seu conjunto de soluções viáveis dado por:

$$\mathbf{F} = \{x \in D : g(x) \geq 0\}, \tag{16}$$

admitimos nesse trabalho que as seguintes hipóteses sejam satisfeitas:

Hipótese A_1 O interior conjunto D dado em (15) é diferente de vazio, isto é: $intD \neq \emptyset$.

Hipótese A_2 Existe $x^0 \in D$ tal que:

$$g(x^0) < 0 \quad \text{e} \quad c^T x^0 < min\left\{c^T x : x \in D, g(x) \geq 0\right\}. \tag{17}$$

Hipótese A_3 $\mathbf{F} = cl\,(int\mathbf{F})$.

Definição 4. *A restrição* $g(x) \geq 0$ *dada em (15) é dita essencial se a* **Hipótese** A_2 *é satisfeita.*

Com base nessas suposições tem-se um resultado inicial sobre mínimos globais para problemas DC.

Proposição 2. *Suponha que o conjunto* $\boldsymbol{F} \neq \emptyset$*, sob a* **Hipótese** A_2*, existe uma solução ótima* x^* *para o problema CDC satisfazendo:*

$$x^* \in \partial\{x \in \boldsymbol{R}^n; g(x) \geq 0\} \cap \partial D \tag{18}$$

onde ∂S *significa a fronteira do conjunto* S*.*

A seguir apresentamos as condições necessárias e suficientes de otimalidade global para problemas na forma CDC.

Teorema 1. *Condição Necessária de Otimalidade para o problema CDC .*
Sob as Hipóteses A_1 *e* A_2*. Se* x^* *é uma solução ótima para o problema CDC então,*

$$\max\left\{g(x); x \in D, c^T x \leq c^T x^*\right\} = 0 \tag{19}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

Teorema 2. *Condição Suficiente de Otimalidade para CDC .*
Sob as Hipóteses A_1 e A_2. Se $S \supseteq \mathbf{F}$ e $x^* \in \mathbf{F}$ é tal que

$$\max\left\{g(x) : x \in S, c^T x \leq c^T x^*\right\} = 0. \tag{20}$$

Então x^* é uma solução ótima de CDC.

As demonstrações das Proposições 1 e 2, bem como dos Teoremas 1 e 2, encontram-se em [Horst et al., 1995].

3. Otimização DC e o Problema de Permutação Flow Shop (PPFS)

Nesta seção, iremos descrever como foi aplicada a teoria DC ao Problema de Permutação *Flow Shop*. As restrições de designação apresentadas em (2) ou (3), quando somadas, indicam que, em qualquer solução viável, devemos ter

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_{ij} = N. \tag{21}$$

este fato é importante pois nos indica que teremos exatamente N variáveis z com valor igual a 1 e $N^2 - N$ iguais a 0. Vamos descrever o conjunto de restrições fornecidas em (10) como uma desigualdade que seja uma diferença de funções convexas. Para isso, idealizamos a função $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, definida por

$$f(z) = 6(1+z) - 2(1+z)^2$$

satisfazendo as seguintes propriedades,

- f é uma diferença entre duas funções convexas,
- $f(z) > 4$ para todo $z \in (0,1)$,
- $f(z) = 4$ se $z \in \{0,1\}$.

O resultado apresentado a seguir foi fundamental para a elaboração deste trabalho, uma vez que tanto a função quanto seu gradiente não se anulam para cada x no intervalo $[0,1]$, possibilitando o uso do Método de Newton.

