

## **Formulações de Programação Inteira Aplicadas ao Problema de Programação da Grade de Horários da Graduação da ENCE**

**Daniel Rodrigues Ferreira Junior**

Escola Nacional de Ciências Estatísticas – ENCE/IBGE  
Rua André Cavalcanti, 106, Bairro de Fátima – Centro – Rio de Janeiro – RJ  
danielrf.rodriques2016@gmail.com

**Jose André de Moura Brito**

Escola Nacional de Ciências Estatísticas – ENCE/IBGE  
Rua André Cavalcanti, 106, Bairro de Fátima – Centro – Rio de Janeiro – RJ  
jose.m.brito@ibge.gov.br

**Gustavo Silva Semaan**

Universidade Federal Fluminense (INFES/UFF)  
Av. João Jasbick, s/nº – Aeroporto – Santo Antônio de Pádua – RJ  
gustavosemaan@id.uff.br

### **RESUMO**

A programação de uma grade de horários é uma tarefa realizada todos os anos pelos gestores em muitas universidades — públicas e privadas. Em muitas dessas instituições, tal tarefa é feita de forma manual, sem o suporte de uma ferramenta que possibilite automatizar esse processo. Este artigo propõe duas formulações de programação inteira para definição da grade de horários das disciplinas da ENCE (Escola Nacional de Ciências Estatísticas), que se diferenciam quanto à função objetivo e às restrições. As formulações foram implementadas e testadas em três *solvers*, considerando cenários que refletem a realidade da grade da ENCE. A partir da avaliação da sua eficácia e eficiência, através da apresentação de um conjunto de resultados e análises, concluiu-se que as formulações constituem como uma boa alternativa à resolução do problema.

**PALAVRAS CHAVE.** Programação Inteira, Programação de Horários, Formulações.

**Tópicos (PM, OC)**

### **ABSTRACT**

Scheduling a timetable is a task performed annually by administrators at many universities — both public and private. At many of these institutions, this task is performed manually, without the support of a tool that allows for automation. This article proposes two integer programming formulations for defining the timetable for courses at ENCE (Escola Nacional de Ciências Estatísticas), which differ in their objective function and constraints. The formulations were implemented and tested in three solvers, considering scenarios that reflect the reality of ENCE's timetable. After evaluating their effectiveness and efficiency, through the presentation of a set of results and analyses, it was concluded that these formulations constitute a good alternative for solving the problem.

**KEYWORDS.** Integer Programming . Timetabling. Formulations.

**Paper topics (MP, CO)**

## 1. Introdução

O planejamento de uma grade de horários é realizado, geralmente, em todos os semestres por instituições de ensino superior públicas e privadas. Tal planejamento demanda a avaliação de uma série de questões, como a alocação de professores e salas às disciplinas, disponibilidade de equipamentos etc.

Em geral, a resolução computacional desse problema - pertencente à classe de problemas NP-HARD [Even et al., 1976] - é custosa em termos de tempo. Isso significa que, à medida que o número de disciplinas, professores, salas e restrições aumenta, o espaço de soluções viáveis cresce substancialmente, tornando inviável a obtenção de uma solução ótima por métodos de enumeração exaustiva. Ainda neste sentido, a aplicação de formulações de programação linear inteira, para resolver algumas instâncias desses problemas, pode demandar um razoável tempo computacional para produzir uma solução ótima ou até mesmo viável.

Na Escola Nacional de Ciências Estatísticas (ENCE<sup>1</sup>) — no seu curso de graduação em Estatística — essa alocação é feita pelos gestores responsáveis pela graduação, de forma manual e sem o auxílio de ferramentas que otimizem esse processo tão importante no contexto acadêmico. Inspirado em um projeto realizado na Universidade Federal Fluminense (UFF), em que a definição da grade de horários envolve cinco cursos de graduação de um mesmo departamento, que compartilham professores em turnos distintos, além de depender de disciplinas de um segundo departamento, o presente estudo busca fornecer, de maneira eficiente e eficaz, soluções para o problema específico da ENCE. Destaca-se que, no estudo de caso da UFF, foram utilizadas abordagens estocásticas, sobretudo o uso de algoritmos baseados em metaheurísticas, enquanto neste trabalho, duas formulações de programação matemática foram propostas e resolvidas utilizando-se três diferentes *solvers* nos experimentos computacionais.

Em específico, seguindo um procedimento padrão adotado há mais de uma década na ENCE, primeiramente, os dias e horários das disciplinas são definidos a priori pela coordenação de graduação, mediante reuniões com sua equipe gerencial. Em uma segunda etapa, a coordenação envia essa grade montada com disciplinas e horários, solicitando aos docentes que indiquem, pelo menos, cinco disciplinas que estão aptos a lecionar no referido semestre. Por fim, considerando as respostas dos docentes e algumas restrições quanto às alocações indicadas e combinação de dias/horários, a coordenação de graduação monta a grade de horários manualmente. Conforme será discutido na seção 3, tal forma de abordar este problema pode trazer dificuldades para elaborar uma grade que seja viável.

