57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

NÚMERO CROMÁTICO ANTIMÁGICO LOCAL DE DUPLAS VASSOURAS DE DIÂMETRO NO MÁXIMO 4

Lara Rodrigues Ventura
Universidade Federal Fluminense - UFF
Av. dos Trabalhadores, 420, Vila Sta. Cecília
27255-125 – Volta Redonda, RJ
laraventura@id.uff.br

André Ebling Brondani, Francisca Andrea Macedo França
Departamento de Matemática, Universidade Federal Fluminense - UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783, Aterrado
27213-415– Volta Redonda, RJ
andrebrondani@id.uff.br, francisca_franca@id.uff.br

RESUMO

A rotulação de grafos é um dos tópicos de pesquisa em teoria de grafos que associa um elemento do grafo, como vértices ou arestas, a números inteiros denominados rótulos. Dado um grafo simples, não direcionado e conexo G com pelo menos três vértices e m arestas, uma rotulação antimágica local de G é uma bijeção de $E(G)$ em $\{1, 2, \ldots, m\}$ que induz uma rotulação dos vértices em G, de modo que vértices adjacentes não admitam a mesma rotulação. Neste artigo, determinamos rotulações antimágicas locais para a classe das árvores duplas vassouras com diâmetro 3 e 4. Com base nessas construções, calculamos o número cromático antimágico local dessas árvores, verificando que os valores obtidos estão de acordo com uma conjectura recente da literatura.

PALAVRAS CHAVE. Rotulação antimágica local. Número cromático antimágico local. Árvores dupla vassoura.

Tópicos - TAG – Teoria dos Grafos e Algoritmos Relacionados.

ABSTRACT

Graph labeling is one of the research topics in graph theory that associates elements of a graph, such as vertices or edges, with integers called labels. Given a simple, undirected, and connected graph G with at least three vertices and m edges, a local antimagic labeling of G is a bijection from $E(G)$ to $\{1, 2, \ldots, m\}$ that induces a labeling of the vertices of G such that adjacent vertices receive distinct labels. In this paper, we determine local antimagic labelings for the class of double broom trees with diameters 3 and 4. Based on these constructions, we compute the local antimagic chromatic number of these trees, verifying that the obtained values are consistent with a recent conjecture in the literature.

KEYWORDS. Local antimagic labeling. Local antimagic chromatic number. Double broom trees.

Paper Topics – GAT – Graph Theory and Related Algorithms.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

1. Introdução

A Teoria de Grafos possui ampla aplicação em diversas áreas, como modelagem de redes, projeto de bancos de dados, agendamento de tarefas e problemas clássicos como o do caixeiro viajante. Um campo relevante dentro dessa teoria é o estudo de rotulações de grafos, que apresenta inúmeras variantes com aplicações em criptografia, redes de comunicação e otimização combinatória; para mais detalhes, ver [Krishnaa, 2016]. Entre essas variantes, destaca-se a *rotulação antimágica local*, que impõe restrições específicas à atribuição de rótulos às arestas de um grafo.

Neste trabalho, consideramos apenas grafos conexos, simples e não direcionados, aos quais nos referimos simplesmente como grafos. Para um grafo G, denotamos por $V(G)$ o seu conjunto de vértices e por $E(G)$ o seu conjunto de arestas; as quantidades $|V(G)|$ e $|E(G)|$ são chamadas, respectivamente, de ordem e tamanho de G.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo e $f : E \to \{1, 2, \ldots, |E|\}$ uma bijeção. Para cada vértice $v \in V$, define-se o peso de v como $f^+(v) = \sum_{e \in E(v)} f(e)$, onde $E(v)$ denota o conjunto de arestas incidentes em v. A bijeção f é chamada de *rotulação antimágica* quando $f^+(u) \neq f^+(v)$ para todo par de vértices distintos $u, v \in V$. Caso tal rotulação exista, o grafo G é dito *antimágico*.

Em 1990, Hartsfield e Ringel introduziram o conceito de rotulação antimágica e conjecturaram que todo grafo conexo, exceto o grafo completo K_2, é antimágico [Hartsfield e Ringel, 1994]. Desde então, essa conjectura tem sido amplamente investigada, com avanços significativos em diversas classes especiais de grafos. No entanto, permanece em aberto mesmo para famílias estruturalmente simples, como as árvores. Para uma visão abrangente dos avanços nessa área, ver [Gallian, 2023].

Mais recentemente, em 2017, os autores em [Arumugam et al., 2017] e [Bensmail et al., 2019] introduziram, independentemente, a *rotulação antimágica local* como uma variação local da definição original proposta por Hartsfield e Ringel. Nessa abordagem, exige-se que $f^+(u) \neq f^+(v)$ para todo par de vértices adjacentes $u, v \in V(G)$. Um grafo que admite tal rotulação é denominado *grafo antimágico local*. Ambos os grupos propuseram a conjectura de que todo grafo conexo, exceto K_2, é antimágico local. Essa conjectura foi posteriormente provada em [Haslegrave, 2018] por meio de técnicas probabilísticas.

