

UM MÉTODO EXATO DE BRANCH-AND-CUT PARA O PROBLEMA DE NESTING COM CORTES GUILHOTINA

Luiz Henrique Cherri, Everton Fernandes Silva

Optimized Decision Making (ODM)

São Carlos - SP, Brasil

luizcherri@gmail.com, fernandesdasilva.everton@gmail.com

José Fernando Oliveira

INESC TEC, Faculdade de Engenharia - Universidade do Porto

Porto - Portugal

jfo@fe.up.pt

Adriana Cristina Cherri

Faculdade de Ciências - UNESP

Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Bauru - SP, Brasil

adriana.cherri@unesp.br

RESUMO

Este trabalho propõe o primeiro método exato para o problema Strip Packing com peças irregulares utilizando restrições de corte guilhotina. Baseado no *Dotted Board Model*, desenvolvemos um algoritmo de Branch-and-Cut que elimina padrões inviáveis por meio de cortes válidos derivados de funções D. As peças são convexas, com rotações discretas, e o corte final é obtido por uma sequência válida de cortes guilhotina. Utilizamos discretização unitária e modelagem baseada em variáveis δ_{dtr} , sujeitas a restrições de não-sobreposição, demanda e limite de comprimento. A explosão combinatória foi tratada com cobertura de cliques no grafo de conflito e geração dinâmica de cortes. Em 76 instâncias de benchmark, provamos a otimalidade em 47% dos casos, com *gap* médio de 14,5% nas demais, com tempo limite de uma hora de CPU.

KEYWORDS. Branch-and-Cut. Problema de corte. Nesting problem. Corte guilhotinado. Peças irregulares.

Topics: Otimização Discreta. Pesquisa Operacional. Programação Inteira Mista.

ABSTRACT

This paper proposes the first exact method for the strip packing problem with irregular pieces using guillotine cut constraints. Based on the *Dotted Board Model*, we have developed a branch-and-cut algorithm that eliminates infeasible patterns using valid cuts derived from D-functions. The pieces are convex, with discrete rotations, and the final cut is obtained by a valid sequence of guillotine cuts. We used unitary discretisation and a mathematical model based on δ_{dtr} variables, subject to non-overlap, demand and length limit constraints. The combinatorial explosion was treated with clique coverage in the conflict graph and dynamic cut generation. In 76 benchmark instances, we proved optimality in 47% of the cases, with an average *gap* of 14.5% in the others, with a CPU time limit of one hour.

KEYWORDS. Branch-and-Cut. Cutting Problem. Nesting Problem. Guillotine Cut. Irregular Pieces.

Paper topics: Discrete Optimization. Operations Research. Mixed Integer Programming.

1. Introdução

Problemas de corte e empacotamento têm sido amplamente estudados nas últimas décadas devido ao seu impacto direto na eficiência de processos industriais, com implicações econômicas e ambientais relevantes. Diversas variantes foram tratadas na literatura, porém métodos exatos ainda são escassos para problemas com características práticas, como a exigência de cortes guilhotina em peças de geometria irregular. Tais características são fundamentais para a aplicabilidade industrial dos métodos propostos, especialmente em setores como vidro, metalurgia, calçados e móveis.

Entre essas variantes, destaca-se o problema de *irregular strip packing*, também conhecido como problema de *nesting*, em que um conjunto de peças bidimensionais irregulares deve ser posicionado sobre uma placa de altura fixa e comprimento infinito, com o objetivo de minimizar o comprimento utilizado. Ao impor que os cortes devem ser do tipo guilhotina (quando aplicado a uma placa, o corte é realizado paralelamente a um de seus lados, de uma extremidade a outra da placa ou sub-região), a maioria dos trabalhos propostos na literatura considera peças retangulares [Gilmore e Gomory, 1965; Beasley, 1985; Russo et al., 2020]. No entanto, no contexto industrial, especialmente na indústria do vidro, a maioria das peças são irregulares, e os cortes devem seguir uma sequência guilhotina, não necessariamente em direções ortogonais [Han et al., 2013].

A literatura para o problema de cortes guilhotina em problemas com itens irregulares apresenta apenas procedimentos heurísticos como estratégia de solução [Han et al., 2013; Martinez-Sykora et al., 2015; Bennell et al., 2018]. Não existem métodos exatos que resolvam de forma eficiente o *irregular strip packing problem* com essa restrição.

