

ABORDAGENS DE OTIMIZAÇÃO ROBUSTA PARA O PROBLEMA DE ALOCAÇÃO DE VEÍCULOS COM E SEM BACKLOG

Enzo C. Geraldini, João Marcos P. Silva, Reinaldo Morabito, Pedro Munari

Universidade Federal de São Carlos

Rodovia Washington Luis, km 235 - São Carlos - SP

enzocg@estudante.ufscar.br, {joaomps, morabito}@ufscar.br,
munari@dep.ufscar.br,

RESUMO

Este trabalho aborda o Problema de Alocação de Veículos sob incerteza na demanda, considerando duas variações: com e sem *backlog* de demanda. Foram propostos dois modelos de programação linear inteira baseados em otimização robusta. O modelo com *backlog* foi desenvolvido a partir da dualização das restrições associadas à incerteza, enquanto o modelo sem *backlog* incorpora incertezas por meio de restrições robustas derivadas de equações recursivas linearizadas. Ambos utilizam conjuntos e orçamentos de incerteza para modular o nível de conservadorismo aplicado aos parâmetros incertos. Experimentos computacionais com 51 instâncias baseadas em dados realistas indicaram o quanto o aumento do nível de robustez resulta em redução do lucro, auxiliando na análise de um equilíbrio necessário entre risco e desempenho. O modelo sem *backlog* apresentou tempos de solução estáveis mesmo em cenários com altos níveis de incerteza.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Alocação de Veículos, Otimização Robusta, Incerteza na Demanda.

Tópicos: MOI, L&T, AD&GP

ABSTRACT

This study addresses the Vehicle Allocation Problem under demand uncertainty, considering two variants: with and without demand backlog. Two integer linear programming models based on Robust Optimization are proposed. The model with backlog is formulated through the dualization of constraints associated with uncertainty, while the model without backlog incorporates uncertainty via robust constraints derived from linearized recursive equations. Both models employ uncertainty sets and budgets to adjust the level of conservatism applied to the uncertain parameters. Computational experiments on 51 instances based on realistic data showed that increasing the robustness level leads to reduced profits, highlighting the trade-off between performance and risk. The model without backlog demonstrated stable solution times even under high levels of uncertainty.

KEYWORDS. Vehicle Allocation Problem, Robust Optimization, Demand Uncertainty.

Paper topics: MOI, L&T, AD&GP

1. Introdução

O Problema de Alocação de Veículos (VAP, do inglês *Vehicle Allocation Problem*) consiste em decidir, ao longo de um horizonte de tempo, como alocar veículos entre diferentes terminais logísticos com o objetivo de atender demandas de transporte de carga. O problema envolve tanto a movimentação de veículos carregados, que geram receita ao atenderem pedidos, quanto de veículos vazios, necessários para reposicionar a frota e viabilizar os atendimentos futuros.

O VAP foi originalmente formulado por Powell [1986], que considerou caminhões ao invés de trens e navios, e utilizou um modelo estocástico para tratar a incerteza na demanda. Trabalhos posteriores propuseram novas técnicas de resolução, como aproximações sucessivas [Frantzeskakis e Powell, 1990; Cheung e Powell, 1996] e redes de filas lineares [Powell, 1998].

Considerando o contexto das transportadoras brasileiras, Vasco e Morabito [2014, 2015, 2016] desenvolveram modelos de programação inteira para variantes do VAP que incorporam restrições práticas, como a existência de diferentes tipos de veículos, limitações nas rotas, disponibilidade específica por terminal e período, além da possibilidade de atendimento das demandas em *backlog*. Esta formulação considera as demandas nos arcos da rede. Mais recentemente, Cruz et al. [2022] propuseram uma formulação de programação inteira alternativa que considera as demandas nos nós da rede e é mais eficiente para cenários com baixa densidade de demandas. Nos trabalhos de [Cruz et al., 2020, 2022], foram utilizados algoritmos baseados em *branch-and-price* para resolver as formulações do VAP com demandas nos arcos e nos nós, respectivamente, alcançando soluções ótimas com tempos computacionais viáveis em instâncias de grande porte.