Proposição 3. *Dado $(x,z) \in \mathbf{R}_+^{MN} \times [0,1]^{N^2}$ viável para o problema PPFS, exceto a restrição (10), $z \in \{0,1\}^{N^2}$ se e somente se*

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(1+z_{ij})^2 = N^2 + 3N \tag{22}$$

Demonstração. Se $z \in \{0,1\}^{N^2}$, como $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_{ij} = N$ temos N variáveis z com valor igual a 1 e $N^2 - N$ iguais a 0, logo,

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(1+z_{ij})^2 = 4N + (N^2 - N) = N^2 + 3N$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

Suponha que $z \in [0,1]^{N^2}$ e a eq. (22) seja válida, vamos provar que $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(z_{ij}) = 4N^2$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} f(z_{ij}) &= 6N^2 + 6\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_{ij} - 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(1+z_{ij})^2 \\ &= 6N^2 + 6N - 2\left(N^2+3N\right) = 4N^2.\end{aligned}$$

Com isto concluímos que $f(z_{ij}) = 4$, portanto $z_{ij} \in \{0,1\}^{N^2}$ ■

A Proposição 3 desempenha um papel fundamental, pois nos permite reformular o problema (PPFS) como um problema DC (diferença de funções convexas) em sua forma padrão. Tal reformulação não apenas viabiliza a aplicação da teoria DC a uma classe mais ampla de problemas, como também nos proporciona novas perspectivas e estratégias de resolução. Dessa forma, o problema (PPFS) reformulado neste trabalho, como um problema DC em sua forma padrão, é descrito a seguir.

$$\begin{aligned}\textbf{PPFSDC}\ \text{Minimizar}\quad & F = x_{M,N} + \sum_{i=1}^{N} T_{M,i} z_{i,N} \\ \text{Sujeito à:}\quad & \sum_{j=1}^{N} z_{ij} = 1, && i = 1,\dots,N, \\ & \sum_{i=1}^{N} z_{ij} = 1, && j = 1,\dots,N, \\ & x_{11} = 0, \\ & x_{1j} + \sum_{i=1}^{N} T_{1i} z_{i,j} = x_{1j+1}, && j = 1,\dots,N-1, \\ & x_{r1} + \sum_{i=1}^{N} T_{ri} z_{i1} = x_{r+11}, && r = 1,\dots,M-1, \\ & x_{rj} + \sum_{i=1}^{N} T_{ri} z_{ij} \le x_{r+1j}, && r = 1,\dots,M-1,\ j = 2,\dots,N-1, \\ & x_{rj} + \sum_{i=1}^{N} T_{ri} z_{ij} \le x_{rj+1}, && r = 2,\dots,M, \quad j = 1,\dots,N-1, \\ & \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{(1+z_{ij})^2}{N^2+3N} \ge 1, && i,j = 1,\dots,N, \end{aligned} \tag{23}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

4. Condições de otimalidade Globais para o problema PPFSDC

Consideremos o seguinte conjunto:

$$C = \left\{(x,z) \in \mathbf{R}_+^{MN} \times \mathbf{R}_+^{N^2}; (x,z) \ \text{ satisfazem as restrições } \ 2-9 \text{ e } 23\right\}$$

Com o objetivo de atender as condições do Teorema 2 devemos resolver o seguinte problema:

$$\textit{Maximizar} \quad V(z) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{(1+z_{ij})^2}{N^2+3N} \tag{24}$$

OTIM DC *Sujeito à*:

$$F(x,z) = x_{M,N} + \sum_{i=1}^{N} T_{M,i} z_{i,N} \leq Const, \ \ (x,z) \in C \tag{25}$$

Pelo Teorema 2 se (x^*, z^*) é uma solução ótima do problema PPFSDC devemos ter:

$$V^* = \max_{(x,z)\in C} \{V(z); F(x,z) \leq \text{Const}\} = 1$$

onde a constante $Const$ dada na restrição (25) é tal que $Const = x^*_{M,N} + \sum_{i=1}^{N} T_{M,i} z^*_{i,N}$ então essa solução é uma solução global para o problema PPFSDC. A principal dificuldade reside em encontrar essa constante. A alternativa adotada foi incorporar dois objetivos em um único problema, da seguinte maneira: considere agora a região viável para o problema PPFSDC no seguinte contexto:

$$\begin{aligned} &\textit{Maximize} && \exp(-F(x,z))\exp(V(z)) \\ &\textit{Sujeito a:} && V(z) \geq 1, \ \ (x,z) \in C \end{aligned}$$