Toda rotulação antimágica local de um grafo G induz uma rotulação própria de vértices, na qual o peso $f^+(v)$ de cada vértice v é interpretado como seu rótulo. Isso conduz naturalmente à definição do *número cromático antimágico local*, introduzido em [Arumugam et al., 2017], e denotado por $\chi_{la}(G)$. Este invariante representa o número mínimo de rótulos distintos obtidos nas rotulações de vértices induzidas por todas as rotulações antimágicas locais de G. O parâmetro $\chi_{la}(G)$ já foi investigado em diversas classes de grafos; ver, por exemplo, [Sethuraman e Shermily, 2021] e [Ventura et al., 2024].

Seja T uma árvore com $\ell \geq 2$ folhas. Os autores em [Arumugam et al., 2017] demonstraram que $\chi_{la}(T) \geq \ell + 1$. Além disso, foi conjecturado em [Premalatha et al., 2020] e [Baca et al., 2022] que, para toda árvore T com $\ell \geq 2$ folhas, $\chi_{la}(T) \leq \ell + 2$.

Motivados por essa conjectura, neste trabalho construímos rotulações antimágicas locais para uma classe específica de árvores: as duplas vassouras de diâmetro 3 e 4. Determinamos, em cada caso, o valor de $\chi_{la}(T)$, verificando a validade da conjectura para essas estruturas. Além disso, identificamos subclasses infinitas cujos valores atingem exatamente a cota superior conjecturada.

O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2 apresentamos os conceitos preliminares; na Seção 3, os resultados principais. Por fim, na Seção 4, discutimos as conclusões e apontamos direções para trabalhos futuros.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

2. Conceitos Preliminares e Resultados Básicos

Nesta seção, apresentamos os principais conceitos e resultados da Teoria de Grafos necessários para a leitura deste trabalho, com ênfase em definições relacionadas à rotulação antimágica local e ao número cromático antimágico local. Para detalhes adicionais, ver [Merris, 2001].

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples, com conjunto de vértices $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e conjunto de arestas $E \subseteq \{v_i v_j ; i \neq j, v_i, v_j \in V\}$. Indicamos por $|V|$ e $|E|$, respectivamente, a *ordem* e o *tamanho* de G. Dois vértices distintos, v_i e v_j em V, são ditos *vértices adjacentes* se $v_i v_j \in E$. Neste caso, diz-se que a aresta $v_i v_j$ *incide* nos vértices v_i e v_j. A vizinhança do vértices v_i é o conjunto $N_G(v_i) = \{v_j \in V;\, v_i v_j \in E\}$, e o grau de v_i é definido por $d(v_i) = |N_G(v_i)|$. Os vértices de grau 1 de G, quando existem, são ditos *vértices pendentes*, e uma aresta que incide em um vértice pendente é denominada *aresta pendente*. Uma sequência finita de vértices $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ é dita uma *cadeia* de v_1 a v_k se, para todo $1 \leq i \leq k-1$, tem-se $v_i v_{i+1} \in E$. A cadeia é dita *fechada* quando $v_1 = v_k$, e *aberta* caso contrário. Além disso, uma cadeia é *simples* quando $v_i \neq v_j$, onde $2 \leq i, j \leq k$. Um *caminho* é uma cadeia simples e aberta, enquanto um *ciclo* é uma cadeia simples e fechada. Um grafo é dito *conexo* quando seu conjunto de vértices é unitário ou existe um caminho ligando cada par de vértices de G. Caso contrário, o grafo é denominado *desconexo*. Um grafo conexo e acíclico é denominado *árvore* e as suas *folhas* são os seus vértices pendentes.

Dados $G = (V, E)$ e $u \in V$, denotemos por $E(u)$ ao conjunto formado pelas arestas de G que incidem em u. Os conceitos de rotulação antimágica local e número cromático antimágico local de um grafo foram introduzidos em [Arumugam et al., 2017], conforme as definições a seguir.

Definition 2.1. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Uma *rotulação antimágica local* de G é uma bijeção $f : E \to \{1, 2, \ldots, |E|\}$ tal que a rotulação de vértices induzida $f^+ : V \to \mathbb{Z}$ dada por $f^+(u) = \sum_{e \in E(u)} f(e)$, tem a propriedade de que quaisquer dois vértices adjacentes em G recebem rótulos de vértice distintos. Um grafo que admite uma rotulação antimágica local é denominado *antimágico local*.

De acordo com [Haslegrave, 2018], todos os grafos sem vértices isolados e sem componentes conexas isomorfas ao grafo completo K_2, admitem uma rotulação antimágica local.

Definition 2.2. Seja G um grafo antimágico local de ordem $n \geq 3$. O *número cromático antimágico local* de G, denotado por $\chi_{la}(G)$, é definido como o menor número de rótulos de vértices distintos obtido dentre todas as rotulações antimágicas locais possíveis de G.

Para todo grafo G, o número cromático $\chi(G)$ está relacionado ao número cromático antimágico local $\chi_{la}(G)$ pela desigualdade $\chi_{la}(G) \geq \chi(G)$. Além disso, a diferença $\chi_{la}(G) - \chi(G)$ pode ser arbitrariamente grande, conforme estabelecido no teorema a seguir, apresentado em [Arumugam et al., 2017].