Considerando tais dificuldades e a necessidade de construir uma grade horários de forma automática, que atenda, simultaneamente, de forma satisfatória às demandas dos gestores da ENCE e dos docentes que atuam no seu curso de graduação, este artigo traz a proposta de duas formulações de programação linear inteira, que foram aplicadas à resolução do problema de programação da grade de horários da ENCE, sendo avaliada a sua eficiência, a qualidade das soluções produzidas e seus impactos na rotina da graduação.

Além da introdução, este trabalho está dividido da seguinte forma: na seção 2 é apresentada uma revisão da literatura sobre o problema de programação de horários e a seção 3 traz uma descrição formal do problema da ENCE. Na seção 4, são detalhadas as duas formulações propostas. A seção 5 traz os resultados computacionais, com uma análise comparativa das abordagens. Por fim, a seção 6 apresenta as conclusões e possíveis direções para trabalhos futuros.

<sup>1</sup>Fundada em 06 de março de 1953, a ENCE é uma instituição Federal de Ensino Superior que faz parte do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE.

## 2. Revisão da Literatura

O problema de programação de horários tem sido estudado desde os anos 60 [Carvalho, 2011] e possui ampla aplicabilidade, podendo ser considerado em diferentes contextos organizacionais que demandam a elaboração de quadros de horários, como indústrias, hospitais, companhias aéreas, instituições de ensino e eventos esportivos [Jardim et al., 2016]. De uma forma básica, o problema de programação de horários, em um nível universitário, envolve a alocação eficiente de recursos, como professores, salas, disciplinas e horários, respeitando as restrições específicas de cada instituição. As restrições podem ser de: ordem física, como salas e laboratórios; de ordem pessoal, como professores e estudantes; e as intangíveis, como dias, períodos e disciplinas [Bucco et al., 2017]. O PPHU (Problema de Programação de Horários Universitários) é, em grande parte de suas variantes, classificado como NP-difícil, implicando inexistência de algoritmos que garantam soluções ótimas em tempo polinomial para todos os seus casos. A dificuldade para resolver certas instâncias pode variar conforme a rigidez das restrições envolvidas, característica que demanda o uso de algoritmos heurísticos para obtenção de soluções de boa qualidade, que não necessariamente correspondem a ótimos globais. Nesse cenário, métodos baseados em metaheurísticas se destacam como abordagens promissoras [Lewis, 2008].

Appleby et al. [1961] propuseram uma metodologia que possibilita a criação de horários escolares utilizando um computador digital de propósito geral, permitindo a geração de uma grade de horários para uma escola de médio porte em aproximadamente 1 hora e 30 minutos. Em [Csimá e Gotlieb, 1964] foi proposto um método para a construção de horários escolares que utilizava um procedimento iterativo envolvendo operações com matrizes booleanas, permitindo, dessa forma, representar a disponibilidade de professores e turmas. A abordagem descrita permite um maior controle sobre as restrições, além de garantir soluções ótimas ou quase ótimas.

Colorni et al. [1998] investigaram o uso de três metaheurísticas para resolver o problema de grade de horários, caracterizado como um problema de otimização combinatória, com múltiplas restrições e de alta complexidade computacional (NP-difícil). Os autores propuseram um modelo com estrutura hierárquica que abarca uma função objetivo e procedimentos de busca local aplicados a matrizes de horários. Foram avaliadas abordagens que fazem uso das metaheurísticas *Simulated Annealing*, *Tabu Search* e *Genetic Algorithms*, sendo esta última testada com e sem aprimoramento via utilização de uma busca local [Gendreau e Potvin, 2019]. Os resultados indicaram que o algoritmo genético com busca local e a busca tabu com relaxamentos temporários (estratégia que permite, temporariamente, violar algumas restrições ou aceitar soluções piores — com penalidade maior — com o objetivo de escapar de ótimos locais de baixa qualidade e explorar melhor o espaço de soluções) superaram tanto o *Simulated Annealing* quanto os horários elaborados manualmente, produzindo horários com menor penalidade média.

Outro enfoque comum na literatura para a construção de grades horárias envolve o desenvolvimento de formulações de programação linear inteira (PLI) ou programação linear inteira mista (PLIM), que são resolvidas mediante aplicação de algoritmos como *branch-and-bound* ou *branch-and-cut* [Wolsey, 2020]. Neste contexto, Bucco et al. [2017] propuseram um modelo voltado à minimização do número de salas de aula utilizadas, sendo observados resultados promissores ao aplicar a metodologia a dados reais de uma universidade pública brasileira. Como demonstrado no estudo de [Silva, 2021], a implementação de um modelo matemático para a criação da grade de horários permitiu uma otimização considerável na alocação de professores e disciplinas, atendendo todas as restrições fortes e minimizando a violação das restrições fracas. Além disso, o modelo contribuiu para a diminuição do número de aulas vagas e do número médio de dias em que os professores precisariam ir à escola, gerando uma solução mais eficaz em comparação com o cenário atual da escola. O trabalho de Santos [2022] propôs uma heurística do tipo Fixa-e-Otimiza e es-

