57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

MODELO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA PARA O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE CARGAS HETEROGÊNEAS VIA TRANSPORTE RODOVIÁRIO

Priscila de Ávila Alves, Alexandre Xavier Martins, Paganini Barcellos de Oliveira, Thiago Augusto de Oliveira Silva
Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Aplicadas
Rua 36, 115 - Loanda, João Monlevade - MG, 35931-008
priscila.avila@aluno.ufop.edu.br, xmartins@ufop.edu.br,
paganini@ufop.edu.br, thiago@ufop.edu.br

RESUMO

Este artigo aborda o problema de alocação de cargas heterogêneas, com foco na otimização da distribuição de itens em veículos de diferentes capacidades. Um modelo de programação linear inteira mista (PLIM) é apresentado com o objetivo de minimizar os custos de transporte, respeitando as restrições de capacidade e carga mínima dos veículos. Experimentos computacionais foram conduzidos com o auxílio do resolvedor do Gurobi aplicado em instâncias artificiais com diferentes dimensões e complexidades, considerando um tempo limite de 60 minutos. Os resultados mostram que foi possível encontrar a solução ótima para algumas instâncias de menor porte, e também para instâncias maiores, mas de menor complexidade. Essas particularidades nos resultados demonstram que há espaço para pesquisas futuras em estratégias para aprimoramento do modelo, uso de outras técnicas exatas de resolução ou a proposição de heurísticas, considerando o escopo de tomada de decisão de um problema real.

PALAVRAS CHAVE. Otimização. Alocação de Cargas. Programação Linear Inteira Mista.

L&T - Logística e Transportes

ABSTRACT

This paper addresses the heterogeneous cargo allocation problem focused on optimization distribuition of itens in vehicles with different capacities. A Mixed-Integer Linear Programming (MILP) model is presented with the objective of minimizing transportation costs subject to vehicle capacity and minimum load constraints. Computational experiments were conducted using the Gurobi solver applied to artificial instances with different dimensions and complexity levels, considering a time limit of 60 minutes. The results show that it was possible to obtain the optimal solution for smaller instances, as well as for some larger ones with lower complexity. These particularities in results demonstrate a gap for future research on strategies for model improvement, These findings highlight opportunities for future research by applying alternative exact solution methods or developing heuristic approaches, aligned with the requirements and constraints of real-world decision-making scenarios.

KEYWORDS. Optimization. Load Allocation. Mixed-Integer Linear Programming

L&T - Logistic and Transportations

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

1. Introdução

Desde a implantação da indústria automobilística na década de 1950, quando as principais rodovias passaram por pavimentação, o transporte rodoviário experimentou um crescimento exponencial, consolidando-se como o principal modal de distribuição de mercadorias no Brasil [Alvarenga e Novaes, 2000]. Atualmente, esse modal movimenta aproximadamente 75% das mercadorias do país, evidenciando sua relevância para a logística nacional [Ministério dos Transportes, 2025]. Além disso, os custos associados ao transporte representam cerca de 51% dos gastos logísticos totais [Bowersox e Closs, 2001].

Gerenciar a distribuição de mercadorias é uma operação importante, que tem um grande impacto econômico [Moura e Bortfeldt, 2017]. Não obstante, problemas de alocação de cargas não padronizadas, envolvendo condições adicionais específicas, são comuns na prática [Fasano, 2004].

Conforme destacado pela literatura, o problema de alocação de cargas é NP-difícil e de difícil resolução para cenários reais [Martello et al., 2000; Fasano, 2004, 2008]. Alocar itens de forma eficiente é um dos maiores desafios na área da logística e é uma questão crítica para a redução de custos de armazenamento ou melhoria para a alocação em veículos Romero et al. [2023a]. Esse cenário se estende além da alocação de cargas tradicional, como compatibilidade entre veículos e tipos de carga, minimização de fretes mortos e distribuição geográfica das entregas, que podem ser vistas como restrições operacionais críticas, que demandam soluções especializadas.

O presente trabalho busca modelar e analisar o problema de alocação de cargas heterogêneas em veículos rodoviários, considerando restrições operacionais observadas na prática, em um ambiente de despacho de produtos acabados de uma indústria siderúrgica. Para isso, propõe-se a elaboração de um modelo de programação matemática e o desenvolvimento de um gerador de instâncias, baseado em dados reais da indústria siderúrgica, de forma a garantir que os testes reflitam cenários operacionais típicos.