Teorema 2.3. *Se T é uma árvore com $\ell \geq 2$ folhas, então $\chi_{la}(T) \geq \ell + 1$.*

Observação 2.4. *O Teorema 2.3 foi generalizado em [Baca et al., 2021], onde os autores observam que a mesma desigualdade se verifica para grafos de ordem $n \geq 3$ com ℓ vértices pendentes.*

Além disso, os autores em [Premalatha et al., 2020] e [Baca et al., 2022] conjecturam que, para toda árvore T com $\ell \geq 2$ folhas, a desigualdade $\chi_{la}(T) \leq \ell + 2$ é verdadeira. Eles também propõem uma caracterização de árvores para as quais $\chi_{la}(T) = \ell + 1$.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

3. Rotulações Antimágicas Locais em Árvores Dupla Vassoura

A seguir, apresentamos os principais resultados obtidos neste trabalho. Construímos rotulações antimágicas locais para a classe das árvores dupla vassoura, considerando os casos em que o diâmetro é igual a 3 ou 4. Para cada árvore, determinamos explicitamente o valor de $\chi_{la}(T)$ e verificamos que os resultados obtidos estão de acordo com a conjectura de [Premalatha et al., 2020; Baca et al., 2022].

Dados inteiros positivos p_1 e p_2, uma *dupla vassoura* de diâmetro $d > 1$ é a árvore obtida a partir do caminho $P_{d-1} = (w_1 w_2 \cdots w_{d-1})$ com o acréscimo de p_1 e p_2 folhas nos vértices w_1 e w_{d-1}, respectivamente. Denotamos tais árvores por $B^d_{p_1,p_2}$. Note que a dupla vassoura $B^d_{p_1,p_2}$ tem $\ell = p_1 + p_2$ folhas e tamanho $m = p_1 + p_2 + d - 2$.

3.1. Árvores Dupla Vassoura com Diâmetro 3

Nesta subseção, analisamos a classe das árvores dupla vassoura com diâmetro igual a 3. Apresentamos o valor exato de $\chi_{la}(T)$ para diferentes relações entre p_1 e p_2, iniciando pelo estudo de casos particulares e prosseguindo para situações mais gerais.

Teorema 3.1. *Se p_1 e p_2 são inteiros tais que $1 \leq p_1 \leq p_2$, então*

$$\chi_{la}(B^3_{p_1,p_2}) = \begin{cases} p_1 + p_2 + 1, & \text{se } p_2 \geq \frac{p_1(p_1+1)}{2}; \\ p_1 + p_2 + 2, & \text{se } p_1 = p_2 \geq 2 \text{ ou } p_2 < \frac{p_1(p_1+1)}{2}. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $V_1 = \{u_i \,|\, d(u_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p_1\}$, $V_2 = \{v_i \,|\, d(v_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p_2\}$, e $V_3 = \{w_1 \,|\, d(w_1) = p_1 + 1\} \cup \{w_2 \,|\, d(w_2) = p_2 + 1\}$ conjuntos tais que

$$\begin{aligned} V(B^3_{p_1,p_2}) &= V_1 \cup V_2 \cup V_3, \text{ e} \\ E(B^3_{p_1,p_2}) &= \{w_1 u_i \mid 1 \leq i \leq p_1\} \cup \{w_2 v_i \mid 1 \leq i \leq p_2\} \cup \{w_1 w_2\}. \end{aligned}$$

Considere a rotulação de arestas $f : E(B^3_{p_1,p_2}) \to \{1, 2, \ldots, p_1 + p_2 + 1\}$ dada por

$$\begin{aligned} f(w_1 u_i) &= i, && \text{onde} \quad 1 \leq i \leq p_1; \\ f(w_2 v_i) &= p_1 + 1 + i, && \text{onde} \quad 1 \leq i \leq p_2; \\ f(w_1 w_2) &= p_1 + 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Note que f é uma rotulação antimágica local de $B^3_{p_1,p_2}$ cuja rotulação dos seus vértices induzida por f é dada por

$$\begin{aligned} f^+(u_i) &= f(u u_i), && \text{onde} \quad 1 \leq i \leq p_1; \\ f^+(v_i) &= f(v v_i), && \text{onde} \quad 1 \leq i \leq p_2; \\ f^+(w_1) &= (p_1 + 1)\left(\frac{p_1}{2} + 1\right); \\ f^+(w_2) &= (p_2 + 1)\left(p_1 + 1 + \frac{p_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Assim, é fácil ver que

$$\chi_{la}(B^3_{p_1,p_2}) \leq p_1 + p_2 + 2, \tag{2}$$

para quaisquer números inteiros positivos p_1 e p_2.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

Seja g qualquer rotulação antimágica local de $B^3_{p_1,p_2}$. Note que, para o vértice $w_1 \in V(B^3_{p_1,p_2})$, obtemos

$$g^+(w_1) \geq \sum_{k=1}^{p_1+1} k = \frac{(p_1+1)(p_1+2)}{2}. \tag{3}$$

Como o caso $p_1 = p_2 = 1$ foi estudado em [Arumugam et al., 2017], considere os seguintes três casos, para $p_2 \neq 1$.

Caso 1. Seja $p_1 = p_2 = p \geq 2$.

