

Geração de Colunas com Restrições de Soft Fixing aplicadas ao Problema do Cutting Stock Unidimensional

Matheus Degliomini Silva, Abílio Pereira de Lucena Filho, Pedro Henrique González

Universidade Federal do Rio de Janeiro

R. Antônio Barros de Castro, 119 - Cidade Universitária, Rio de Janeiro - RJ, 21941-853

{mdegliomini, abiliolucena, pegonzalez}@cos.ufrj.br

RESUMO

O Problema de Cutting Stock Unidimensional (PCS) é um desafio complexo de otimização combinatória. Este estudo aplica o algoritmo de Geração de Colunas com Restrições de Soft Fixing para aprimorar a resolução do PCS. Testado em 1.600 instâncias artificiais e comparado com a formulação de Kantorovich, o método melhorou 44% dos casos não resolvidos anteriormente e encontrou soluções ótimas em 3%. Também reduziu o custo computacional e o tempo de execução, mostrando-se promissor para lidar com problemas mais complexos de forma eficiente.

PALAVRAS CHAVE. Geração de Colunas, Soft Fixing, Cutting Stock Unidimensional

OD - Otimização Discreta, POI - PO na Indústria

ABSTRACT

The Cutting Stock Problem (CSP) is a complex combinatorial optimization challenge. This study applies the Column Generation algorithm with Soft Fixing Constraints to enhance CSP resolution. Tested on 1600 artificial instances and benchmarked against the Kantorovich formulation, the method improved 44% of previously unsolved cases and found optimal solutions in 3%. It also reduced computational cost and execution time, showing promise for tackling more complex problems efficiently.

KEYWORDS. Column Generation, Soft Fixing, One-dimensional Cutting Stock

OD - Discrete Optimization

1. Introdução

O Problema do Cutting Stock Unidimensional (PCS) é um dos problemas clássicos da pesquisa operacional, onde Kantorovich [1939] introduziu abordagens matemáticas para otimização do uso de recursos limitados. Desde então, o PCS tornou-se um problema amplamente estudado, com um destaque para Gilmore e Gomory [1961], que introduziram o método de Geração de Colunas como uma estratégia eficaz para tratar formulações com um número exponencial de padrões de corte.

O PCS tem como objetivo minimizar o desperdício de material ao cortar objetos de grandes dimensões (como bobinas, chapas, barras ou rolos) em itens menores, atendendo a uma demanda específica. Trata-se de um problema de otimização combinatória, cuja complexidade está não apenas na escolha dos padrões de corte, mas também na necessidade de encontrar soluções de alta qualidade em tempos computacionais viáveis. Por permitir soluções fracionárias e gerar muitas soluções degeneradas como concluíram Lübbecke e Desrosiers [2005], a formulação relaxada acaba tornando o processo de encontrar boas soluções de forma rápida e eficiente ainda mais desafiador.

Este trabalho propõe uma abordagem híbrida, integrando a técnica de Geração de Colunas com uma estratégia de Soft Fixing aplicada às variáveis que compõem a solução do problema. O objetivo é acelerar a convergência para soluções inteiras de boa qualidade, ao mesmo tempo em que se preserva a estrutura matemática da formulação original. A proposta é avaliada por meio de experimentos computacionais, comparando o desempenho com abordagens tradicionais e discutindo as implicações da técnica no contexto de problemas de grande porte.

2. Metodologia

Esta seção apresenta a metodologia utilizada para a proposta de incorporação de Restrições de Soft Fixing ao algoritmo de Geração de Colunas. A Seção 2.1 descreve a estrutura do algoritmo de Geração de Colunas utilizada e a Seção 2.2 apresenta algumas Restrições de Soft Fixing desenvolvidas pensando no PCS.

2.1. Geração de Colunas

A estrutura do algoritmo de Geração de Colunas utilizada neste trabalho segue a proposta de Lübbecke e Desrosiers [2005], na qual o Problema Mestre Restrito (PMR) é modelado como um Problema de Cobertura de Conjuntos. O subproblema, responsável pela geração de novos padrões de corte, é formulado como um Problema da Mochila Inteira.

2.2. Restrições de Soft Fixing

Nesta Seção, são apresentadas as restrições de Soft Fixing desenvolvidas para o PCS, que serão incorporadas ao Problema Mestre Restrito com o objetivo de melhorar a solução corrente, orientando a geração de novas variáveis mais promissoras. Cada tipo de restrição foi aplicado de forma isolada.

A Figura 1 apresenta o fluxograma do algoritmo de Geração de Colunas com Soft Fixing, desde a construção da solução inicial até a resolução final do problema inteiro restrito. O processo inicia-se com a geração de uma solução básica viável e a resolução inteira do Problema Mestre Restrito (PMR).

Caso a otimalidade não seja atingida, entra-se na fase de Soft Fixing, em que o parâmetro α , inicialmente em 0,9, define a taxa de fixação da solução corrente. A cada iteração, o algoritmo de Geração de Colunas é executado com Restrições de Soft Fixing aplicadas ao PMR.

Se uma nova coluna for gerada, α retorna ao valor inicial; caso contrário, é reduzido em 0,1. O laço termina quando α fica abaixo de 0,1. Ao final, o PMR é resolvido novamente em sua forma inteira para encerrar o algoritmo.