Tal problema é equivalente ao problema:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && \exp(F(x,z))\exp(\tfrac{1}{V(z)}) \\ &\textit{Sujeito a:} && \frac{1}{V(z)} \leq 1, \quad (x,z) \in C \end{aligned} \tag{26}$$

Usando as desigualdades clássicas entre a média aritmética e as médias harmônica e geométrica:

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i^2}{\omega_i}\right)^{-\omega_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_i^2}{x_i} \tag{27}$$

onde $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1, \omega_i > 0$, valendo a igualdade se e somente se $\omega_i = \dfrac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Podemos convexificar a restrição (23) usando a desigualdade a seguir:

$$N^2 + 3N \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{(1+z_{ij})^2}{\omega_{i,j}}\right)^{-\omega_{i,j}} \leq 1 \tag{28}$$

Consideremos agora a função H_ω dada por:

$$H_\omega(z) = \quad N^2 + 3N \prod_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{N} \left(\frac{(1+z_{ij})^2}{\omega_{i,j}}\right)^{-\omega_{i,j}} \tag{29}$$

A desigualdade (27) quando aplicada a função $V_\omega(z)$ resulta na seguinte desigualdade:

$$V_\omega(z) \geq \tfrac{1}{H_\omega(z)}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

Afirmação 1. *$log(H_\omega)$ dada em (29)é uma função convexa.*

Com base na Afirmação 1 podemos finalmente apresentar o seguinte problema convexo:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimizar} && F(x,z) + H_\omega(z) \\ &\textit{Sujeito a:} && V_\omega(z) \leq 1,\ (x,z) \in C \end{aligned} \tag{30}$$

Acrescentando-se $2(M-1)(N-1)$ variáveis de folgas às restrições (7) e (8) e passando a restrição (23) para a função objetivo temos um problema convexo com restrições lineares de igualdade, onde P é um parâmetro de penalidade.

$$\text{PPFSDC}_\omega \qquad \begin{aligned} V_{PPFS} := \quad & \textit{Minimizar } Fobj_\omega(x,z) \\ & \textit{Sujeito à: } Aw = b, \\ & w \geq 0,\ \ 0 \leq z \leq 1,\ \ w = (x,z) \end{aligned}$$

$$\text{onde } \ Fobj_\omega(x,z) = x_{M,N} + \sum_{i=1}^{N} T_{M,i} z_{i,N} + P\log(H_\omega(z)) - \mu \sum_{i=1}^{MN} \log(x_i) - \mu \sum_{j=1}^{N^2} \log(z_j), \mu > 0.$$

A metodologia de resolver problemas de otimização não convexos por meio de DC, explorando as condições de otimalidade para problemas DC na forma canônica, não é uma prática comum na literatura de programação matemática. Um trabalho utilizando essa abordagem foi desenvolvido por [Nascimento et al., 2023] para resolver problemas de programação geométrica não convexos, e os resultados foram surpreendentes, demonstrando a eficácia da técnica. Esta é a primeira experiência que utiliza condições de otimalidade DC na tentativa de resolver problemas discretos.

5. Um método de Ponto Interior para resolver PPFSDC$_\omega$

O método de Ponto Interior foi empregado para resolver o problema PPFSDC$_\omega$. O problema dual associado ao problema PPFSDC$_\omega$ é formulado da seguinte maneira:

$$\text{(D)} \quad V_D := \text{Maximizar} \quad = \quad b^T y - w^t \nabla Fobj_\omega(x,z) + Fobj_\omega(x,z) \tag{31}$$

$$\text{Sujeito à: } A^T y + z - \nabla Fobj_\omega(x,z) \quad = \quad 0, x > 0, y \quad \text{livre}, z \geq 0. \tag{32}$$

Para resolvermos os sistemas de equações não lineares que definem as condições de otimalidade para o problema PPFSDC$_\omega$ precisamos da seguinte definição:

Definição 5. *Os residuos e o gap de dualidade serão definidos da seguinte forma:*

$$r_P(x,z) := b - Aw \tag{33}$$

$$r_D(x,y,z) := -\nabla Fobj_\omega(x,z) + A^T y + z \tag{34}$$

$$\mu(x,z) := \frac{x^T z}{n} \tag{35}$$

se $S = diag(s)$ é a matriz diagonal formada pelas coordenadas do vetor s precisamos resolver o seguinte sistema de equações lineares resultante da aplicação do método de Newton:

$$\begin{bmatrix} -\nabla^2 Fobj_\omega(x,z) - ZX^{-1} & A^t \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r_D - X^{-1}(Xz - \tau\mu e) \\ r_P \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\Delta z = -ZX^{-1}\Delta x - X^{-1}(Xz - \tau\mu e)) \tag{37}$$

O algoritmo a seguir é uma versão resumida do método preditor corretor desenvolvido e aplicado neste trabalho.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

Algorithm 1 Método Preditor Corretor

Dados: $x^0, y^0, z^0, \epsilon > 0, Max_Iter, Parada, Num_iter = 0, 0 < \alpha < 1$

Enquanto $Parada > \epsilon$ OU $Num_iter < Max_Iter$

Fase Preditora

Faça $\tau = 0$,

Resolva o sistema (36 - 37) e encontre $0 < t \leq 1$ tal que $w^0 + t\alpha\Delta w \geq 0, z^0 + t\Delta z \geq 0$

Faça $\tau = \frac{1}{2}\frac{\left(x^0+t\alpha\Delta x\right)^T z^0 + t\alpha\Delta z}{\left(w^0\right)^T z^0}$

Atualize os pesos ω dados em (27)

Fase Corretora

Resolva o sistema ((36 - 37)) e encontre $0 < t \leq 1$ tal que $x^0 + t\Delta x \geq 0, z0 + \Delta z \geq 0$

Realize uma busca linear para obter um decréscimo de $log\left(H_\omega\left(w\right)\right)$.

Atualize $x^0 = x^0 + t\alpha\Delta x, z^0 = z^0 + t\alpha\Delta z, y0 = y^0 + t\alpha\Delta y$ e o parâmetro de penalidade.

Faça $\mu^0 = \frac{\left(x^0\right)^T z^0}{n}$

Critério de parada $\leftarrow \max\left(\frac{10^2(x0)^T z0}{1+\left\|x^0\right\|_1+\left\|z^0\right\|_1}, \frac{\|r_P\|_1}{1+\left\|x^0\right\|_1}, \frac{\|r_D\|_1}{1+\left\|z^0\right\|_1}\right)$

Fim do Enquanto

6. Resultados Computacionais

O algoritmo foi implementado em MATLAB (versão R2023R), utilizando a decomposição LDL^T disponível na biblioteca nativa do MATLAB. Acreditamos que, se tivéssemos utilizado a decomposição descrita por [Vanderbei, 1997], o desempenho teria sido superior. Os resultados obtidos com a abordagem adotada foram considerados bastante satisfatórios. Os problemas testados foram extraídos do repositório disponível em: `https://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/flowshopinfo.htm`, conforme a metodologia proposta por [Taillard, 1993]. Neste trabalho, apresentamos instâncias de problemas em três cenários distintos: (i) 5 máquinas e 20 tarefas, (ii) 5 máquinas e 50 tarefas, e (iii) 10 máquinas e 50 tarefas. A Tabela 1 fornece detalhes sobre a precisão e a eficiência dos resultados obtidos para cada cenário.