Este trabalho propõe o primeiro método exato baseado em *Branch-and-Cut*, utilizando uma modelagem discreta adaptada do *Dotted Board Model* [Toledo et al., 2013]. O algoritmo elimina padrões de corte inviáveis por meio da geração dinâmica de cortes válidos, garantindo que os mesmos sejam do tipo guilhotina. As peças são convexas e consideradas com rotações discretas, o que preserva a generalidade do modelo. Esta abordagem oferece uma alternativa robusta e rigorosa para um problema até então resolvido apenas de forma aproximada.

2. O Modelo Dotted Board

O *Dotted Board Model* (DBM) é uma formulação baseada em grade para problemas de corte de peças irregulares, na qual a região disponível (placa) é discretizada em um conjunto finito de pontos denominados *dots*. A cada combinação de ponto d , tipo de peça t e rotação r , associa-se uma variável binária δ_{dtr} , que assume valor 1 se e somente se a peça t na orientação r for posicionada com sua âncora no ponto d [Toledo et al., 2013; Cherri et al., 2018].

No modelo proposto por Toledo et al. [2013], sempre que duas peças em uma dada rotação não podem estar em um determinado ponto ao mesmo tempo, uma restrição $\delta_{dtr} + \delta_{d't'r'} \leq 1$ é imposta, podendo gerar um número substancialmente grande de restrições. Para contornar o grande número de restrições referentes a não-sobreposição de peças, [Rodrigues e Toledo, 2017] propuseram uma reformulação do modelo via cobertura de arestas por cliques. Nesta reformulação, um grafo de cliques de sobreposição $G(v, e)$ é gerado, reduzindo o número de restrições de não sobreposição do modelo drasticamente. Este modelo, apresentado abaixo, é utilizado como base neste trabalho.

$$\min \quad L \quad (1)$$

$$\text{s.a} \quad (x_d + l_{tr}^{\max}), \delta_{dtr} \leq L \quad d \in D, r \in R, t \in T \quad (2)$$

$$\sum_{(d,t,r) \in K} \delta_{dtr} \leq 1 \quad k \in G(v, e) \quad (3)$$

$$\sum_{r,d} \delta_{dtr} = q_t \quad t \in T \quad (4)$$

$$\delta_{dtr} \in \{0, 1\} \quad d \in D, r \in R, t \in T \quad (5)$$

No modelo (1)-(5), a função objetivo (1) minimiza o comprimento utilizado da placa para acomodar todas as peças. As Restrições (2) garantem suporte à função objetivo. A não sobreposição entre as peças é garantida pelas Restrições (3) impostas. A Restrição (4) garante que todas as peças sejam cortadas da placa. Por fim, as Restrições (5) definem o domínio das variáveis de decisão.

3. Método de Branch-and-Cut

Para impor as restrições de guilhotina, definimos padrões não-guilhotináveis como subconjuntos de posicionamento de peças na placa que não admitem sequência de cortes retos de borda a borda que separem todas as peças. Se todos os subconjuntos deste tipo em S fossem conhecidos, a não sobreposição das peças poderia ser garantida fazendo:

$$\sum_{(d,t,r) \in s} \delta_{dtr} \leq |s| - 1, s \in S$$

Entretanto, encontrar todos esses subconjuntos de posicionamentos é uma tarefa árdua por si só, talvez mais difícil que o problema original. Além disso, o número de todas as possíveis restrições de guilhotina tende a ser demasiadamente grande, inviabilizando a resolução do modelo.

Para lidar com este problema, introduzimos um algoritmo do tipo Branch-and-Cut para a resolução do modelo (1)-(5). Para tal, considere originalmente o modelo (1)-(5) e que um conjunto $\bar{S}$ é vazio. Para toda solução factível encontrada por este modelo durante sua resolução, verificamos se esta solução é guilhotinável. Isto é feito analisando recursivamente se existe uma reta que separa um subconjunto de peças em dois grupos. Este procedimento é realizado com base na função D (orientação relativa ponto-linha) [Bennell e Oliveira, 2008]. Se tal corte não é encontrado, um conjunto s de peças é identificado, caracterizando um padrão inválido e é adicionado a $\bar{S}$.

Desta forma, o corte gerado para garantir a guilhotinabilidade da solução é dado por:

$$\sum_{(t,r,d) \in s} \delta_{dtr} \leq |s| - 1, s \in \bar{S}$$

Esses cortes são inseridos durante a resolução do problema, ou seja, o modelo é refinado sem a necessidade de voltar ao início da busca por soluções. Este procedimento é implementado via *callbacks* no solver MIP.