O modelo matemático é resolvido por meio do *solver* do Gurobi e os resultados obtidos são avaliados quanto à qualidade das soluções e ao desempenho computacional. A análise dos experimentos busca, ainda, identificar as limitações da abordagem exata em instâncias de maior porte, de modo a fundamentar a necessidade de investigações futuras baseadas no uso de heurísticas especializadas ou outras técnicas exatas de resolução.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. A Seção 1 apresenta o contexto do problema, os objetivos e a justificativa do estudo. A Seção 2 revisa a literatura relacionada à alocação de cargas e a problemas de otimização combinatória. A Seção 3 descreve a formulação matemática proposta e os principais conjuntos, parâmetros e variáveis envolvidos. A Seção 4 apresenta as instâncias geradas, o procedimento experimental, os resultados obtidos com o modelo exato e as análises realizadas. Por fim, a Seção 5 sintetiza as conclusões do trabalho, apresenta as limitações identificadas e sugere direções para pesquisas futuras.

2. Revisão da Literatura

A otimização da alocação de cargas em contêineres é uma tarefa diária e importante no campo da produção e da logística, sendo comumente modelada como problemas de empacotamento (*Bin Packing Problems* – BPP), os quais variam conforme as características dos itens e dos contêineres [Romero et al., 2023b]. Segundo [Pisinger, 2005] o problema de múltiplas mochilas (*Multiple Knapsack Problem* - MKP) é uma generalização do BPP, no qual são fornecidas várias mochilas, cada uma com sua própria capacidade.

O MKP exige que os itens sejam alocados em mochilas de modo que o peso total dos itens em cada mochila não ultrapasse sua capacidade, buscando maximizar o lucro total dos itens selecionados [Shively-Ertas et al., 2023]. Além disso, pode-se citar diversas aplicações na indústria

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

e nos negócios, como o descarregamento de computação multiusuário, o escalonamento de multiprocessadores, a alocação de funções de rede virtual e problemas de corte de estoque na indústria do aço, por exemplo [Shively-Ertas et al., 2023].

A generalização do MKP, bem como a atribuição de valores distintos aos itens em cada mochila, torna o problema ainda mais complexo [Awasthi et al., 2023]. O problema de múltiplas mochilas heterogêneas (*Multiple Heterogeneous Knapsack Problem* – MHKP), por exemplo, consiste em empacotar um conjunto fortemente heterogêneo de itens em forma de caixa, em um conjunto fracamente heterogêneo de contêineres, também em forma de caixa, de modo a minimizar o espaço desperdiçado ou, de forma equivalente, maximizar o espaço ocupado nos contêineres [Deplano et al., 2021].

O problema da mochila de escolha múltipla (*Multiple Choice Knapsack Problem* – MCKP) é outra variante do problema clássico da mochila. O objetivo do MCKP é selecionar exatamente um item de cada classe, maximizando o valor total enquanto respeita uma restrição de peso predefinida [Li et al., 2024].

Ademais, variantes biobjetivo e quadráticas têm sido introduzidas para modelar cenários mais realistas. O problema de múltiplas mochilas quadrático biobjetivo (*Bi-Objective Quadratic Multiple Knapsack Problem* - BO-QMKP), por exemplo, busca, simultaneamente, maximizar o lucro total do plano de empacotamento e o lucro da mochila com o menor desempenho [Aïder et al., 2023].

Mesmo na formulação básica, é sabido que os problemas da mochila pertencem à classe NP-difícil. Para versões estendidas, recorre-se frequentemente a abordagens de busca eficiente de boas soluções aproximadas [Nakamura et al., 2022]. Em resumo, encontrar a solução realmente ótima seria computacionalmente difícil, mas seria fácil encontrar uma solução inicial utilizando um algoritmo guloso [Nakamura et al., 2022].

Diversas estratégias têm sido propostas para lidar com essas dificuldades computacionais. Métodos cooperativos, baseados em algoritmos evolutivos, por exemplo, foram utilizados para determinar conjuntos de Pareto aproximados para o BO-QMKP [Aïder et al., 2023]. É possível também utilizar uma combinação de vários operadores incorporados a um algoritmo genético desordenado para lidar com instâncias de grande escala [Aïder et al., 2022].

Outros estudos aplicam algoritmos quânticos, como o algoritmo quântico de otimização aproximada (*Quantum Approximate Optimization Algorithm* - QAOA) e o solucionador de autovalores quântico variacional (*Variational Quantum Eigensolver* – VQE), evidenciando o potencial dessas abordagens em aplicações industriais [Awasthi et al., 2023].

No contexto da alocação de energia, foi proposta a utilização de um solucionador de programação inteira mista (*Mixed-Integer Programming* – MIP) para resolver o problema de múltiplas mochilas com restrição de atribuição (*Multiple Knapsack with Assignment Restriction* - MKAR), um problema APX-difícil, uma vez que métodos mais simples, como a programação dinâmica, não se mostraram viáveis para sua resolução [Morimoto, 2017]. De forma semelhante, modelos de PLIM foram desenvolvidos para resolver o MHKP, minimizando o espaço desperdiçado nos recipientes e considerando suas prioridades [Deplano et al., 2021].

Dessa forma, percebe-se que o MKP e suas extensões oferecem uma base teórica robusta e versátil para a modelagem de cenários complexos de otimização em logística, produção e alocação de recursos, seja para sua resolução exata ou aproximada.