Embora os modelos determinísticos apresentem bons resultados em contextos controlados, eles assumem total conhecimento dos parâmetros do problema, o que raramente se verifica em aplicações reais. Para lidar com a incerteza inerente a muitos sistemas logísticos, diferentes abordagens vêm sendo desenvolvidas. A otimização robusta surgiu como um paradigma voltado à modelagem da incerteza a partir de uma perspectiva de análise de pior caso. A proposta pioneira de Soyster [1973] deu os primeiros passos nesse sentido, ao formular modelos de programação linear em que os vetores de parâmetros não são plenamente conhecidos no momento da decisão. Para garantir a viabilidade das soluções em todos os cenários admissíveis, o autor adotou conjuntos de incerteza do tipo caixa, o que, embora eficaz, tende a produzir soluções excessivamente conservadoras.

Posteriormente, Ben-Tal e Nemirovski [2000] e Bertsimas e Sim [2004] introduziram conjuntos de incerteza mais flexíveis que permitem calibrar o nível de proteção frente a desvios nos parâmetros, oferecendo um melhor equilíbrio entre robustez e desempenho. Uma técnica amplamente adotada na formulação de modelos de otimização robusta é a dualização das restrições com parâmetros incertos [Bertsimas e Sim, 2003, 2004]. No entanto, essa abordagem pressupõe que a incerteza dos parâmetros esteja confinada a uma única restrição, o que dificulta sua aplicação direta ao VAP com demanda por arco. Reformular o modelo para satisfazer essa condição pode acarretar um aumento significativo na complexidade computacional.

Como alternativa, Munari et al. [2019] propuseram uma técnica que envolve a linearização de equações recursivas derivadas da programação dinâmica e sua introdução no modelo da variante determinística. Essa abordagem tem sido aplicada com êxito em diferentes contextos logísticos [Munari et al., 2019; Yu et al., 2022; Campos et al., 2024; Bauerhenne et al., 2024], ampliando o leque de ferramentas disponíveis para a construção de modelos de otimização robusta em ambientes incertos.

Neste artigo, contribui-se com o desenvolvimento de modelos de otimização robusta para o VAP com incertezas na demanda, considerando duas variantes: com e sem possibilidade de *backlog*. Na variante com *backlog* (VAP-BD), utiliza-se a técnica de dualização para construção da con-

traparte robusta; já na variante sem *backlog*, aplica-se o método baseado em programação dinâmica recursiva. Até onde se tem conhecimento, não foram encontrados na literatura trabalhos que tratem essas variantes específicas do VAP sob a ótica da otimização robusta.

A estrutura deste artigo está organizada da seguinte forma: na Seção 2 são apresentados os conceitos e premissas do VAP, bem como a notação utilizada. Em seguida, na Seção 3, são expostos os modelos de otimização robusta desenvolvidos. Na Seção 4, apresentam-se e discutem-se alguns resultados computacionais do modelo sem backlog. Por fim, a Seção 5 traz as conclusões e indica os próximos passos.

2. O problema de alocação de veículos

Seja N o conjunto de terminais, T o conjunto de períodos de tempo no horizonte de planejamento e V o conjunto de tipos de veículos disponíveis. A frota é considerada heterogênea, uma vez que pode incluir tanto veículos pertencentes à empresa quanto aqueles operados por prestadores de serviço autônomos ou terceiros. Na prática, os veículos diferem em termos de custos de movimentação vazia, receita obtida com o atendimento da demanda, disponibilidade em um terminal durante determinado período e possibilidade de deslocamento entre pares de terminais.

Entretanto, considerando um regime de carga fechada (*full-truckload*), assume-se que todos os veículos possuem a mesma capacidade de carga. Isso se justifica pelo fato de a demanda consolidada entre dois terminais ser expressa em unidades padronizadas, cada uma suficiente para preencher completamente um veículo. Além disso, admite-se que os tempos de viagem entre quaisquer dois terminais são independentes do tipo de veículo utilizado.

Os parâmetros do modelo de arco-demanda do VAP-BD são definidos como segue:

- p_{ij}^v : lucro (receita líquida) obtido ao atender a rota de i para j com um veículo do tipo v , $\forall i, j \in N, v \in V$, com $p_{ii}^v = 0$;
- c_{ij}^v : custo de movimentação de um veículo vazio do tipo v de i para j , $\forall i, j \in N, v \in V$, sendo c_{ii}^v o custo de permanência no terminal i ;
- d_{ij}^t : demanda de transporte (em número de veículos carregados) de i para j com início no período t , $\forall i, j \in N, t \in T$;
- τ_{ij} : tempo de viagem entre os terminais i e j , $\forall i, j \in N$;
- m_i^{vt} : número de veículos do tipo v que se tornam disponíveis no terminal i no período t , $\forall i \in N, v \in V, t \in T$; sendo que $\sum_{i \in N} \sum_{t \in T} m_i^{vt}$ representa o total de veículos do tipo v ;
- A_{ij}^v : parâmetro binário que vale 1 se é permitido deslocar um veículo do tipo v de i para j , e 0 caso contrário, $\forall i, j \in N, v \in V$.