estratégias de pré-processamento para abordar o Problema de Agendamento de Horários de Cursos Universitários apresentado na ITC2019 (International Timetabling Competition 2019), que é uma competição internacional voltada para o desenvolvimento e avaliação de algoritmos aplicados ao problema de programação de horários. Dentre os principais desafios, destacam-se a complexidade das restrições de distribuição e o porte elevado das instâncias, que geram milhões de variáveis e restrições. As estratégias de pré-processamento foram eficazes na redução do tamanho dos modelos, possibilitando, por exemplo, uma diminuição de 22,03% no número de variáveis. A implementação da heurística apresentou bons resultados, superando, em alguns casos, as melhores soluções apresentadas na ITC2019. Conceição [2023] procurou automatizar, utilizando a linguagem Python, a geração da grade horária do curso de Engenharia de Produção da UFRJ-Macaé, fazendo leitura e escrita em Excel com o openpyxl e modelando o problema por restrições no Google OR-Tools. Ao tentar obter uma solução para o modelo completo, o autor constatou que ele era inviável (nenhuma alocação satisfazia todas as restrições), fato que motivou a implementação de uma heurística de exclusão iterativa de disciplinas menos prioritárias, removendo-as em ordem da lista até restarem 26, quando enfim obteve uma solução viável. O tempo total para produzir uma solução viável foi de aproximadamente 615 segundos.

### 3. Estudo de Caso: Quadro de Horários da ENCE

Além de seus cursos de especialização e pós-graduação, a ENCE oferece o curso de graduação em Estatística, estruturado em 8 períodos, com 32 disciplinas obrigatórias e, em média, 10 disciplinas eletivas, sendo a oferta semestral planejada de modo a evitar sobreposição entre turmas e garantir a disponibilidade de salas. As aulas são ofertadas em dois turnos, manhã e noite, com uma alternância semestral entre os períodos — ímpares nos primeiros semestres e pares nos segundos semestres. As disciplinas do sétimo período são sempre alocadas à noite, enquanto no oitavo período está alocado o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), que não possui horário definido. Cada turno conta com dois blocos de aula por dia: o primeiro bloco vai das 8h00 às 10h00 (manhã) ou das 18h20 às 20h30 (noite), e o segundo bloco das 10h10 às 12h10 (manhã) ou das 20h30 às 22h30 (noite). O total de horários semanais é igual a 20, considerando os 5 dias da semana e o total de blocos dos turnos da manhã e da noite.

Antes de apresentar uma descrição do problema da definição da grade de horários da graduação da ENCE, é importante destacar que esse problema corresponde a uma versão mais simples do problema de planejamento de horários em sua forma mais geral, dado que a alocação de turmas a salas e horários é feita a priori por decisão da coordenação de graduação. Assim sendo, a resolução do problema fica restrita, basicamente, à designação de professores às disciplinas obrigatórias, pois as disciplinas eletivas variam de semestre para semestre, sendo, em geral, definidas pela coordenação de graduação.

Em todo início de semestre, a coordenação envia um e-mail para os docentes solicitando que indiquem quais disciplinas desejam lecionar, solicitando que indiquem, no mínimo, 5 disciplinas sempre que possível, facilitando, assim, a construção de uma alocação viável traduzida, em um primeiro momento, em uma grade em que todas as disciplinas sejam lecionadas por um docente, primordialmente as disciplinas obrigatórias.

Para uma alocação ser válida, ela deve respeitar as restrições que foram definidas em comum acordo com a coordenação de graduação. Ou seja, para a elaboração da grade do curso de graduação, são consideradas algumas restrições fortes e fracas que devem ser atendidas, dentre as fortes estão: (i) um professor só pode ser alocado a disciplinas para as quais indicou que tem o interesse em lecionar no semestre; (ii) cada disciplina deve ter um único professor alocado, para simplificar o modelo e deixar que a coordenação faça um ajuste manual na solução, adicionando, por exemplo, duplas de professores que irão, eventualmente, compartilhar disciplinas (as quais são

poucas disciplinas e não afetam as modelagens propostas); (iii) não existam conflitos de horário, ou seja, um professor não pode ser alocado a duas ou mais disciplinas que estão no mesmo horário. As restrições fracas são: (i) limite de carga máxima de trabalho de cada professor, ou seja, um professor só pode lecionar, no máximo, um determinado número de disciplinas; (ii) restrição de turno único por professor, ou seja, o docente deve ser alocado ou de manhã ou de noite, não podendo trabalhar em dois turnos; (iii) restrição que define os valores da variável indicativa  $z_{iw}$ , que assume valor 1 se o professor  $i$  estiver alocado a pelo menos uma disciplina no dia  $w$  (presente na formulação 2).

De forma a contemplar tais restrições, garantindo, dessa forma, a produção de soluções que sejam implementáveis para a grade, foram desenvolvidas duas formulações de programação linear inteira binária para o problema descrito, onde buscou-se maximizar a função objetivo de ambas — relacionada à alocação professor x disciplinas (presente nas formulações 1 e 2) e a minimização do número total de dias em que os professores precisam comparecer à ENCE (dias idos) (presente na formulação 2), respeitando as restrições impostas. Na próxima seção serão apresentadas essas formulações, com as suas respectivas funções objetivo e restrições.