Tabela 1: **Resultados Obtidos**

Resumo do Problema			**Precisão**			**Eficiência**	
Problema	Número de		Val. Originais				
N^o Name	Tarefas	Máquinas	UB	LB	Val. Obtido	Reversa	Parada
1 TD2051	20	05	1278	1232	1297	10^{-9}	0.992×10^{-08}
2 TD2052	20	05	1359	1290	1335	10^{-10}	0.9874×10^{-08}
3 TD2053	20	05	1081	1073	1082	$1e-10$	0.874×10^{-09}
4 TD2054	20	05	1293	1268	1298	6.7767×10^{-04}	1.22×10^{-11}
5 TD2055	20	05	1236	1198	1260	4.315×10^{-04}	9.739×10^{-09}
6 T2056	20	05	1195	1180	1227	4.38×10^{-11}	9.803×10^{-09}
7 TD2057	20	05	1239	1226	1253	7.894×10^{-11}	0.924×10^{-08}
8 TD20108	20	05	1206	1170	1620	0.001017	9.321×10^{-09}
9 TD5051	50	05	2724	2712	2725	9.557e-09	9.469×10^{-09}
10 TD5052	50	05	2836	2808	2819	9.939e-09	9.553e-05
11 TD5053	50	05	2621	2596	2631	3.355×10^{-04}	9.1888×10^{-09}
12 TD50101	50	10	2621	2596	2631	3.355×10^{-04}	9.1888×10^{-09}

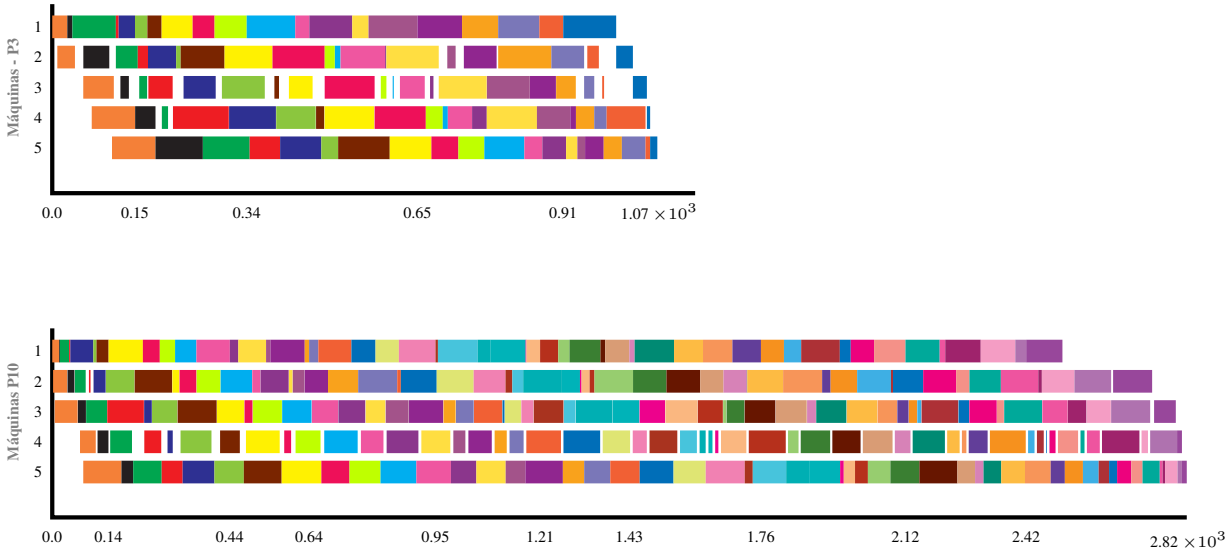
DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

A Tabela 1 apresenta os resultados computacionais obtidos em doze instâncias da literatura, extraídas do conjunto proposto por [Taillard, 1993] para o problema de Permutação *Flow Shop*. As informações estão organizadas em linhas e colunas, de forma a facilitar a análise dos resultados segundo três critérios principais: estrutura do problema, precisão das soluções e eficiência computacional. Cada linha da tabela corresponde a uma instância específica, identificada pelo seu nome e pelas dimensões do problema (número de tarefas e máquinas). As colunas estão agrupadas em três blocos: Resumo do Problema, Precisão e Eficiência. No primeiro bloco, encontram-se o nome da instância e as respectivas dimensões. No segundo bloco, são apresentados os valores de *Upper Bound* (UB) e *Lower Bound* (LB) reportados na literatura, seguidos do valor obtido pelo método proposto. A precisão é complementada pelo cálculo da diferença relativa reversa. No terceiro bloco, dedicado à eficiência, consta o critério de parada utilizado, medido numericamente, permitindo avaliar o tempo ou a condição de convergência da solução. Essa organização facilita a comparação entre as soluções obtidas e os limites conhecidos, além de indicar a eficiência e estabilidade da abordagem utilizada.