O modelo proposto neste estudo é inspirado no contexto logístico das indústrias siderúrgicas. O modelo mantém a estrutura central da formulação de Programação Linear Inteira Mista (PLIM), incorporando características operacionais específicas, como: penalização explícita para unidades metálicas não alocadas, ponderada por peso, volume e criticidade do cliente; consideração

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

de um parâmetro mínimo de carga (frete morto), diretamente na função objetivo; integração simultânea de restrições de capacidade, compatibilidade carga–veículo e restrições de atendimento por cliente; e variáveis binárias e contínuas que representam a ativação de veículos e a alocação de cargas. Embora inspirado em formulações clássicas como o MHKP [Deplano et al., 2021], o modelo amplia a abordagem ao incorporar penalidades e restrições adicionais que refletem as condições reais de operação, não tratadas de forma integrada nos estudos anteriores.

3. Caracterização do Problema

O problema de alocação de cargas heterogêneas no transporte rodoviário tratado neste estudo consiste em distribuir um conjunto de unidades metálicas (UMs) em uma frota de veículos, respeitando as restrições operacionais do transporte. O objetivo é minimizar o custo total, composto por penalidades associadas às UMs não alocadas (baseadas em características como peso, volume, urgência e criticidade do cliente), custos fixos relacionados à ativação de veículos, e penalidades adicionais decorrentes do frete morto, isto é, da utilização de veículos sem atingir a carga mínima recomendada.

Cada UM possui penalidades específicas em função do grau de importância/prioridade associada ao seu transporte. A modelagem leva em consideração restrições de capacidade (peso e volume máximos por veículo), compatibilidade entre UMs e veículos, e a associação geográfica entre clientes e veículos (clientes de uma determinada região só podem ser atendidos por veículos destinados à mesma região).

O modelo possui variáveis binárias para alocação das UMs, ativação dos veículos e vínculo entre veículos e clientes. Adicionalmente, variáveis contínuas são utilizadas para modelar o frete morto de veículos com carga abaixo do mínimo estipulado. As subseções a seguir apresentam, formalmente, os conjuntos, parâmetros, variáveis de decisão, função objetivo e restrições que compõem o modelo matemático.

3.1. Conjuntos e parâmetros

Os conjuntos e parâmetros do problema são definidos como segue.

- Conjuntos:
  - V: Conjunto de veículos v disponíveis;
  - I: Conjunto de unidades metálicas (UMs) i a serem alocadas;
  - C: Conjunto de clientes c.
- Parâmetros de capacidade:
  - W_v: Capacidade de peso do veículo v;
  - U_v: Capacidade de volume do veículo v;
  - w_i: Peso da carga i;
  - u_i: Volume da carga i;
  - W_v^{min}: Carga mínima necessária para o veículo v operar sem frete morto.
- Parâmetros de custo:
  - c_v: Custo fixo para ativação do veículo v;
  - p_i: Penalidade associada à não alocação da UM i.
- Parâmetro de associação e compatibilidade:

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

– δ_{vc}: Parâmetro binário que indica se o cliente c pode ser atendido pelo veículo v, considerando a região de cobertura do veículo; Assume valor 1 se sim, e 0 caso contrário;

– γ_{iv}: Parâmetro binário que indica se a UM i é compatível com o veículo v. Assume valor 1 se sim, e 0 caso contrário.

3.2. Variáveis de decisão

As variáveis de decisão do problema adotadas no modelo matemático proposto são:

- $x_{ivc} \in \{0, 1\}$: Variável binária que indica se a carga i foi alocada ao veículo v para o cliente c. Assume valor 1 se a carga for alocada ao veículo, 0 caso contrário;
- $y_{vc} \in \{0, 1\}$: Variável binária que indica se o veículo v foi utilizado para o cliente c na solução. Assume valor 1 se o veículo v atender o cliente c, 0 caso contrário;
- $z_v \geq 0$: Variável contínua que representa a quantidade de carga faltante para atingir a carga mínima do veículo v (frete morto);
- $\alpha_v \in \{0, 1\}$: Variável binária que indica se o veículo v está ativo. Assume valor 1 se estiver ativo, e 0 caso contrário.