#### 4. Formulações Propostas

Esta seção apresenta as formulações propostas, que se diferenciam pelas respectivas funções objetivo e pelas restrições.

##### 4.1. Formulação 1 (F1)

Nesta formulação busca-se **maximizar** o número de disciplinas com professores alocados, garantindo que: (i) cada disciplina tenha exatamente um professor alocado; (ii) os professores sejam alocados apenas a disciplinas para as quais fizeram indicação; (iii) não ultrapassem a carga máxima de disciplinas permitida; (iv) não existam conflitos de horário; (v) cada professor atue apenas em um único turno (manhã ou noite).

##### Parâmetros de entrada da formulação:

(i)  $p$ : número total de professores disponíveis; (ii)  $d$ : número total de disciplinas; (iii)  $n$ : número total de horários disponíveis (cada horário corresponde a uma combinação única de dia e horário); (iv)  $a_{ij}$ : entradas de uma matriz  $A_{p \times d}$  (binária) de aptidão, sendo  $a_{ij} = 1$  se o professor  $i$  fez indicação prévia para lecionar a disciplina  $j$ , e 0 caso contrário; (v)  $h_{jk}$ : entradas de uma matriz  $H_{d \times n}$  (binária) de horários, sendo  $h_{jk} = 1$  se a disciplina  $j$  é ofertada no horário  $k$ , e 0 caso contrário. No problema da ENCE, temos 20 horários considerando os blocos dos turnos da manhã e noite e os dias da semana; (vi)  $t_{j1}$ : entradas da coluna 1 de uma matriz  $T_{d \times 2}$  que indica se a disciplina  $j$  ocorre no turno da manhã (1 = sim, 0 = não); (vii)  $t_{j2}$ : entradas da coluna 2 de uma matriz  $T_{d \times 2}$  que indica se a disciplina  $j$  ocorre no turno da noite (1 = sim, 0 = não).

##### Variáveis:

(i)  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ : variável binária que assume valor 1 se o professor  $i$  está alocado à disciplina  $j$  e zero em caso contrário; (ii)  $y_{i1} \in \{0, 1\}$ : variável binária que assume valor 1 se o professor  $i$  estiver alocado ao turno da manhã; (iii)  $y_{i2} \in \{0, 1\}$ : variável binária que assume valor 1 se o professor  $i$  estiver alocado ao turno da noite.

##### Função objetivo:

$$\max \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^d x_{ij} \quad (1)$$

A função objetivo a ser maximizada corresponde ao número total de disciplinas com professores alocados, ou seja, deve-se garantir que o maior número possível de disciplinas tenha um professor alocado, respeitando as restrições da formulação.

### Restrições:

$$\sum_{i=1}^p x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, d\} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} \leq 2, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (3)$$

$$x_{ij} \leq a_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, d\} \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} h_{jk} \leq 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} t_{j1} \leq 2y_{i1}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} t_{j2} \leq 2y_{i2}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (7)$$

$$y_{i1} + y_{i2} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (8)$$

A restrição (2) garante que cada disciplina terá, exatamente, um único professor alocado. A restrição (3) garante que cada um dos professores irá lecionar, no máximo, duas disciplinas. A restrição (4) garante que um professor  $i$  só será alocado a uma disciplina  $j$  a qual fez a indicação prévia ( $a_{ij} = 1$ ). A restrição (5) garante que um professor não irá lecionar duas ou mais disciplinas em um mesmo dia e horário. Por fim, o grupo definido pelas restrições (6)-(8) garante que um professor só irá lecionar suas disciplinas, exclusivamente, no turno da manhã ou no turno da noite.

### 4.2. Formulação 2 (F2)

Esta formulação possibilita resolver o problema de alocação de professores a disciplinas considerando: (i) **maximizar** o número de disciplinas com professores atribuídos, promovendo maior cobertura; (ii) **minimizar** o número total de dias em que os professores precisam comparecer à ENCE, propiciando uma melhor distribuição da carga horária.

#### Parâmetros de entrada da formulação:

(i)  $p$ : número total de professores disponíveis; (ii)  $d$ : número total de disciplinas; (iii)  $n$ : número total de horários disponíveis (cada horário corresponde a uma combinação única de dia e horário); (iv)  $s$ : número de dias da semana. (v)  $a_{ij}$ : entradas de uma matriz  $A_{p \times d}$  (binária) de aptidão, sendo  $a_{ij} = 1$  se o professor  $i$  fez indicação prévia para lecionar a disciplina  $j$ , e 0 caso contrário; (vi)  $h_{jk}$ : entradas de uma matriz  $H_{d \times n}$  (binária) de horários, sendo  $h_{jk} = 1$  se a disciplina  $j$  é ofertada no horário  $k$ , e 0 caso contrário. No problema da ENCE, temos 20 horários considerando os blocos dos turnos da manhã e noite e os dias da semana; (vii)  $t_{j1}$ : entradas da coluna 1 de uma matriz  $T_{d \times 2}$  que indica se a disciplina  $j$  ocorre no turno da manhã (1 = sim, 0 = não); (viii)  $t_{j2}$ : entradas da coluna 2 de uma matriz  $T_{d \times 2}$  que indica se a disciplina  $j$  ocorre no turno da noite (1 = sim, 0 = não); (ix)  $f_{jw}$ : entradas de uma matriz  $F_{d \times s}$  (binária) de dias, sendo  $f_{jw} = 1$  se a disciplina  $j$  é ofertada no dia  $w$ , e 0 caso contrário.