O objetivo do problema é maximizar o lucro líquido da operação, considerando as receitas provenientes do atendimento às demandas entre os terminais e os custos associados à movimentação da frota, inclusive viagens vazias, respeitando-se as restrições de disponibilidade e deslocamento dos veículos.

Para aumentar a flexibilidade na operação, admite-se a possibilidade de demandas em *backlog*, isto é, aquelas que podem ser total ou parcialmente atendidas em períodos posteriores ao de sua origem. Nessa variante, introduz-se uma penalização pelo não atendimento imediato da demanda, além de considerar limitações operacionais relativas à capacidade de descarregamento nos terminais. Esses aspectos são capturados pelos seguintes parâmetros adicionais [Vasco e Morabito, 2015]:

- h_{ij}^t : penalização unitária pelo não atendimento da demanda entre os terminais i e j no período t , $\forall i, j \in N, t \in T$;
- K_j^t : capacidade máxima de descarregamento simultâneo no terminal j no período t , $\forall j \in N, t \in T$.

Em ambas as variantes do modelo (com e sem *backlog*), nem todas as demandas precisam ser obrigatoriamente atendidas, o que reflete a realidade de diversas operações de transporte. Empresas podem optar por priorizar rotas mais lucrativas ou que estejam alinhadas a diretrizes estratégicas específicas.

3. Modelos para o VAP robusto

Esta seção apresenta dois modelos de otimização robusta para o VAP com incertezas na demanda, contemplando as versões com e sem *backlog*. O modelo com *backlog* (RVAP-BD) emprega a técnica de dualização, enquanto o modelo sem *backlog* (RVAP) adota o método de recursão. Embora ambos tratem a incerteza da demanda, cada abordagem explora diferentes mecanismos de modelagem robusta.

Em ambas as versões robustas — RVAP e RVAP-BD — assume-se que as demandas de transporte são variáveis aleatórias independentes com suporte em intervalos simétricos e limitados. Mais precisamente, denota-se $\tilde{d}_{ij}^t$ como uma variável aleatória com valores possíveis no intervalo $[d_{ij}^t - \hat{d}_{ij}^t, d_{ij}^t + \hat{d}_{ij}^t]$, em que $\hat{d}_{ij}^t > 0$ representa o desvio em relação ao valor nominal d_{ij}^t . Uma prática comum na literatura de otimização robusta consiste em definir uma variável aleatória normalizada, dada por $\xi_{ij}^t = \frac{\tilde{d}_{ij}^t - d_{ij}^t}{\hat{d}_{ij}^t}$, cujos valores pertencem ao intervalo $[-1, 1]$.

Dado um orçamento de incerteza Γ_{ij}^t para cada par de terminais (i, j) e período t , o conjunto de cenários admissíveis de demanda é modelado por um conjunto de incerteza com restrição de cardinalidade, definido como:

$$U^d = \left\{ \tilde{d} \in \mathbb{R}^{|N \times N \times T|} \mid \tilde{d}_{ij}^t = d_{ij}^t + \hat{d}_{ij}^t \xi_{ij}^t, \sum_{l=1}^t |\xi_{ij}^l| \leq \Gamma_{ij}^t, \forall i, j \in N, \forall t \in T \right\}, \quad (1)$$

com a condição $\Gamma_{ij}^1 \leq \Gamma_{ij}^2 \leq \dots \leq \Gamma_{ij}^t$, refletindo a suposição de que a incerteza tende a aumentar à medida que a decisão está mais distante no horizonte de planejamento. Essa definição é inspirada nos trabalhos de [Bertsimas e Thiele, 2006] e [Alem e Morabito, 2013], que propuseram uma estrutura temporalmente evolutiva para orçamentos de incerteza em problemas de dimensionamento de lotes. Cabe destacar que, quando $\Gamma_{ij}^t = 0$, não se considera incerteza para $\tilde{d}_{ij}^t$. Por outro lado, valores mais elevados de Γ_{ij}^t correspondem a soluções mais conservadoras, sendo o orçamento ajustado conforme o nível de aversão ao risco ou a tolerância a violações de restrições por parte do tomador de decisão.