3.3. Função objetivo

A função objetivo, Equação (1), busca minimizar o custo total de alocação e o frete morto dos veículos v utilizados para o transporte das cargas. Os dois primeiros somatórios da equação representam esses custos. Além disso, estabelece-se um nível de penalização financeira, vinculado ao peso da carga w_i, sempre que alguma UM i, pertencente a algum cliente c, não estiver sendo atendida por nenhum dos veículos v disponíveis (última parcela da função objetivo).

$$\text{Minimizar} \sum_{v \in V} c_v \alpha_v + \sum_{v \in V} z_v + \quad \sum_{i \in I} w_i p_i \left(1 - \sum_{v \in V} \sum_{c \in C} x_{ivc}\right) \tag{1}$$

3.4. Restrições

As restrições que fazem parte da formulação do problema são:

1. **Capacidade de peso e volume:** As restrições (2) garantem que nenhum veículo v ultrapasse sua capacidade máxima de peso, enquanto as restrições (3) asseguram que não será extrapolado o limite de volume do veículo.

$$\sum_{i \in I} \sum_{c \in C} w_i x_{ivc} \leq W_v, \quad \forall v \in V \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{c \in C} u_i x_{ivc} \leq U_v, \quad \forall v \in V \tag{3}$$

   Note que, em ambos conjuntos de restrições, a soma de todas as cargas de todos os clientes que foram alocadas ao veículo v são consideradas;

2. **Frete morto:** As restrições (4) são responsáveis por contabilizar o frete morto dos veículos utilizados, quando existente. Em outras palavras, só há frete morto ($z_v \geq 0$) se o veículo v estiver ativo ($\alpha_v = 1$) e a carga total alocada for inferior a W_v^{min};

$$z_v \geq \left(\alpha_v W_v^{min} - \sum_{i \in I} \sum_{c \in C} w_i x_{ivc}\right), \quad \forall v \in V \tag{4}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

3. **Alocação única:** As restrições (5) são utilizadas para assegurar que cada carga i, pertencente a um cliente c, seja atribuída a um único veículo v;

$$\sum_{v \in V} \sum_{c \in C} x_{ivc} \leq 1, \quad \forall i \in I \tag{5}$$

4. **Compatibilidade entre UMs e veículos:** As restrições (6) tem como função indicar se a cargas i podem ser transportadas pelo veículo v;

$$x_{ivc} \leq \gamma_{iv}, \quad \forall i \in I,\ v \in V,\ c \in C \tag{6}$$

5. **Compatibilidade e ativação de atendimento (veículo - cliente):** As restrições (7) garantem que uma carga i, pertencente a um cliente c, somente seja alocada a um veículo v que esteja habilitado a atender a região geográfica do cliente, e cuja rota entre o veículo e o cliente tenha sido previamente ativada;

$$x_{ivc} \leq \delta_{vc} y_{vc}, \quad \forall i \in I, v \in V, c \in C \tag{7}$$

6. **Ativação dos veículos:** As restrições (8) forçam a ativação do veículo v ($\alpha_v = 1$) se ele for usado para qualquer cliente c ($y_{vc} = 1$).

$$\alpha_v \geq y_{vc}, \quad \forall v \in V,\ c \in C \tag{8}$$

4. Experimentos computacionais

Esta seção apresenta os resultados computacionais obtidos para as diferentes configurações de instâncias do problema de alocação de cargas heterogêneas estudado. A obtenção das soluções para o problema foram conduzidas por meio da utilização do *solver* Gurobi, com seus parâmetros padrão. Na análise dos resultados a ideia consiste em discutir a qualidade das soluções inteiras, o tempo de processamento requerido e a eficiência do modelo em cenários de diferentes dimensões e características operacionais, a fim de identificar os próximos passos para pesquisas futuras.

4.1. Instâncias avaliadas

Um conjunto de instâncias foi desenvolvido com o objetivo de avaliar o desempenho do modelo proposto sob diferentes configurações operacionais e logísticas vinculadas ao contexto de uma indústria siderúrgica. As instâncias foram projetadas para representar variações de complexidade observadas em aplicações práticas, visando ampliar a capacidade analítica sobre o problema real e a generalização dos resultados.

4.2. Critérios para a construção das instâncias

As instâncias variam em termos de número de veículos, clientes e UMs. Estas características foram combinadas de forma sistemática para gerar um conjunto diversificado de cenários de teste. O código utilizado para a geração das instâncias foi implementado em linguagem *Python*, e as instâncias geradas foram armazenadas em um arquivo no formato CSV. Em suma, a estrutura das instâncias considerou:

- **Tamanho do problema:** Três níveis de tamanho foram considerados: pequeno (20 veículos, 20 clientes, 300 UMs), médio (30 veículos, 30 clientes, 400 UMs) e grande (30 veículos, 30 clientes, 500 UMs);

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

- **Regras de alocação:** Para refletir restrições operacionais reais, cada cliente possui um intervalo de quantidade de UMs que podia variar em um valor mínimo (seis) e um valor máximo (vinte);
- **Penalidades associadas à não alocação das cargas:** As penalidades são aplicadas sempre que uma UM não é alocada a um veículo na solução obtida. Essa penalidade visa incentivar soluções que maximizem a alocação das cargas, minimizando o número de unidades não atendidas. A Tabela 1 apresenta os critérios utilizados para a definição das penalidades, que variam conforme a prioridade operacional atribuída a cada UM. Na Tabela 1 a coluna "Categoria" apresenta os fatores como criticidade do cliente, características físicas da carga e restrições de transporte, refletindo diferentes níveis de impacto sobre a operação em caso de não atendimento, conforme destacado na coluna "Descrição". Cada categoria de UM é definida por características específicas que determinam tanto a gravidade da penalidade quanto a probabilidade de ocorrência (penúltima e última colunas da Tabela 1, respectivamente);
- **Número de instâncias por tamanho:** Para cada dimensão do problema foram geradas dez diferentes instâncias, construídas com certo grau de aleatoriedade. Isso permite a análise de eficiência do modelo, para diferentes contextos, avaliando seu comportamento médio e sua resposta à variações na rede de atendimento logístico.