Como $p \geq 2$, de (3) obtemos

$$g^+(w_1) \geq \frac{p(p-1)}{2} + 2p + 1 > 2p + 1.$$

Consequentemente, $g^+(w_1) > g^+(v_i)$, para todo i, $1 \leq i \leq p$, e $g^+(w_1) \neq g^+(w_2)$, pois são vértices adjacentes. De forma similar, observamos que $g^+(w_2) > 2p + 1$, o que resulta em $g^+(w_2) > g^+(u_i)$, para todo i. Assim, $\chi_{la}(B^3_{p,p}) \geq 2p + 2$. Combinando esta última desigualdade com (2), obtemos $\chi_{la}(B^3_{p,p}) = 2p + 2$.

Caso 2. Suponha que $p_1 < p_2 < \frac{p_1(p_1+1)}{2}$, com $p_1 \geq 1$.

Dado que $p_2 < \frac{p_1(p_1+1)}{2}$, de (3) temos

$$\begin{aligned} g^+(w_1) &\geq \sum_{i=1}^{p_1+1} i = \frac{(p_1+1)(p_1+2)}{2} \\ &> p_2 + p_1 + 1. \end{aligned}$$

Logo, $g^+(w_1) \neq g^+(v_i)$, onde $1 \leq i \leq p_2$. De forma análoga ao Caso 1, obtemos $\chi_{la}(B^3_{p_1,p_2}) = p_1 + p_2 + 2$.

Caso 3. Suponha que $1 \leq p_1 < p_2$ e $p_2 \geq \frac{p_1(p_1+1)}{2}$.

Para verificar a cota superior, observe que da rotulação de vértices induzida por f em (1), temos

$$f^+(w_1) = \frac{(p_1+1)(p_1+2)}{2} = \frac{p_1(p_1+1)}{2} + (p_1+1) \leq p_1 + p_2 + 1 = |E|.$$

Dado que

$$1 \leq \frac{p_1(p_1+1)}{2} \leq p_2 \quad \text{e} \quad f^+(v_i) = (p_1+1) + i, \;\; 1 \leq i \leq p_2.$$

Para $i = \frac{p_1(p_1+1)}{2}$, temos

$$f^+(w_1) = \frac{p_1(p_1+1)}{2} + (p_1+1) = f^+(v_{\frac{p_1(p_1+1)}{2}}).$$

Portanto,

$$\chi_{la}(B^3_{p_1,p_2}) \leq p_1 + p_2 + 1.$$

Logo, pelo Teorema 2.3 segue que $\chi_{la}(B^3_{p_1,p_2}) = p_1 + p_2 + 1$. □

A Figura 1 ilustra a dupla vassoura $B^3_{2,3}$ juntamente com uma rotulação que atinge seu número cromático antimágico local. Observa-se que, neste caso, a árvore satisfaz os critérios estabelecidos no Caso 3 da demonstração do Teorema 3.1.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

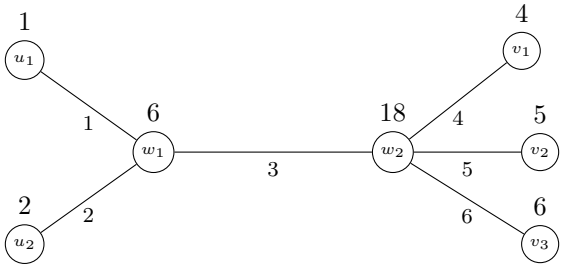

Figura 1: Árvore dupla vassoura com $\chi_{la}(B^3_{2,3}) = 6$.
Fonte:Autor

3.2. Árvores Dupla Vassoura com Diâmetro 4

Nesta subseção, apresentamos os resultados obtidos para a classe das árvores dupla vassoura com diâmetro igual a 4. Inicialmente, analisamos o caso em que uma das extremidades da árvore possui exatamente uma folha, estabelecendo assim as bases para os casos subsequentes dessa família de grafos.

Teorema 3.2. *Seja p um inteiro positivo . Se $p \geq 2$, então $\chi_{la}(B^4_{1,p}) = p + 2$.*

Demonstração. Suponha $V(B^4_{1,p}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, u_1, w_1, w_2, w_3\}$ onde $d(w_1) = d(w_2) = 2, d(w_3) = p_2 + 1$ e os demais vértices são folhas.

$$\begin{aligned} V(B^4_{1,p}) &= V_1 \cup V_2, \text{ e} \\ E(B^4_{1,p}) &= \{w_1u_1\} \cup \{w_3v_i | 1 \leq i \leq p_2\} \cup \{w_1w_2\} \cup \{w_2w_3\}. \end{aligned}$$

onde $V_1(B^4_{1,p}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ e $V_2(B^4_{1,p}) = \{u_1, w_1, w_2, w_3\}$.

Para $1 \leq i \leq p_2$, considere a rotulação de arestas $f : E(B^4_{1,p}) \to \{1, 2, \ldots, p_2 + 3\}$ dada por

$$\begin{aligned} f(w_1u_1) &= 3; \\ f(w_3v_i) &= 3 + i; \\ fw_1w_2) &= 1; \\ f(w_2w_3) &= 2. \end{aligned}$$

Note que f é uma rotulação antimágica local de $B^4_{1,p}$ cuja a rotulação de seus vértices, induzida por f, sendo $1 \leq i \leq p$, é dada por

$$\begin{aligned} f^+(u_1) &= 3; \\ f^+(v_i) &= 3 + i; \\ f^+(w_1) &= 4; \\ f^+(w_2) &= 3; \\ f^+(w_3) &= \tfrac{p_2^2+7p_2+4}{2}. \end{aligned}$$

Como $f^+(u_1) = f^+(w_2)$ e $f^+(w_1) = f^+(v_1)$, então $\chi_{la}(B^4_{1,p}) \leq p + 2$. Pelo Teorema 2.3 temos $\chi_{la}(B^4_{1,p}) \geq p + 2$. Portanto, $\chi_{la}(B^4_{1,p}) = p + 2$. □

Em seguida, consideramos o caso em que uma das extremidades da dupla vassoura possui exatamente duas folhas.