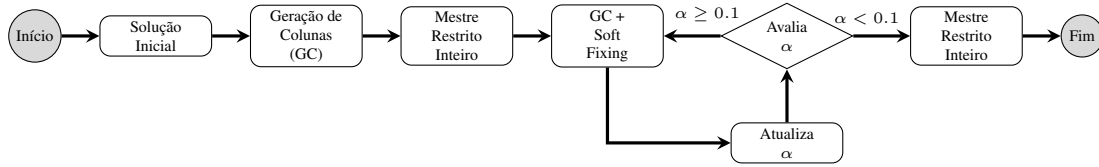


Figura 1: Fluxograma do Geração de Colunas com Soft Fixing

I. Soft Fixing 4: Fixando pela Demanda Atendida

Com a Restrição de Soft Fixing (1), são mantidas partes das demandas de cada peça que já foram atendidas na solução obtida pelo algoritmo de Geração de Colunas.

$$\sum_{j \in J^*} a_{ij} x_j \geq \left\lceil \alpha \sum_{j \in J^*} a_{ij} \bar{x}_j \right\rceil, \quad i = 1, \dots, m, \alpha \in \{0,9, 0,8, \dots, 0,1\} \quad (1)$$

Assim, impõem-se limites inferiores às variáveis associadas às colunas da solução atual, exigindo que sua soma atinja ao menos uma fração (definida por α) da quantidade de peças cortadas. Caso nenhuma nova coluna seja gerada, α é reduzido gradualmente até atingir o critério de parada.

II. Soft Fixing 5: Fixando por Uso de Padrões

Com essa abordagem, é estabelecido um limite mínimo para a utilização dos padrões de corte que compõem a solução obtida pelo algoritmo de Geração de Colunas.

$$x_j \geq \lceil \alpha \bar{x}_j \rceil, \quad \forall j \in J^*, \quad \alpha \in \{0,9, 0,8, \dots, 0,1\} \quad (2)$$

Dessa forma, é definido um percentual mínimo α para a utilização de cada padrão de corte presente na solução original, antes da adição dessa restrição. O parâmetro α segue o mesmo procedimento de decremento aplicado nas abordagens anteriores, até que o critério de parada do algoritmo seja atingido.

III. Soft Fixing 7: Combinação de Soft Fixing 4 e 5

Nesta abordagem, são aplicadas sequencialmente as Restrições de Soft Fixing 4 e 5. Inicialmente, a Restrição (1) é incorporada ao PMR e o algoritmo de Geração de Colunas é executado. Em seguida, (1) é removida e a Restrição (2) é adicionada, dando início a uma nova execução do algoritmo. Ao final, a Restrição (2) também é removida e verifica-se se o parâmetro α deve ser decrementado conforme o critério de atualização do algoritmo.

IV. Soft Fixing 8: Combinação de Soft Fixing 5 e 4

Nesta abordagem, são aplicadas sequencialmente as Restrições de Soft Fixing 5 e 4. Primeiro, a Restrição (2) é incorporada ao PMR e o algoritmo de Geração de Colunas é executado. Em seguida, a Restrição (2) é removida e a Restrição (1) é inserida, dando início a uma nova execução do algoritmo. Por fim, a Restrição (1) é removida, e então verifica-se se o parâmetro α deve ser decrementado conforme o critério de atualização estabelecido.

3. Experimentos Computacionais

Para os experimentos computacionais foram utilizadas 1600 instâncias geradas a partir do algoritmo proposto por Wäscher e Gau [1995].

Das 1600 instâncias analisadas, 452 não alcançaram a solução ótima utilizando apenas o algoritmo de Geração de Colunas. Sobre esse subconjunto mais desafiador, foram aplicadas as Restrições de Soft Fixing, resultando em melhorias para 199 instâncias e na obtenção da otimalidade em 15 delas, um indicativo promissor da eficácia da abordagem.

Com a aplicação das Restrições de Soft Fixing nas instâncias em que o algoritmo de Geração de Colunas, isoladamente, não encontrou a solução ótima, foi possível melhorar a solução em 44% dos casos. O desempenho das melhorias, detalhado por tamanho de instância, está apresentado na Tabela 1.

Tamanho	10	20	30	40	50
% de Melhoria por Tamanho	26,22	38,46	36,00	51,49	58,33

Tabela 1: Desempenho das Restrições de Soft Fixing por Tamanho

A Tabela 2 apresenta estatísticas descritivas dos tempos de execução das instâncias para cada uma das abordagens utilizadas neste trabalho. Entre elas, a restrição de Soft Fixing 5 se destacou por apresentar o menor tempo médio, sendo, portanto, a mais eficiente do ponto de vista computacional. Por outro lado, a restrição 7 apresentou a menor variabilidade nos tempos de execução, conforme indicado pelo seu coeficiente de variação, o que sugere um desempenho mais estável.

Soft Fixing	Média (s)	Mínimo (s)	Máximo (s)	Coef. de Variação (%)
4	179,08	0,0213	23.115,26	7,60
5	53,35	0,0281	5.260,23	7,24
7 (4&5)	75,70	0,0546	5.995,16	6,21
8 (5&4)	64,93	0,0495	5.092,74	6,35

Tabela 2: Estatísticas do tempo total de execução de cada Soft Fixing

Referências

- Gilmore, P. C. e Gomory, R. E. (1961). A linear programming approach to the cutting-stock problem. *International Business Machines Corporation*, 9(6):849–859.
- Kantorovich, L. V. (1939). Mathematical methods of organizing and planning production. *Lenin-grad State Universit.*
- Lübbecke, M. e Desrosiers, J. (2005). Selected topics in column generation. *Operations Research*, 53(6):1007 – 1023.
- Wäscher, G. e Gau, T. (1995). Cutgen1: A problem generator for the standard one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*, 84:572 – 579.