3.1. O RVAP-BD

Inicialmente, apresenta-se o modelo que define a contraparte determinística do VAP-BD. A seguir, o problema é formulado como um modelo de Programação Linear Inteira (ILP), utilizando as seguintes variáveis de decisão:

- w_{ij}^{st} : variável que representa a proporção da demanda do terminal i para o terminal j do período s que será atendida, iniciando no período t , $\forall i, j \in N, t, s \in T$.
- x_{ij}^{vt} : variável que representa o número de veículos carregados do tipo v utilizados para atender à demanda $\sum_{s \in T: s \leq t} d_{ij}^s w_{ij}^{st}$, $\forall i, j \in N, v \in V, t \in T$.

- y_{ij}^{vt} : variável que representa o número de veículos vazios do tipo v movimentados entre i e j no período t , $\forall i, j \in N, v \in V, t \in T$. Seja y_{ii}^{vt} a quantidade de veículos vazios parados no terminal i do período t até o período $t+1$.

A variável w_{ij}^{st} define explicitamente a proporção da demanda gerada no período s que será atendida no período t . Quando $t = s$, ou seja, w_{ij}^{ss} , a variável representa a parcela da demanda atendida imediatamente no instante de seu lançamento. Já para $t > s$, w_{ij}^{st} quantifica a fração da demanda que permanece em *backlog*, sendo postergada para atendimento futuro.

O modelo é definido por:

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ij}^{vt} - c_{ij}^v y_{ij}^{vt}) - \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} \sum_{t \in T} \sum_{\substack{s \in T \\ s < t}} h_{ij}^t d_{ij}^s w_{ij}^{st} \quad (2a)$$

s.a.:

$$\sum_{j \in N} (x_{ij}^{vt} + y_{ij}^{vt}) - \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq i \\ t' > \tau_{ki} \\ t' = t - \tau_{ki}}} (x_{ki}^{vt'} + y_{ki}^{vt'}) - y_{ii}^{v(t-1)} = m_i^{vt}, \quad i \in N, t \in T, v \in V; \quad (2b)$$

$$\sum_{\substack{i \in N \\ t > \tau_{ij} \\ t' = t - \tau_{ij}}} \sum_{v \in V} x_{ij}^{vt'} \leq K_j, \quad j \in N, t \in T; \quad (2c)$$

$$\sum_{\substack{s \in T \\ s \leq t}} d_{ij}^s w_{ij}^{st} \geq \sum_{v \in V} x_{ij}^{vt}, \quad i, j \in N, t \in T : i \neq j; \quad (2d)$$

$$\sum_{\substack{t \in T \\ t \geq s}} w_{ij}^{st} \leq 1, \quad i, j \in N, s \in T : i \neq j; \quad (2e)$$

$$x_{ij}^{vt} = y_{ij}^{vt} = 0, \quad i, j \in N, t \in T, v \in V : A_{ij}^v = 0; \quad (2f)$$

$$x_{ii}^{vt} = 0, \quad i \in N, t \in T, v \in V; \quad (2g)$$

$$x_{ij}^{vt}, y_{ij}^{vt} \in \mathbb{Z}_+, \quad i, j \in N, t \in T, v \in V; \quad (2h)$$

$$w_{ij}^{st} \geq 0, \quad i, j \in N, t, s \in T : i \neq j, t \geq s. \quad (2i)$$

A função objetivo (2a) visa maximizar a receita proveniente do transporte de cargas, subtraindo os custos com o reposicionamento de veículos vazios e as penalizações pelo não atendimento das demandas no período solicitado. As restrições (2b) asseguram a conservação do fluxo no início de cada período. O conjunto de restrições (2c) impõe um limite ao número de veículos cheios que podem ser simultaneamente descarregados no terminal j , no período t . As restrições (2d) contabilizam o volume de demanda entre os terminais i e j atendido no período t , incluindo a demanda reservada para *backlog* do período s . As restrições (2e) garantem que no máximo 100% da demanda entre os terminais i e j do período s seja atendida entre os períodos s e $|T|$. As restrições (2f) asseguram que veículos de determinado tipo não realizem trajetos proibidos, carregados ou vazios. Por fim, os conjuntos (2g)–(2i) definem o domínio das variáveis de decisão. Note que (2g) é um artifício de modelagem utilizado para assegurar a validade do modelo quando houver veículos vazios estacionados em um terminal i , permitindo que o custo seja corretamente computado como $c_{ii}^v y_{ii}^{vt}$ em (2a). A definição do domínio da variável w assegura que a demanda em *backlog* do terminal j , no período t , só possa ser atendida após sua geração ($s > t$).