Teorema 3.3. *Seja p um inteiro positivo . Se $p \geq 2$, então $\chi_{la}(B^4_{2,p}) = p + 3$.*

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

Demonstração. Suponha $V(B^4_{2,p}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{p_2}, u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$ onde $d(w_1) = 3, d(w_2) = 2$, $d(w_3) = p + 1$ e os demais vértices são folhas.

Considere $V_1(B^4_{2,p}) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ e $V_2(B^4_{2,p}) = \{u_1, u_2, w_1, w_2, w_3\}$. Assim, o conjunto de vértices e arestas de $B^4_{2,p}$ são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} V(B^4_{2,p}) &= V_1 \cup V_2, \text{ e} \\ E(B^4_{2,p}) &= \{w_1u_1\} \cup \{w_1u_2\} \cup \{w_3v_i | 1 \leq i \leq p_2\} \cup \{w_1w_2\} \cup \{w_2w_3\}. \end{aligned}$$

Para $1 \leq i \leq p$, considere a rotulação de arestas $f : E(B^4_{2,p}) \to \{1, 2, \ldots, p_2 + 4\}$ dada por

$$\begin{aligned} f(w_1u_i) &= 1 + i; \quad \text{se } i \in \{1, 2\}; \\ f(w_3v_i) &= 4 + i; \\ f(w_1w_2) &= 1; \\ f(w_2w_3) &= 4. \end{aligned}$$

Note que f é uma rotulação antimágica local de $B^4_{2,p}$ cuja a rotulação de seus vértices, induzida por f, sendo $1 \leq i \leq p$, é dada por

$$\begin{aligned} f^+(u_i) &= 1 + i; \quad \text{se } i \in \{1, 2\}; \\ f^+(v_i) &= 4 + i; \\ f^+(w_1) &= 6; \\ f^+(w_2) &= 5; \\ f^+(w_3) &= \tfrac{p_2^2+9p_2+8}{2}. \end{aligned}$$

Como $f^+(w_2) = f^+(v_1)$ e $f^+(w_1) = f^+(v_2)$, segue que $\chi_{la}(B^4_{2,p}) \leq p + 3$. Por outro lado, aplicando o Teorema 2.3, conclui-se que $\chi_{la}(B^4_{2,p}) = p + 3$. □

A seguir, analisamos as duplas vassouras simétricas com número ímpar de folhas em cada extremidade.

Teorema 3.4. *Seja p é um inteiro positivo e ímpar. Se $p \geq 3$, então $\chi_{la}(B^4_{p,p}) = 2p + 1$.*

Demonstração. Sejam $V_1 = \{u_i \,|\, d(u_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p\}$, $V_2 = \{v_i \,|\, d(v_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p\}$, e $V_3 = \{w_2 \,|\, d(w_2) = 2\} \cup \{w_i \,|\, d(w_i) = p + 1,\ i \in \{1, 3\}\}$ conjuntos tais que

$$\begin{aligned} V(B^4_{p,p}) &= V_1 \cup V_2 \cup V_3, \text{ e} \\ E(B^4_{p,p}) &= \{w_1u_i \,|\, 1 \leq i \leq p\} \cup \{w_3v_i \,|\, 1 \leq i \leq p\} \cup \{w_1w_2, w_2w_3\}. \end{aligned}$$

Para $1 \leq i \leq p$, considere a rotulação de arestas $f : E(B^4_{p,p}) \to \{1, 2, \ldots, 2p + 2\}$ dada por

$$f(w_1u_i) = \begin{cases} 2i + 2, & \text{se } i \text{ ímpar ;} \\ 2i + 1, & \text{se } i \text{ par.} \end{cases}$$

$$f(w_3v_i) = \begin{cases} 2i + 1, & \text{se } i \text{ ímpar ;} \\ 2i + 2, & \text{se } i \text{ par.} \end{cases}$$

$$f(w_1w_2) = 1;$$
$$f(w_2w_3) = 2;$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

Observe que f é uma rotulação antimágica local de $B^4_{p,p}$ cuja rotulação dos seus vértices induzida por f é dada por

$$f^+(u_i) = \begin{cases} 2i+2, & \text{se } i \text{ ímpar ;} \\ 2i+1, & \text{se } i \text{ par.} \end{cases}$$

$$f^+(v_i) = \begin{cases} 2i+1, & \text{se } i \text{ ímpar ;} \\ 2i+2, & \text{se } i \text{ par.} \end{cases}$$

$$f^+(w_1) = f^+(w_3) = \tfrac{p+1}{2}(2p+3);$$
$$f^+(w_2) = 3.$$

Como $f^+(w_1) = f^+(w_3)$ e $f^+(w_2) = f^+(v_1)$ concluímos que $\chi_{la}(B^4_{p,p}) \leq 2p+1$. Ao combinar essa desigualdade com o Teorema 2.3, obtemos a igualdade $\chi_{la}(B^4_{p,p}) = 2p+1$. □

No próximo resultado, tratamos das duplas vassouras simétricas com número par de folhas em cada extremidade.