#### Variáveis:

(i)  $x_{ij} \in \{0, 1\}$ : 1 se o professor  $i$  lecionará a disciplina  $j$ ; (ii)  $z_{iw} \in \{0, 1\}$ : 1 se o professor  $i$  trabalhará no dia  $w$ ; (iii)  $y_{i1} \in \{0, 1\}$ : 1 se o professor  $i$  atuará no turno da manhã; (iv)  $y_{i2} \in \{0, 1\}$ : 1 se o professor  $i$  atuará no turno da noite;

### Função objetivo:

$$\max \left( \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^d x_{ij} - \sum_{i=1}^p \sum_{w=1}^s z_{iw} \right) \quad (9)$$

A função objetivo em (9) foi elaborada com o propósito de **maximizar o número de disciplinas com professores alocados**, representada pela soma das variáveis  $x_{ij}$ , com  $x_{ij} = 1$  se o professor  $i$  foi alocado à disciplina  $j$ . Simultaneamente, busca-se **minimizar o número total de dias em que os professores precisam comparecer à ENCE**, representado pela soma das variáveis  $z_{iw}$ , onde  $z_{iw} = 1$  indica que o professor  $i$  possui pelo menos uma disciplina alocada ao dia  $w$ . Dessa forma, a função objetivo equilibra a **maximização da cobertura das disciplinas** com a **otimização da distribuição semanal da carga dos professores**, viabilizando a produção de soluções que concentrem as atividades de cada docente em menos dias da semana.

### Restrições:

$$\sum_{i=1}^p x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, d\} \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} \leq 2, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (11)$$

$$x_{ij} \leq a_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall j \in \{1, \dots, d\} \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} h_{jk} \leq 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall k \in \{1, \dots, n\} \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} t_{j1} \leq 2y_{i1}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (14)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} t_{j2} \leq 2y_{i2}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (15)$$

$$y_{i1} + y_{i2} = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^d x_{ij} f_{jw} \leq d \times z_{iw}, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall w \in \{1, \dots, s\} \quad (17)$$

As restrições de (10) até (16) são análogas às restrições (2)-(8), apresentadas na formulação 1. A restrição (17) garante que a variável  $z_{iw}$  só assumirá o valor 1 (indicando que o professor  $i$  irá à ENCE no dia  $w$ ) caso ele esteja efetivamente alocado a ao menos uma disciplina que ocorra nesse dia; caso contrário,  $z_{iw}$  recebe o valor 0. Adicionalmente, as Tabelas 1 e 2 trazem, respectivamente, o total de variáveis e restrições das formulações, que são funções do número de professores, disciplinas, horários e dias.

Tabela 1: Quantidade de variáveis das formulações 1 e 2

| Variável                                                     | Formulação 1       | Formulação 2           |
|--------------------------------------------------------------|--------------------|------------------------|
| $x_{ij}$ : alocação do professor $i$ à disciplina $j$        | $p \times d$       | $p \times d$           |
| $y_{i1}$ : indicação de que o professor $i$ leciona de manhã | $p$                | $p$                    |
| $y_{i2}$ : indicação de que o professor $i$ leciona à noite  | $p$                | $p$                    |
| $z_{iw}$ : professor $i$ trabalha no dia $w$                 | –                  | $p \times s$           |
| <b>Total de variáveis</b>                                    | $p \times (d + 2)$ | $p \times (d + s + 2)$ |

Tabela 2: Quantidade de restrições das formulações 1 e 2

| Restrição                                        | Formulação 1               | Formulação 2                   |
|--------------------------------------------------|----------------------------|--------------------------------|
| Cada disciplina é atribuída a um único professor | $d$                        | $d$                            |
| Cada professor leciona no máximo 2 disciplinas   | $p$                        | $p$                            |
| Aptidão do professor à disciplina                | $p \times d$               | $p \times d$                   |
| Sem conflitos de horário                         | $p \times n$               | $p \times n$                   |
| Professor no turno da manhã (se for o caso)      | $p$                        | $p$                            |
| Professor no turno da noite (se for o caso)      | $p$                        | $p$                            |
| Exclusividade de turno por professor             | $p$                        | $p$                            |
| Vincula presença do prof. ao dia da disciplina   | –                          | $p \times s$                   |
| <b>Total de restrições</b>                       | $p \times (4 + d + n) + d$ | $p \times (4 + d + n + s) + d$ |

## 5. Resultados Computacionais

Esta seção traz uma apresentação dos experimentos realizados com as duas formulações que foram propostas. A subseção 5.1 descreve o cenário utilizado nos experimentos, juntamente com os dados de entrada e os *solvers*. Complementando, subseção 5.2 apresenta os resultados que foram obtidos a partir dos experimentos.