Tabela 1: Critérios de priorização e pesos atribuídos às UMs

Categoria	**Descrição do Critério**	**Penalidade**	**Probabilidade**
UM Estratégica	Peça única, projeto com multa por atraso ou impacto operacional grave. Aplicado aleatoriamente (5% de chance).	5.0–10.0	5%
Cliente Importante	Clientes críticos. Risco de multas ou perda de contrato.	2.0–5.0	15% + IDs múltiplos de 5
Carga Grande	Peso $>$ 1000 kg ou volume $>$ 8 m³. Exige veículo dedicado ou espaço extra.	2.0–5.0	Baseado em peso/volume
Carga com Restrição	Restrições como *Não empilhar*, *Frágil* ou *Pesado*. Limita opções de transporte.	1.5–3.0	Baseado em restrição
Carga Média	Peso $\geq$ 500 kg (sem outros critérios prioritários). Prioridade padrão.	0.8–1.5	Baseado em peso
Carga Comum	Demais UMs (baixo peso/volume, sem restrições). Baixa prioridade.	0.3–0.5	Padrão (residual)

A Tabela 2 resume as características básicas adotadas para a criação de todas as instâncias utilizadas no trabalho.

4.3. Configurações dos experimentos computacionais

Os experimentos foram realizados em um ambiente computacional com processador Intel(R) Core(TM) i7-4510U CPU (2 núcleos, 2.00 GHz), 8 GB de Memória RAM e sistema opera-

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

Tabela 2: Dimensões e informações das instâncias estudadas

Instância	Veículos	Clientes	UMs	Min Cargas/Cliente	Max Cargas/Cliente
20v20c300p	20	20	300	6	20
30v30c400p	30	30	400	6	20
30v30500p	30	30	500	6	20

cional Windows 11. O modelo foi implementado em Python (v 3.13.3), utilizando o solucionador Gurobi Optimizer 12.0.1.

Todas as instâncias foram resolvidas utilizando os parâmetros padrão (*default*) do solucionador, sem customização de heurísticas ou estratégias de ramificação, conforme recomendado para avaliação preliminar de desempenho. Além disso, a resolução de cada instância foi interrompida ao encontrar a solução ótima (com `MIPGap` menor ou igual a 0.0001%) ou ao alcançar o tempo limite de 3600 segundos.

O tempo limite de execução de 3600 segundos para os testes nas instâncias considerando que, na prática, se tratam de decisões que precisam ser tomadas periodicamente, de forma rápida. Ademais, a limitação do tempo adotada nesta etapa também permitiu uma avaliação abrangente do desempenho do modelo e do *solver* frente as dimensões de tamanho e complexidade computacional das instâncias.

Para avaliar o desempenho do modelo proposto, foram consideradas quatro métricas principais. A qualidade da solução foi mensurada pelo valor da função objetivo, que associa o custo da utilização de veículos às penalidades decorrentes da não alocação de cargas e à ocorrência de frete morto. O tempo de processamento correspondeu ao tempo total de execução necessário para encontrar a melhor solução dentro dos parâmetros preestabelecidos.

O GAP de otimalidade foi utilizado para expressar a diferença percentual entre o limite inferior e a melhor solução inteira obtida, fornecendo uma medida da proximidade da solução encontrada em relação ao ótimo global. Por fim, o GAP de Relaxação mensura a diferença entre a solução ótima e a solução obtida a partir da relaxação linear do modelo.

4.4. Resultados computacionais

Para cada instância testada, foram coletadas as quatro métricas previamente descritas. As Tabelas 3, 4 e 5 sumarizam os resultados agregados para cada conjunto de instâncias. Os valores destacados em negrito indicam os casos em que a solução ótima foi comprovadamente encontrada (GAP de Otimalidade (%) igual a 0.00).

Ao analisar os resultados é possível perceber três tendências principais. Em instâncias menores, em que se obteve a solução ótima, o *solver* foi capaz de encontrar soluções em tempos computacionais reduzidos, o que evidencia a eficácia do método para cenários de menor escala, na maioria dos casos.

Em adição, é possível perceber que, mesmo utilizando aleatoriedade na geração dos dados de entrada, o modelo mantém desempenho consistente, com variações reduzidas entre as replicações, para todas dimensões do problema.