Teorema 3.5. *Seja p um inteiro positivo par. Se $p \geq 4$, então $\chi_{la}(B^4_{p,p}) = 2p+2$.*

Demonstração. Sejam $V_1 = \{u_i \,|\, d(u_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p\}$, $V_2 = \{v_i \,|\, d(v_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p\}$, e $V_3 = \{w_2 \,|\, d(w_2) = 2\} \cup \{w_i \,|\, d(w_i) = p+1,\ i \in \{1,3\}\}$ conjuntos tais que

$$\begin{aligned} V(B^4_{p,p}) &= V_1 \cup V_2 \cup V_3, \text{ e} \\ E(B^4_{p,p}) &= \{w_1u_i \,|\, 1 \leq i \leq p\} \cup \{w_3v_i \,|\, 1 \leq i \leq p\} \cup \{w_1w_2, w_2w_3\}. \end{aligned}$$

Para $1 \leq i \leq p$, considere a rotulação das arestas $f : E(B^4_{p,p}) \to \{1, 2, \ldots, 2p+2\}$ dada por

$$\begin{aligned} f(w_1u_i) &= i+1; \\ f(w_3v_i) &= p+2+i; \\ f(w_1w_2) &= 1; \\ f(w_2w_3) &= p+2. \end{aligned}$$

Note que f é uma rotulação antimágica local de $B^4_{p,p}$ cuja rotulação dos vértices induzida por f é dada por

$$\begin{aligned} f^+(u_i) &= f(w_1u_i), && 1 \leq i \leq p; \\ f^+(v_i) &= f(w_3v_i), && 1 \leq i \leq p; \\ f^+(w_1) &= \tfrac{(p+1)(p+2)}{2}; \\ f^+(w_2) &= p+3; \\ f^+(w_3) &= \tfrac{(p+1)(3p+4)}{2}. \end{aligned}$$

Como $f^+(v_1) = f^+(w_2)$, concluímos que

$$\chi_{la}(B^4_{p,p}) \leq 2p+2. \tag{4}$$

Assuma que $\chi_{la}(B^4_{p,p}) = 2p+1$. Então, existe uma rotulagem antimágica local $g : E(B^4_{p,p}) \to \{1, 2, \ldots, 2p+2\}$ que induz uma rotulagem de vértices com $2p+1$ rótulos. Temos dois casos para analisar.

Caso 1: $g^+(w) = g^+(x)$ para algum $x \in V_1 \cup V_2$, onde $w \in \{w_1, w_3\}$.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

Para este caso, como $p \geq 4$,

$$\begin{aligned} g^+(w) &\geq \sum_{i=1}^{p+1} i = \frac{(p+2)(p+1)}{2} \\ &> 2(p+1) = |E|. \end{aligned}$$

Como $g^+(x) \leq |E|$, este caso não pode ocorrer.

Caso 2: $g^+(w_1) = g^+(w_3)$.

Temos que

$$2g^+(w_1) = g^+(w_1) + g^+(w_3) = (2p+3)(p+1),$$

o que é uma contradição, pois $2g^+(w_1)$ é um número par, enquanto $(2p+3)(p+1)$ é ímpar, considerando que p é par. Portanto, esse caso é impossível.

Como ambos os casos levam a contradições, concluímos que não existe uma rotulação antimágica local g para o grafo em questão. Dessa forma, tem-se

$$\chi_{la}(B^4_{p,p}) \geq 2p+2.$$

Finalmente, ao combinar esta desigualdade com a estimativa apresentada em (4), obtemos o resultado desejado. □

Por fim, apresentamos o caso geral de duplas vassouras de diâmetro 4 com extremidades possuindo números distintos de folhas.

Teorema 3.6. *Sejam p_1 e p_2 inteiros tais que $p_2 - 1 \geq p_1 \geq 3$.*

(i) Se $p_2 \geq \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}$, então $\chi_{la}(B^4_{p_1,p_2}) = p_1 + p_2 + 1$.

(ii) Se $p_2 < \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}$ e $r \in \{1,2\}$, então

$$\chi_{la}(B^4_{p_1,p_2}) = \begin{cases} p_1+p_2+1, \text{ se } p_1+p_2 \equiv r \pmod 4; \\ p_1+p_2+2, \text{ caso contrário}. \end{cases}$$

Demonstração. Sejam $V_1 = \{u_i \,|\, d(u_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p_1\}$, $V_2 = \{v_i \,|\, d(v_i) = 1,\ 1 \leq i \leq p_2\}$, e $V_3 = \{w_1 \,|\, d(w_1) = p_1 + 1\} \cup \{w_2 \,|\, d(w_2) = 2\} \cup \{w_3 \,|\, d(w_3) = p_2 + 1\}$ conjuntos tais que

$$\begin{aligned} V(B^4_{p_1,p_2}) &= V_1 \cup V_2 \cup V_3, \text{ e} \\ E(B^4_{p_1,p_2}) &= \{w_1u_i \mid 1 \leq i \leq p_1\} \cup \{w_3v_i \mid 1 \leq i \leq p_2\} \cup \{w_1w_2, w_2w_3\}. \end{aligned}$$