Dado que os parâmetros de demanda aparecem isoladamente em restrições lineares (como em (2d)) e que o modelo preserva a linearidade e a estrutura aditiva nas incertezas, a formulação determinística apresentada é adequada para a aplicação do método de dualização proposto por Bertsimas e Sim [2004]; Bertsimas e Thiele [2006]. Esse método permite derivar, de forma sistemática, a contraparte robusta do modelo, garantindo a viabilidade das soluções para todas as possíveis realizações das demandas dentro de um conjunto de incerteza previamente definido. O detalhamento do processo de dualização será omitido neste trabalho, recomendando-se ao leitor a consulta ao artigo original para informações técnicas mais aprofundadas.

A contraparte robusta do Modelo (2), considerando incertezas na demanda, é definida pelo Modelo (3).

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \sum_{v \in V} (p_{ij}^v x_{ij}^{vt} - c_{ij}^v y_{ij}^{vt}) - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{s \in T} \sum_{\substack{t \in T \\ t > s}} h_{ij}^t d_{ij}^s w_{ij}^{st} - \Gamma^0 \lambda^0 - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{\substack{s \in T \\ j \neq i}} \mu_{ij}^{s0} \quad (3a)$$

s.a.: (2b), (2c), (2e), (2f), (2g), (2h), (2i);

$$\sum_{\substack{s \in T \\ s \leq t}} d_{ij}^s w_{ij}^{st} - \Gamma_{ij}^t \lambda_{ij}^t - \sum_{\substack{s \in T \\ s \leq t}} \mu_{ij}^s \geq \sum_{v \in V} x_{ij}^{vt}, \quad i, j \in N, t \in T : i \neq j; \quad (3b)$$

$$\lambda^0 + \mu_{ij}^{s0} \geq \hat{d}_{ij}^s \sum_{\substack{t \in T \\ t > s}} h_{ij}^t w_{ij}^{st}, \quad i, j \in N, s \in T : i \neq j; \quad (3c)$$

$$\lambda_{ij}^t + \mu_{ij}^s \geq \hat{d}_{ij}^s w_{ij}^{st}, \quad i, j \in N, t, s \in T : i \neq j, t \geq s; \quad (3d)$$

$$\mu_{ij}^{s0} \geq 0, \mu_{ij}^s \geq 0, \quad i, j \in N, s \in T : i \neq j; \quad (3e)$$

$$\lambda_{ij}^t \geq 0, \quad i, j \in N, t \in T : i \neq j; \quad (3f)$$

$$\lambda^0 \geq 0. \quad (3g)$$

Na formulação (3), a função objetivo (3a) e as restrições (3b) correspondem às versões robustas de (2a) e (2d), respectivamente. As restrições (3c)–(3g) decorrem da aplicação do teorema da dualidade forte, conforme discutido em [Bertsimas e Sim, 2004]. Note que as variáveis Γ^0 , λ^0 e μ_{ij}^{s0} resultam da dualização do termo associado ao parâmetro incerto presente na função objetivo, enquanto Γ_{ij}^t , λ_{ij}^t e μ_{ij}^s são decorrentes da dualização do termo relacionado aos parâmetros incertos nas restrições (2d).

3.2. RVAP sem backlog

No VAP sem *backlog*, a demanda é atendida integralmente no instante de lançamento ou não é atendida, sem possibilidade de postergar para períodos subsequentes. Embora os modelos anteriores para o VAP com backlog possam ser facilmente adaptados para o caso sem *backlog*, tal adaptação não atenderia aos requisitos necessários para a aplicação do método de dualização, dado que teríamos restrições com apenas um parâmetro incerto, diferentemente das restrições (2d). Assim, um novo modelo para o RVAP é proposto, formulado utilizando o método de recursão, que busca garantir a viabilidade da solução frente às incertezas, tratando as flutuações de demanda dentro de limites predefinidos. Novamente, não será apresentado aqui o processo de derivação do modelo, e para isso o leitor é encorajado a ler [Munari et al., 2019]. Entretanto, serão apresentados os conceitos principais para sua compreensão.