Por fim, é possível notar que as instâncias maiores exigem tempos computacionais mais elevados e apresentam valores de GAP superiores, com maior dificuldade na obtenção de soluções ótimas, situação esta que é esperada para problemas de natureza combinatorial. A Figura 1 ilustra a dispersão dos valores de GAP entre as replicações de cada grupo de instâncias.

Durante a análise dos resultados, nota-se que a imposição da restrição de carga mínima teve impacto direto sobre a ocorrência de frete morto em algumas instâncias. Esse fenômeno ocorre quando um veículo realiza parte do trajeto sem carga ou transporta um volume significativamente

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

Tabela 3: Resultados para as instâncias do tipo 20v20c300p

Instância	Solução Inteira	Tempo (s)	GAP de Otimalidade (%)	GAP de Relaxação (%)
20v20c300p_c1	**254066.37**	**439.09**	**0.00**	**10.92**
20v20c300p_c2	**201527.61**	**477.45**	**0.00**	**14.61**
20v20c300p_c3	157892.37	3601.37	0.06	19.15
20v20c300p_c4	**96235.51**	**301.77**	**0.00**	**34.69**
20v20c300p_c5	203421.45	3602.19	0.10	13.99
20v20c300p_e1	**220183.77**	**1377.74**	**0.00**	**12.90**
20v20c300p_e2	**188665.89**	**1613.97**	**0.00**	**15.97**
20v20c300p_e3	**156725.19**	**1853.61**	**0.00**	**20.35**
20v20c300p_e4	178080.87	3602.17	0.08	17.05
20v20c300p_e5	171888.88	3602.19	0.08	17.48
Média		**2007.16**	**0.04**	**17.21**

Tabela 4: Resultados para as instâncias do tipo 30v30c400p

Instância	Solução Inteira	Tempo (s)	GAP de Otimalidade (%)	GAP de Relaxação (%)
30v30c400p_c1	133144.50	3606.55	0.33	35.03
30v30c400p_c2	**237836.58**	**1466.45**	**0.00**	**18.63**
30v30c400p_c3	153320.51	3603.73	0.33	30.19
30v30c400p_c4	107053.85	3601.25	1.57	44.52
30v30c400p_c5	111182.22	3600.76	4.00	42.18
30v30c400p_e1	**214214.20**	**2029.93**	**0.00**	**20.67**
30v30c400p_e2	103712.69	3604.16	0.05	44.81
30v30c400p_e3	**233732.03**	**2814.07**	**0.00**	**18.46**
30v30c400p_e4	137935.64	3600.78	22.85	34.11
30v30c400p_e5	173792.30	3607.68	0.05	26.45
Média		**2953.44**	**2.92**	**31.50**

inferior à sua capacidade, resultando em baixa eficiência operacional. Essa limitação se manifestou especialmente nas instâncias de maior porte, nas quais a combinação das características das cargas com as capacidades disponíveis impediu o aproveitamento completo dos veículos, mesmo em soluções de custo total reduzido.

Pela Figura 1 é possível notar que para o grupo `20v20c300p`, a mediana do GAP foi 0%, com ausência de dispersão, o que confirma a obtenção consistente da solução ótima, ou bem próxima do ótimo. No grupo `30v30c400p`, a média do GAP de otimalidade foi de aproximadamente 1,4%, com uma dispersão que varia de 0,9% a 1,8%. Já no grupo `30v30500p`, a média foi de cerca de 4,2%, com dispersão entre 3,8% e 4,5%. Assim, pode-se dizer que a estabilidade das soluções diminui conforme o aumento da complexidade das instâncias.

5. Considerações finais

O conjunto dos resultados demonstra que a formulação de PLIM proposta é eficaz para a resolução de instâncias de pequeno porte, garantindo soluções de alta qualidade em um tempo limite

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

Tabela 5: Resultados para as instâncias do tipo 30v30c500p

Instância	Solução Inteira	Tempo (s)	GAP de Otimalidade (%)	GAP de Relaxação (%)
30v30c500p_c1	333519.67	3601.08	13.04	14.57
30v30c500p_c2	389852.40	3601.48	9.53	11.97
30v30c500p_c3	494778.19	3601.05	6.59	9.26
30v30c500p_c4	373340.22	3601.13	8.20	12.52
30v30c500p_c5	336270.04	3601.66	11.30	14.10
30v30c500p_e1	298739.03	3600.98	13.22	16.46
30v30c500p_e2	462908.88	3601.22	8.55	9.85
30v30c500p_e3	393485.57	3602.50	9.68	11.60
30v30c500p_e4	410494.28	3601.08	10.43	10.72
30v30c500p_e5	369961.78	3601.36	9.36	13.26
Média		**3601.35**	**10.00**	**12.43**