Considere a rotulação de arestas $f : E(B^4_{p_1,p_2}) \to \{1, 2, \ldots, p_1+p_2+2\}$ dada por

$$\begin{aligned} f(w_1u_i) &= i+1, && \text{se } 1 \leq i \leq p_1; \\ f(w_1w_2) &= 1; \\ f(w_2w_3) &= p_1+2; \\ f(w_3v_i) &= p_1+2+i, && \text{se } 1 \leq i \leq p_2. \end{aligned}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

Note que f é uma rotulação antimágica local de $B^4_{p_1,p_2}$ cuja a rotulação de vértices induzida por f é dado por

$$\begin{aligned} f^+(u_i) &= i+1, && \text{se } 1 \leq i \leq p_1; \\ f^+(v_i) &= p_1+2+i, && \text{se } 1 \leq i \leq p_2; \\ f^+(w_1) &= \frac{(p_1+1)(p_1+2)}{2}; \\ f^+(w_2) &= p_1+3 = f^+(v_1); \\ f^+(w_3) &= \frac{(2p_1+4+p_2)(1+p_2)}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Como $p_2 \geq \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}$, segue que

$$\begin{aligned} f^+(w_1) &= \frac{(p_1+1)(p_1+2)}{2} = \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2} + p_1 + 2 \\ &\leq p_1+p_2+2 = m. \end{aligned}$$

Portanto, $f^+(w_1) = \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2} + p_1 + 2 = f^+(v_{\frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}})$. Assim,

$$\chi_{la}(B^4_{p_1,p_2}) \leq p_1+p_2+1.$$

Do Teorema 2.3, obtemos $\chi_{la}(B^4_{p_1,p_2}) \geq p_1+p_2+1$, o que conlui a demonstração do item (i).

Agora, consideremos o caso em que $p_2 < \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}$ e suponhamos que $\chi_{la}(B^4_{p_1,p_2}) = p_1+p_2+1$. Dessa forma, existe uma rotulação antimágica local

$$g : E(B^4_{p_1,p_2}) \to \{1,2,\ldots,p_1+p_2+2\}$$

que induz uma rotulação dos vértices com exatamente p_1+p_2+1 valores distintos. A seguir, distinguiremos dois casos para análise.

Caso 1. Existe algum $j \in \{1,2,\ldots,p_2\}$ tal que $g^+(w_1) = g^+(v_j)$.

Temos $g^+(w_1) \geq \sum_{i=1}^{p_1+1} i = \frac{p_1(p_1+2)}{2} + \frac{p_1}{2} + 1$. Como $1 \leq g^+(v_j) \leq m$ para todo $j \in \{1,2,\ldots,p_2\}$ e $p_2 < \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}$, segue que $1 + \frac{p_1}{2} + p_2 < \frac{p_1(p_1+2)}{2}$ e, portanto, $g^+(w_1) > p_1+p_2+2 = m$, o que prova que este caso não pode ocorrer.

Caso 2. $g^+(w_1) = g^+(w_3)$.

Temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} i = 2g^+(w_1) &\Leftrightarrow \frac{m(m+1)}{2} = 2g^+(w_1) \\ &\Leftrightarrow g^+(w_1) = \frac{m(m+1)}{4}. \end{aligned} \tag{6}$$

Para (6), $g^+(w_1) \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}4)$ ou $m \equiv 3 \,(\mathrm{mod}4)$, ou seja, $g^+(w_1) \in \mathbb{Z}$ se, e somente se, $p_1+p_2 \equiv 2 \,(\mathrm{mod}4)$ ou $p_1+p_2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}4)$.

Como $p_2 < \frac{(p_1-1)(p_1+2)}{2}$, segue que $2(m-2-p_1) < p_1^2+p_1-2 \Leftrightarrow p_1^2+3p_1+2(1-m) > 0$. Assim,

$$\frac{-3+\sqrt{1+8m}}{2} \leq p_1 \leq \frac{m-3}{2}. \tag{7}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

Sejam q_1 e r_1 inteiros positivos tais que

$$g^+(w_1) = \frac{m(m+1)}{4} = p_1 q_1 + r_1,\ 0 \leq r_1 < p_1. \tag{8}$$

Note que $q_1 < m$, ou seja, $m = q_1 + m_1$. De fato, se $q_1 \geq m$, então

$$p_1 m \leq p_1 q_1 \leq m + \sum_{i=1}^{p_1 - 1} (m - i) = p_1 m - \frac{p_1(p_1 - 1)}{2},$$

o que é uma contradição.