4. Resultados

Os resultados experimentais mostraram a eficácia da abordagem *branch-and-cut* para o problema de *Strip Packing*. O método foi capaz de encontrar uma solução ótima comprovada para 37 de 76 instâncias (47%) da literatura, destacando-se em casos como SHAPES4, RCO3 e SHIRTS2_4, que, devido ao número de peças e tamanho das placas, se apresentaram como mais desafiadoras. Para as instâncias em que a solução ótima não foi encontrada dentro do limite de tempo de 3600 segundos, a lacuna média foi de 14,5%, um valor típico para problemas de corte, que apresentam formulações com lacunas consideráveis, mesmo quando próximas da solução ótima. A média de tempo de execução foi de aproximadamente 1980 segundos, com a função de *callback* sendo chamada 484,89 vezes em média, e a inserção de cerca de 1,9 cortes por chamada, representando 9% do tempo total de solução.

Em termos de desempenho, o algoritmo *branch-and-cut* demonstrou eficiência em instâncias difíceis, em que o número de chamadas ao algoritmo *branch-and-cut* inseridos foram elevados, evidenciando que esse método não apenas acelera a resolução do modelo, mas também incorpora restrições reais, como os cortes guilhotinados, essenciais para a aplicabilidade prática do problema. Em particular, a instância SHAPES7 apresentou um número significativo de chamadas (668) e cortes inseridos (983), com o tempo de *callback* consumindo uma porção considerável do tempo total

de execução (901,3 segundos). Esses resultados indicam que a técnica *branch-and-cut* pode ser uma ferramenta poderosa para lidar com o problema de *Strip Packing*, oferecendo soluções de alta qualidade para um conjunto diversificado de instâncias.

5. Conclusão

Este trabalho apresenta um avanço significativo no tratamento do problema de corte de peças irregulares com restrição de cortes guilhotina. A partir do desenvolvimento de um algoritmo exato baseado em *Branch-and-Cut*, foi possível superar desafios clássicos, como a explosão combinatória e a complexidade das restrições de guilhotina, oferecendo soluções ótimas em diversas instâncias. Os resultados experimentais indicam a eficácia do método, o que abre novos caminhos para a pesquisa de métodos exatos para os problemas de corte de peças irregulares considerando restrições de guilhotina.

Agradecimento: Esta pesquisa é financiada pela FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (Processo nº 2024/05964-2 e 2022/05803-3) e CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Processo nº 306451/2024-7).

Referências

- Beasley, J. (1985). Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *Journal of the Operational Research Society*, 36(4):297–306.
- Bennell, J. A., Cabo, M., e Martinez-Sykora, A. (2018). A beam search approach to solve the convex irregular bin packing problem with guillotine cuts. *European Journal of Operational Research*, 270(1):89–102.
- Bennell, J. A. e Oliveira, J. F. (2008). The geometry of nesting problems: A tutorial. *European Journal of Operational Research*, 184(2):397 – 415.
- Cherri, L. H., Cherri, A. C., e Soler, E. M. (2018). Mixed integer quadratically-constrained programming model to solve the irregular strip packing problem with continuous rotations. *Journal of Global Optimization*, 72(1):89–107.
- Gilmore, P. e Gomory, R. E. (1965). Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations research*, 13(1):94–120.
- Han, W., Bennell, J. A., Zhao, X., e Song, X. (2013). Construction heuristics for two-dimensional irregular shape bin packing with guillotine constraints. *European journal of operational research*, 230(3):495–504.
- Martinez-Sykora, A., Alvarez-Valdes, R., Bennell, J., e Tamarit, J. M. (2015). Constructive procedures to solve 2-dimensional bin packing problems with irregular pieces and guillotine cuts. *Omega*, 52:15–32.
- Rodrigues, M. O. e Toledo, F. M. B. (2017). A clique covering mip model for the irregular strip packing problem. *Computers & Operations Research*, 87:221–234.
- Russo, M., Boccia, M., Sforza, A., e Sterle, C. (2020). Constrained two-dimensional guillotine cutting problem: upper-bound review and categorization. *International Transactions in Operational Research*, 27(2):794–834.
- Toledo, F. M., Carravilla, M. A., Ribeiro, C., Oliveira, J. F., e Gomes, A. M. (2013). The dotted-board model: A new mip model for nesting irregular shapes. *International Journal of Production Economics*, 145(2):478 – 487.