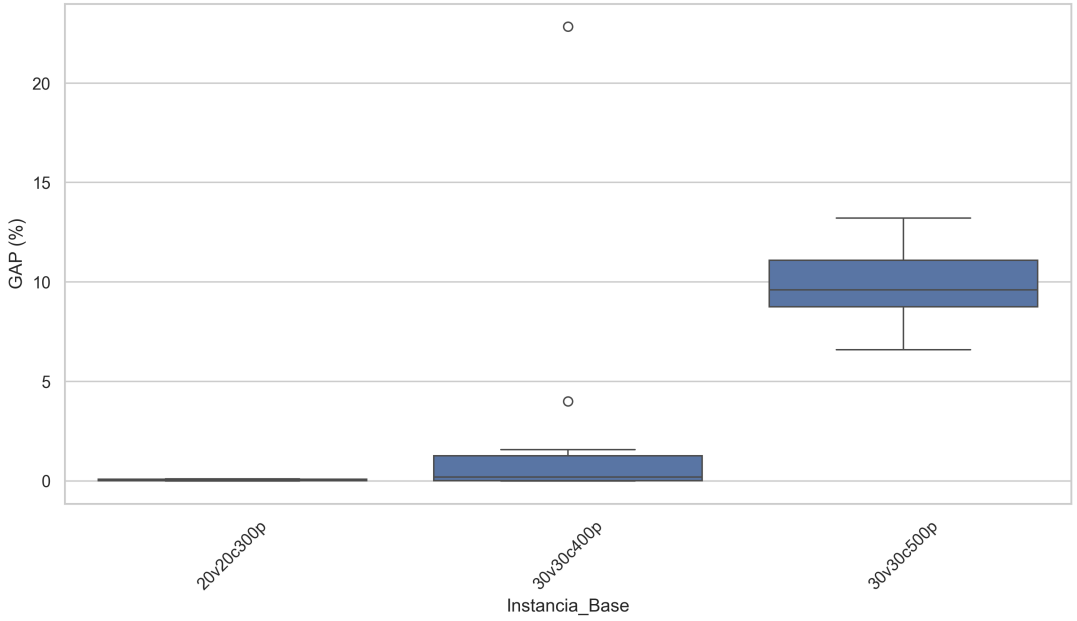


Figura 1: Dispersão do GAP (%) por grupo de instâncias

de 1 hora de processamento. Contudo, a escalabilidade do modelo é limitada, conforme evidenciado pelos tempos elevados e GAPs observados nas instâncias de médio e grande porte. Esses achados abrem espaço para novas perspetivas de continuidade do trabalho, seja com o desenvolvimento de heurísticas e metaheurísticas ou outras técnicas exatas de resolução do problema, visando obter soluções de boa qualidade em tempos compatíveis com aplicações reais.

Apesar da eficácia do modelo proposto para instâncias de pequeno porte, algumas limitações foram identificadas. A elevada demanda computacional para instâncias de maior escala, refletida em tempos de processamento elevados e valores de GAP não nulos. A dependência exclusiva de uma abordagem exata, o que limita a aplicabilidade em contextos que demandam respostas rápidas.

Além dos aspectos computacionais, os resultados sugerem que a restrição relacionada

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

ao frete morto exerce influência significativa na eficiência da alocação de unidades metálicas. No modelo adotado, foi estabelecido que um veículo deve ter no mínimo 50% de sua capacidade preenchida para ser considerado viável para transporte. Essa premissa, embora importante para evitar ociosidade excessiva, pode limitar a flexibilidade na alocação, especialmente em cenários com elevada heterogeneidade de cargas e capacidades.

Para aprofundar esse tipo de análise, recomenda-se a realização de experimentos futuros que explorem diferentes limites mínimos de ocupação, assim como a avaliação de políticas alternativas para o frete morto. Dessa forma, será possível aumentar a precisão da compreensão sobre o impacto dessas configurações sobre a qualidade da alocação, o tempo de processamento e a aplicação prática do modelo proposto.

Como trabalhos futuros, sugere-se a aplicação de metaheurísticas como Simulated Annealing [Kirkpatrick et al., 1983], GRASP [Feo e Resende, 1995] e Variable Neighborhood Search – VNS [Mladenović e Hansen, 1997], visando explorar o espaço de busca de forma mais eficiente e reduzir o tempo de processamento. Espera-se que a investigação dessas abordagens, isoladas ou combinadas, permita avaliar ganhos de desempenho e robustez em relação ao modelo exato proposto, especialmente para instâncias de maior porte.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à CAPES, à FAPEMIG e à UFOP pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

Referências

Aïder, M., Gacem, O., e Hifi, M. (2022). A hybrid population-based algorithm for the bi-objective quadratic multiple knapsack problem. *Expert Systems with Applications*, 191:116238. ISSN 0957-4174. URL https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116238.