Suponha que $p_1 = 2k$ para algum inteiro k e que $r_1 > 0$. Consideremos a rotulação de arestas $g : E(B^4_{p_1,p_2}) \to \{1, 2, \ldots, p_1 + p_2 + 2\}$ definida por

$$\begin{cases} g(w_1u_{2i}) = m - i + 1, & \text{se } 1 \leq i \leq k; \\ g(w_1u_{2i-1}) = q_1 - m_1 + i - 1, & \text{se } 1 \leq i \leq k; \\ g(w_1w_2) = r_1; \\ g(w_2w_3) = 1; \\ g(w_3v_i) = \begin{cases} m - i, & \text{se } k \leq i \leq 2k; \\ i, & \text{se } i \in [2, q_1 - m_1 - 1] \cup [q_1 - m_1 + k, m - 2k - 1]. \end{cases} \end{cases}$$

A rotulação de vértices induzida por g satisfaz $g^+(w_1) = g^+(w_3)$ e $g^+(w_2) = r_1 + 1 \leq p_1 + 1$, portanto, existe um vértice pendente v tal que $g^+(w_2) = g^+(v)$. Assim, concluímos que $\chi_{la}(B^d_{p_1,p_2}) \leq p_1 + p_2 + 1$. Combinando esta desigualdade com o Teorema 2.3, obtemos $\chi_{la}(B^d_{p_1,p_2}) = p_1 + p_2 + 1$. Por outro lado, se $p_1 = 2k + 1$ para algum k inteiro e $r_1 > 0$, basta acrescentar à rotulação de arestas g acima o item $g(w_1u_{2k+1}) = q_1$. Analogamente, concluímos que $\chi_{la}(B^4_{p_1,p_2}) = p_1 + p_2 + 1$. Se $r_1 = 0$ para p_1 par, definimos $g(w_1w_2) = 2$, enquanto para p_1 ímpar, tomamos $g(w_1w_2) = 1$, e o resultado segue da mesma forma. □

A Figura 2 exibe a dupla vassoura $B^4_{3,4}$ juntamente com uma rotulação correspondente ao seu número cromático antimágico local. Observa-se que, neste caso, a árvore satisfaz os critérios estabelecidos no item (ii) do Teorema 3.6.

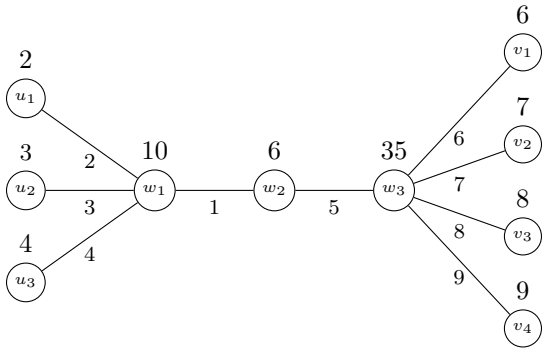

Figura 2: Árvore dupla vassoura com $\chi_{la}(B^4_{3,4}) = 9$.
Fonte:Autor

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br

4. Conclusões e Perspectivas de Trabalho Futuro

Os resultados obtidos para a classe das árvores dupla vassoura com diâmetros 3 e 4 confirmam a validade da conjectura proposta em [Premalatha et al., 2020; Baca et al., 2022], segundo a qual, para toda árvore T com $\ell \geq 2$ folhas, vale $\chi_{la}(T) \leq \ell + 2$. Observamos que, nessa classe, o número cromático antimágico local varia entre $\ell + 1$ e $\ell + 2$, sendo possível identificar subclasses infinitas de árvores que atingem exatamente a cota superior conjecturada.

Como desdobramento futuro, propomos estender as técnicas desenvolvidas para árvores com diâmetro maior que 4 ou com outras topologias ramificadas, como árvores não simétricas, a fim de verificar a generalidade da conjectura e explorar novas construções de rotulações antimágicas locais.

Agradecimentos

A primeira autora agradece ao PPG-MCCT/UFF e à CAPES, processo 88887968288/2024-00, pelo apoio. Os demais autores são parcialmente apoiados pelo CNPq, processo 405552/2023-8 e pela FAPERJ, processo E-20/2022-284573.

Referências

Arumugam, S., Premalatha, K., Baca, M., e Semanicová-Fenovcíková', A. (2017). Local antimagic vertex coloring of a graph. *Graphs and Combinatorics*, 33: 275–285.

Baca, M., Semanicová-Fenovciková, A., Lai, R.-T., e Wang, T.-M. (2022). On local antimagic vertex coloring for complete full t-ary trees. *Fundamenta Informaticae*, 185 (2):99–113.

Baca, M., Semanicová-Fenovciková, A., e Wang, T.-M. (2021). Local antimagic chromatic number for copies of graphs. *Mathematics*, 9 (11):1230.

Bensmail, J., Senhaji, M., e Lyngsie, K. (2019). On a combination of the 1-2-3 conjecture and the antimagic labeling conjecture. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 19(1): 201.

Gallian, J. A. (2023). A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*, p. 1–644.

Hartsfield, N. e Ringel, G. (1994). *Pearls in Graph Theory: A Comprehensive Introduction*. Academic Press, Inc., Boston.

Haslegrave, J. (2018). Proof of a local antimagic conjecture. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 20 (1).

Krishnaa, A. (2016). Some applications of labelled graphs. *International Journal of Mathematics Trends and Technology*, 37:209–213.

Merris, R. (2001). *Graph Theory*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Canada: John Wiley Sons, Inc.

Premalatha, K., Arumugam, S., Lee, Y., e Wang, T. (2020). Local antimagic chromatic number of trees - I. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, 25(6):1591–1602.

Sethuraman, G. e Shermily, K. (2021). Antimagic labeling of new classes of trees. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 18(2):110–116.

Ventura, L., Brondani, A., e França, F. (2024). Número cromático antimágico local dos grafos firefly. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, 10 (especial): e4005.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212405
https://proceedings.science/p/212405?lang=pt-br