7. Gráficos de Gantt

Nesta seção, apresentamos os gráficos de Gantt correspondentes a algumas das instâncias resolvidas, com o intuito de ilustrar visualmente a alocação temporal das tarefas entre as máquinas ao longo do horizonte de planejamento, destacando a estrutura das soluções obtidas por meio do método proposto. Cada gráfico apresenta a distribuição das tarefas ao longo da linha do tempo em cada máquina, possibilitando uma análise qualitativa da capacidade do algoritmo em balancear a carga de trabalho e minimizar o tempo de completamento (*makespan*). Essa visualização é particularmente relevante para compreender o comportamento da solução frente a diferentes configurações do problema.

Figura 1: **Distribuição das tarefas por Máquina**



DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

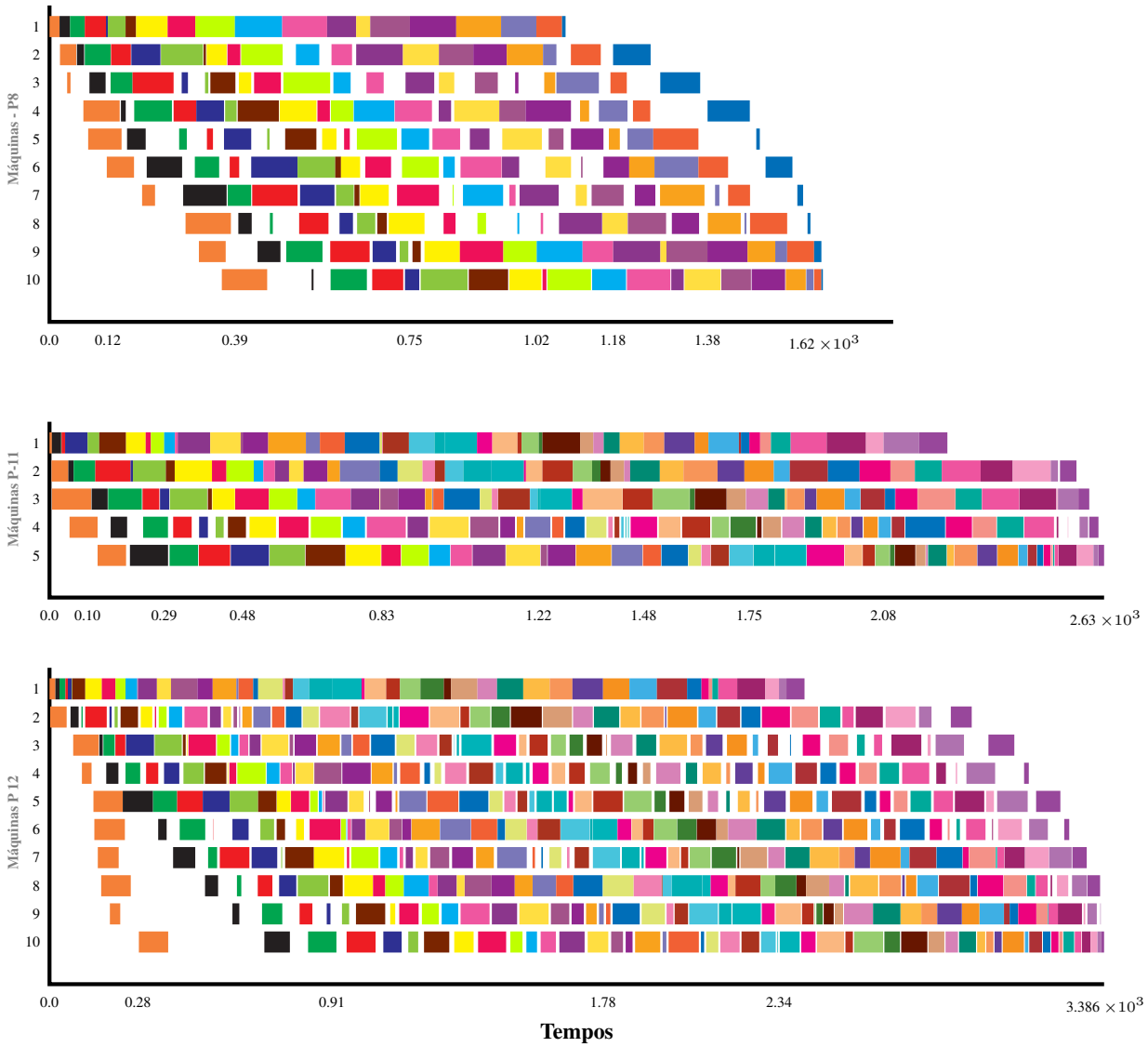


Figura 2: **Legenda**



8. Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem inovadora para a solução do problema de permutação *Flow Shop*. Essa abordagem utiliza a teoria de otimização global para diferença de funções convexas. O principal diferencial dessa abordagem reside nas condições de otimalidade que são apresentadas e aplicadas com sucesso neste trabalho, as quais, até então, têm sido pouco exploradas no contexto de problemas combinatórios. Os resultados obtidos por meio de experimentos computacionais preliminares indicam o potencial da técnica, evidenciando sua viabilidade prática. No entanto, para validar sua robustez e escalabilidade, estudos futuros serão conduzidos com foco na aplicação a instâncias de maior porte. Acreditamos, contudo, que a técnica superará

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br

nossas expectativas com a utilização da decomposição apresentada em [Vanderbei, 1997] e ao transcrevermos o código para uma linguagem de baixo nível, como a linguagem C. Tais esforços visam consolidar a aplicabilidade da técnica no âmbito da otimização combinatória.