### 5.1. Cenário utilizado

O cenário considerado é formado por dados reais referentes ao primeiro semestre de 2025, aos quais foram disponibilizados pela coordenação de graduação da ENCE. Na primeira formulação, foram utilizados os seguintes dados de entrada: dados das disciplinas indicadas previamente por cada um dos professores; dados dos horários das disciplinas, em que é indicado em qual horário a disciplina será oferecida; dados dos turnos das disciplinas, ou seja, se a disciplina está alocada ao turno da manhã ou da noite. Já na segunda formulação, foi adicionado, apenas, mais um dado de entrada correspondente aos dias em que a disciplina será oferecida.

O cenário contemplou as 32 disciplinas obrigatórias, 27 professores, 20 horários e 5 dias da semana, de forma que a alocação final de professores às disciplinas respeitasse as restrições pré-estabelecidas. Já as disciplinas eletivas não foram consideradas na modelagem, pois elas variam de semestre para semestre, logo a decisão de quais disciplinas eletivas serão oferecidas no semestre é uma decisão interna da instituição de ensino. Os dados de entrada foram distribuídos em planilhas eletrônicas que são importadas para a montagem da grade de horários, que são: (i) **Disponibilidade**: indica a disponibilidade dos professores em relação às disciplinas nas quais têm interesse ou podem lecionar; (ii) **Horários**: indica os horários em que as disciplinas estão previamente alocadas, ainda sem professor associado; (iii) **Turnos**: indica os turnos em que as disciplinas estão previamente alocadas, ainda sem professor associado; (iv) **Dias**: indica os dias em que as disciplinas estão previamente alocadas, ainda sem o professor associado.

### 5.2. Experimentos Computacionais

Todos os experimentos reportados neste artigo foram realizados em um computador dotado de um processador Intel Core i7 de 3ª geração, CPU 2.20GHz, 8GB de RAM e sistema operacional Windows 11. As formulações foram implementadas na linguagem R, utilizando o pacote

**ompr** para modelar os problemas de forma mais intuitiva e estruturada, que permite a definição das variáveis de decisão, restrições e função objetivo de maneira encadeada, automática e mais legível. Para a resolução das formulações F1 e F2, descritas nas subseções 4.1 e 4.2, foi utilizada a integração com o pacote **ROI**, que possibilita a conexão com diferentes *solvers* de otimização que resolvem problemas de programação linear e programação linear inteira. A seguir será apresentada uma comparação entre os diversos *solvers* utilizados, sendo eles: GLPK (pacote Rglpk), SYMPHONY (pacote Rsymphony) e HIGHS (pacote highs).

### Formulação 1 – Otimização sem Penalização por Dias Idos

A formulação contou com 918 variáveis e 1544 restrições, e os três *solvers* utilizados (**GLPK**, **SYMPHONY** e **HIGHS**) foram capazes de produzir a solução ótima, com valor da função objetivo igual a 32, evidenciando que a formulação está bem definida e que os métodos implementados nos *solvers* são eficazes e eficientes para resolver o modelo proposto. Embora o desempenho computacional — tempo de execução — tenha sido similar entre os *solvers* (variação entre 28,4s e 29,5s), observou-se uma discrepância no número total de dias<sup>2</sup> em que os professores precisam comparecer à instituição: 61 dias com o *solver* **GLPK**, 54 com **SYMPHONY** e 51 com **HIGHS**. Essa diferença revela que, mesmo diante de soluções com o mesmo valor ótimo, há variações estruturais na solução final, além de soluções ótimas distintas no sentido da alocação de professores a disciplinas (professores diferentes alocados à mesma disciplina). Vale destacar que a variável associada aos dias idos  $z_{iw}$  não está incluída na função objetivo desta formulação, fato que justifica essa variação.

### Formulação 2 – Otimização com Penalização por Dias Idos

A segunda formulação inclui a variável  $z_{iw}$  na função objetivo penalizada, com o intuito de reduzir o número de dias de deslocamento dos professores para a ENCE, assim ficando com 1053 variáveis e 1679 restrições. Como resultado direto dessa alteração, todos os *solvers* retornaram uma solução ótima com valor da função objetivo igual a -15 e com um total de 47 dias idos. Isso evidencia que a nova formulação foi eficaz na produção de uma solução ótima mais alinhada com a preferência por alocações mais concentradas durante a semana.

É importante observar que, apesar de todos os *solvers* produzirem a mesma solução ótima em termos do valor da função objetivo e de variável  $z_{iw}$ , houve uma diferença expressiva no tempo de execução. O *solver* GLPK demandou cerca de 1083 segundos para resolver esta formulação, enquanto SYMPHONY e HIGHS apresentaram desempenho significativamente superior, com tempos da ordem de 32 e 36 segundos, respectivamente.