Aïder, M., Gacem, O., e Hifi, M. (2023). Effect of learning strategies in an evolutionary method: the case of the bi-objective quadratic multiple knapsack problem. *Neural Computing and Applications*, 35(2):1183–1209. URL https://doi.org/10.1007/s00521-022-07555-0.

Alvarenga, A. C. e Novaes, A. G. N. (2000). *Logística aplicada*. Blucher, São Paulo, 3 edition. ISBN 9788521202684.

Awasthi, A., Bär, F., Doetsch, J., Ehm, H., Erdmann, M., Hess, M., Klepsch, J., Limacher, P. A., Luckow, A., Niedermeier, C., Palackal, L., Pfeiffer, R., Ross, P., Safi, H., Schönmeier-Kromer, J., von Sicard, O., Wenger, Y., Wintersperger, K., e Yarkoni, S. (2023). Quantum computing techniques for multi-knapsack problems. In Arai, K., editor, *Intelligent Computing*, p. 264–284, Cham. Springer Nature Switzerland. ISBN 978-3-031-37963-5. URL https://doi.org/10.1007/978-3-031-37963-5_19.

Bowersox, D. e Closs, D. (2001). *Logística empresarial: o processo de integração da cadeia de suprimento*. Atlas. ISBN 9788522428779.

Deplano, I., Lersteau, C., e Nguyen, T. T. (2021). A mixed-integer linear model for the multiple heterogeneous knapsack problem with realistic container loading constraints and bins' priority. *International Transactions in Operational Research*, 28(6):3244–3275. URL https://doi.org/10.1111/itor.12740.

Fasano, G. (2004). A MIP approach for some practical packing problems: Balancing constraints and tetris-like items. *Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*, 2:161–174. URL https://doi.org/10.1007/s10288-004-0037-7.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409

Fasano, G. (2008). MIP-based heuristic for non-standard 3D-packing problems. *4OR*, 6(3):291–310. URL https://doi.org/10.1007/s10288-007-0049-1.

Feo, T. A. e Resende, M. G. C. (1995). Greedy randomized adaptive search procedures. *Journal of Global Optimization*, 6:109–133. URL https://doi.org/10.1007/BF01096763.

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., e Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598):671–680. URL https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671.

Li, X., Liu, S., Wang, J., Chen, X., Ong, Y.-S., e Tang, K. (2024). Chance-constrained multiple-choice knapsack problem: Model, algorithms, and applications. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 54(12):7969–7980. URL https://doi.org/10.1109/TCYB.2024.3402395.

Martello, S., Pisinger, D., e Vigo, D. (2000). The three-dimensional bin packing problem. *Operations Research*, 48(2):256–267. URL https://doi.org/10.1287/opre.48.2.256.12386.

Ministério dos Transportes (2025). Transporte rodoviário de cargas - trc. URL https://www.gov.br/transportes/pt-br/assuntos/transporte-terrestre/transporte-rodoviario-de-cargas.

Mladenović, N. e Hansen, P. (1997). Variable neighborhood search. *Computers & Operations Research*, 24(11):1097–1100. URL https://doi.org/10.1016/S0305-0548(97)00031-2.

Morimoto, N. (2017). Power allocation optimization as the multiple knapsack problem with assignment restrictions. In *2017 8th International Conference on the Network of the Future (NOF)*, p. 40–45. IEEE. URL https://doi.org/10.1109/NOF.2017.8251218.

Moura, A. e Bortfeldt, A. (2017). A two-stage packing problem procedure. *International Transactions in Operational Research*, 24:43–58. URL https://doi.org/10.1111/itor.12251.

Nakamura, Y., Takahashi, T., e Kabashima, Y. (2022). Statistical mechanics analysis of generalized multi-dimensional knapsack problems. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 55(37):375003. URL https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac8381.

Pisinger, D. (2005). Where are the hard knapsack problems? *Computers & Operations Research*, 32(9):2271–2284. URL https://doi.org/10.1016/j.cor.2004.03.002.

Romero, S. V., Osaba, E., Villar-Rodriguez, E., e Asla, A. (2023a). Solving logistic-oriented bin packing problems through a hybrid quantum-classical approach. In *2023 IEEE 26th International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, p. 2239–2245. IEEE. URL https://doi.org/10.1109/ITSC57777.2023.10422581.

Romero, S. V., Osaba, E., Villar-Rodriguez, E., Oregi, I., e Ban, Y. (2023b). Hybrid approach for solving real-world bin packing problem instances using quantum annealers. *Scientific Reports*, 13(1):11777. URL https://doi.org/10.1038/s41598-023-39013-9.

Shively-Ertas, E., Lu, Y., Song, M. S., e Vasko, F. J. (2023). Using general-purpose integer programming software to generate bounded solutions for the multiple knapsack problem: a guide for or practitioners. *International Journal of Industrial Optimization*, 4(1):16–24. URL https://doi.org/10.12928/ijio.v4i1.6446.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212409
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/212409