Agradecimentos

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Universidade Federal de Paraíba (UFPB) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP - Processo n. 2024/07482-5) pelo apoio financeiro e incentivo a pesquisa científica.

Referências

Garey, M. R., Johnson, D. S., e Sethi, R. (1976). The complexity of flowshop and jobshop scheduling. *Mathematics of operations research*, 1(2):117–129.

Grabowski, J. e Pempera, J. (2007). The permutation flow shop problem with blocking. a tabu search approach. *Omega*, 35(3):302–311.

Horst, R., Pardalos, P. N., e Thoai, N. V. (1995). *Introduction to Global Optimization,349*. Kluwer Academic Publishers, Netherlands.

Johnson, S. M. (1954). Optimal two-and three-stage production schedules with setup times included. *Naval research logistics quarterly*, 1(1):61–68.

Nascimento, R. Q., Santos, R. M. O., e Maculan, N. (2023). A global interior point method for nonconvex geometric programming. *Optimization and Engineering. https://doi.org/10.1007/s11081-023-09815-x.*

Reza Hejazi, S. e Saghafian, S. (2005). Flowshop-scheduling problems with makespan criterion: a review. *International Journal of Production Research*, 43(14):2895–2929.

Stafford, E. F., Tseng, F. T., e Gupta, J. D. (2005). Comparative evaluation of milp flowshop models. *Journal of the Operational Research Society*, 56:1:88–101.

Stützle, T. (1998). Applying iterated local search to the permutation flow shop problem. Technical report, Citeseer.

Taillard, E. (1993). Benchmarks for basic scheduling problems. *European Journal of Operational Research*, 64:278–285.

Vanderbei, R. (1997). *Linear Programming – Foundations and Extensions.* Kluwer Academic Publishers, Boston.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212613
https://proceedings.science/p/212613?lang=pt-br