A Tabela 3 apresenta a distribuição da quantidade de professores por número de dias idos, comparando os três *solvers* nas duas formulações. Nota-se que a distribuição é heterogênea tanto em relação ao número absoluto de professores alocados ( $n_a$ ), quanto à frequência relativa ( $F_r$ ). Em ambas as formulações, os três *solvers* concentraram a maior parte das alocações em dois dias, com o HIGHS alocando 13 professores em dois dias na F1 (maior número de professores em dois dias), e todos os *solvers* com 12 professores em dois dias na F2. Observando o total de professores alocados, destaca-se o *solver* GLPK, que alocou o maior número total de professores: 23 na formulação 1 e 22 na formulação 2. Já o SYMPHONY alocou 22 professores em ambas, e o HIGHS alocou 23 e 21. A ocorrência de professores alocados em 0 dias na formulação 2 decorre do fato de que a disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) não está vinculada a dias específicos.

A Tabela 4 mostra, para cada *solver* e formulação, o número de professores alocados em 3 dias ou mais. Observa-se que, na formulação 1, o *solver* GLPK foi o que mais concentrou, em termos absolutos e relativos, professores em jornadas mais extensas (3 dias ou mais), enquanto o

<sup>2</sup>Soma do total de dias em que cada professor comparece à ENCE.

HIGHS foi o mais eficiente nesse aspecto, com menos professores nessa situação. Já na formulação 2, o comportamento se inverte parcialmente: o HIGHS apresenta a maior frequência relativa do número de professores com 3 dias ou mais, e todos os *solvers* possuem a mesma frequência absoluta.

Tabela 3: Distribuição da quantidade de professores por dias idos segundo três *solvers* nas duas formulações

| Qtd Dias Idos | Formulação 1 |             |           |             |           |             | Formulação 2 |             |           |             |           |             |
|---------------|--------------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|--------------|-------------|-----------|-------------|-----------|-------------|
|               | SYMPHONY     |             | HIGHS     |             | GLPK      |             | SYMPHONY     |             | HIGHS     |             | GLPK      |             |
|               | $n_a$        | $F_r$       | $n_a$     | $F_r$       | $n_a$     | $F_r$       | $n_a$        | $F_r$       | $n_a$     | $F_r$       | $n_a$     | $F_r$       |
| 0             | 1            | 0.04        | –         | –           | –         | –           | 1            | 0.04        | –         | –           | 1         | 0.04        |
| 1             | 3            | 0.14        | 4         | 0.17        | 3         | 0.13        | 3            | 0.14        | 3         | 0.14        | 3         | 0.14        |
| 2             | 10           | 0.46        | 13        | 0.58        | 11        | 0.48        | 12           | 0.55        | 12        | 0.57        | 12        | 0.55        |
| 3             | 4            | 0.18        | 4         | 0.17        | 3         | 0.13        | 5            | 0.23        | 5         | 0.24        | 5         | 0.23        |
| 4             | 1            | 0.04        | 1         | 0.04        | 3         | 0.13        | –            | –           | –         | –           | –         | –           |
| 5             | 3            | 0.14        | 1         | 0.04        | 3         | 0.13        | 1            | 0.04        | 1         | 0.05        | 1         | 0.04        |
| <b>Total</b>  | <b>22</b>    | <b>1.00</b> | <b>23</b> | <b>1.00</b> | <b>23</b> | <b>1.00</b> | <b>22</b>    | <b>1.00</b> | <b>21</b> | <b>1.00</b> | <b>22</b> | <b>1.00</b> |

Tabela 4: Distribuição de professores com 3 ou mais dias idos segundo três *solvers* (formulações 1 e 2)

| Qtd Dias Idos $\geq 3$ | Formulação 1 |             |          |             |          |             | Formulação 2 |             |          |             |          |             |
|------------------------|--------------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|--------------|-------------|----------|-------------|----------|-------------|
|                        | SYMPHONY     |             | HIGHS    |             | GLPK     |             | SYMPHONY     |             | HIGHS    |             | GLPK     |             |
|                        | $n_a$        | $F_r$       | $n_a$    | $F_r$       | $n_a$    | $F_r$       | $n_a$        | $F_r$       | $n_a$    | $F_r$       | $n_a$    | $F_r$       |
| 3                      | 4            | 0.18        | 4        | 0.17        | 3        | 0.13        | 5            | 0.23        | 5        | 0.24        | 5        | 0.23        |
| 4                      | 1            | 0.04        | 1        | 0.04        | 3        | 0.13        | –            | –           | –        | –           | –        | –           |
| 5                      | 3            | 0.14        | 1        | 0.04        | 3        | 0.13        | 1            | 0.04        | 1        | 0.05        | 1        | 0.04        |
| <b>Total</b>           | <b>8</b>     | <b>0.36</b> | <b>6</b> | <b>0.25</b> | <b>9</b> | <b>0.39</b> | <b>6</b>     | <b>0.27</b> | <b>6</b> | <b>0.29</b> | <b>6</b> | <b>0.27</b> |

## 6. Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste artigo foram propostas e avaliadas duas formulações de programação matemática para o problema de alocação de professores a disciplinas: a primeira voltada para a alocação eficaz dos professores às disciplinas, e a segunda contemplando, adicionalmente, a minimização do número total de dias em que os docentes precisam comparecer à ENCE, tornando a alocação mais produtiva aos docentes. As formulações foram desenvolvidas para contemplarem as disciplinas obrigatórias, e os professores que não foram alocados às turmas existentes ministrarão disciplinas eletivas.

Ambas as formulações foram implementadas em linguagem R, utilizando os pacotes **ompr** e **ROI**, e resolvidas com três diferentes *solvers*, também disponíveis em 3 pacotes no R. A partir da aplicação dessas formulações, constatou-se que é possível encontrar soluções ótimas nos dois casos contemplados pelas formulações. A formulação 1 mostrou a importância de incorporar especificações de caráter preferencial diretamente na função objetivo ou em restrições: embora os valores ótimos fossem iguais, o número de dias em que os docentes teriam que ir, no total, foram razoavelmente diferentes, entre os três *solvers* utilizados nos experimentos. Já a formulação 2, ao penalizar o total de dias idos pelos docentes, conseguiu reduzir consideravelmente a quantidade de dias em que os professores deveriam lecionar, sem comprometer a qualidade da solução. Além disso, o desempenho dos *solvers* apresentou variações expressivas. O **GLPK**, ao ser aplicado à resolução da formulação 2, demandou maior tempo computacional para produzir o ótimo, enquanto o **SYMPHONY** e o **HIGHS** se mostraram mais eficientes. Esse comportamento está possivelmente relacionado aos algoritmos de programação inteira implementados nos *solvers*.

Para trabalhos futuros, há várias direções promissoras a serem exploradas. Uma dessas possibilidades é o uso de pesos individuais baseados nas preferências declaradas pelos professores, tornando o modelo ainda mais aderente às suas preferências. Além disso, pode ser considerada uma terceira formulação que tenha, por objetivo, garantir a redução do número de professores que lecionam em 3 dias ou mais, possibilitando, desta forma, um maior equilíbrio na distribuição das cargas horárias de trabalho dos professores.

A partir dessas considerações, fica ratificado que a metodologia proposta neste trabalho constitui-se como uma boa alternativa à resolução do problema de planejamento da grade da ENCE, que, assim como em outras instituições, precisa da implementação de soluções que estejam de acordo com as suas realidades educacionais, sendo necessário alocar professores a disciplinas de forma eficiente, contribuindo para alocações equilibradas e produtivas.

## Referências

- Appleby, J. S., Blake, D. V., e Newman, E. A. (1961). Techniques for producing school timetables on a computer and their application to other scheduling problems. *The Computer Journal*, 3(4): 237–245.
- Bucco, G. B., Poulsen, C. J. B., e Bandeira, D. L. (2017). Desenvolvimento de um modelo de programação linear para o problema da construção de grades horárias em universidades. *Gestão e Produção*, 24(1):40–49.
- Carvalho, R. (2011). Abordagem heurística para o problema de programação de horários de cursos. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. Curso de Engenharia Elétrica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia, 97f.
- Colorni, A., Dorigo, M., e Maniezzo, V. (1998). Metaheuristics for high-school timetabling. *Computational Optimization and Applications*, 9(3):275–298.
- Conceição, J. a. P. C. d. (2023). Automatização do processo de geração da grade horária do curso de engenharia de produção da ufrj-macaé. Trabalho de conclusão de curso (graduação em engenharia de produção), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Curso de Engenharia de Produção, Macaé.
- Csima, J. e Gotlieb, C. C. (1964). Tests on a computer method for constructing school timetables. *Communications of the ACM*, 7(3):160–163.
- Even, S., Itai, A., e Shamir, A. (1976). On the complexity of timetable and multicommodity flow problems. *SIAM Journal on Computing*, 5(4):691–703.
- Gendreau, M. e Potvin, J.-Y., editors (2019). *Handbook of Metaheuristics*. Springer, 3rd ed. 2019 edition.
- Jardim, A., Semaan, G., e Penna, P. (2016). Uma heurística para o problema de programação de horários: Um estudo de caso. In *Anais do XXXVIII Congresso da Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SBPO)*, Vitória, ES.
- Lewis, R. (2008). A survey of metaheuristic-based techniques for university timetabling problems. *OR Spectrum*, 30(1):167–190.

Santos, P. S. (2022). Problema de programação de horários de cursos universitários da itc2019: modelos e algoritmos. Dissertação (mestrado em engenharia de produção), Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas, João Monlevade.

Silva, B. A. d. (2021). Problema da programação de horários em escolas: um estudo de caso. Trabalho de conclusão de curso (graduação em engenharia de produção), Universidade Federal Fluminense, Escola de Engenharia, Niterói.

Wolsey, L. (2020). *Integer Programming*. John Wiley & Sons, 2nd edition.

**Agradecimentos:** Ao CNPq pela bolsa de iniciação científica concedida - projeto PIBIC ENCE.