Com base nas observações mencionadas anteriormente, introduzimos uma nova formulação para o RVAP. Essa formulação se apoia em um tipo diferente de variável, definida

da seguinte forma: seja X_{ij}^{vt} uma variável inteira não negativa que representa o número total de veículos do tipo v , considerando tanto os veículos carregados quanto os vazios, que se deslocam do terminal i para o terminal j com partida no período t . Quando $j = i$ (ou seja, X_{ii}^{vt}), essa variável representa o número de veículos vazios do tipo v que permanecem no terminal i do período t até o período $t + 1$.

Considerando as variáveis utilizadas no modelo de arco-demanda do VAP-BD, temos que $X_{ij}^{vt} = x_{ij}^{vt} + y_{ij}^{vt}$ para $i \neq j$, e $X_{ii}^{vt} = y_{ii}^{vt}$. Essa abordagem permite que as rotas dos veículos sejam definidas de forma independente da realização da demanda, possibilitando a construção de rotas que sejam válidas para qualquer cenário de demanda.

Para simplificar a modelagem, define-se $P_{ij}^t = \sum_{v \in V} p_{ij}^v X_{ij}^{vt}$ como o lucro obtido caso todos os veículos se desloquem carregados de i para j , englobando, portanto, tanto veículos carregados quanto vazios. Além disso, define-se o custo com base apenas no número de veículos vazios (de todos os tipos) deslocando-se de i para j no período t , multiplicado pela soma dos respectivos custos e lucros ($c_{ij}^v + p_{ij}^v$), ou seja, $C_{ij}^t = \sum_{v \in V} (c_{ij}^v + p_{ij}^v) y_{ij}^{vt}$. O lucro p_{ij}^v é incluído nesse cálculo para que ele possa ser subtraído de P_{ij}^t para cada veículo vazio, uma vez que P_{ij}^t considera todos os veículos, independentemente de estarem carregados. Observa-se que, embora P_{ii}^t seja sempre nulo (devido a p_{iiv} ser igual a zero), C_{ii}^t pode ser positivo caso haja um custo c_{ii}^v associado à permanência de um veículo no nó i do período t ao período $t + 1$.

Além disso, para se obter o modelo de otimização robusta, é necessário definir equações recursivas para calcular os valores das variáveis sob as piores realizações possíveis dos parâmetros incertos. Para isso, adiciona-se um índice γ à variável C_{ij}^t , originando a nova variável $C_{ij}^{t\gamma}$, que representa o custo acumulado até o período t para os veículos indo do terminal i ao terminal j , assumindo que até $\gamma \leq \Gamma_{ij}^t$ demandas de veículos de i para j atinjam seu valor de pior caso até t .

Para representar corretamente o número de veículos vazios em um cenário de demanda adverso, a variável inteira y_{ij}^{vt} não é suficiente, pois seu valor é calculado com base nos valores nominais de demanda. Assim, introduz-se uma nova variável inteira $\hat{y}_{ij}^{vt}$, que indica o número de veículos do tipo $v \in V$ que se deslocam vazios do terminal $i \in N$ para o terminal $j \in N$, com partida no período $t \in T$, devido à demanda ter atingido seu pior cenário.

Em posse dessas definições, o modelo RVAP é dado por:

$$\max \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} P_{ij}^t - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} C_{ij}^{t|\Gamma_{ij}^t|} \quad (4a)$$

s.a.:

$$\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} X_{ij}^{vt} + X_{ii}^{vt} - \sum_{\substack{k \in N \\ k \neq i \\ t > \tau_{ki}}} X_{ki}^{v(t-\tau_{ki})} - X_{ii}^{v(t-1)} = m_i^{vt}, \quad i \in N, t \in T, v \in V; \quad (4b)$$

$$\sum_{v \in V} y_{ij}^{vt} \geq \sum_{v \in V} X_{ij}^{vt} - d_{ij}^t, \quad i, j \in N, t \in T : i \neq j; \quad (4c)$$

$$y_{ij}^{vt} \leq X_{ij}^{vt}, \quad i, j \in N, t \in T, v \in V; \quad (4d)$$

$$X_{ij}^{vt} = 0, \quad i, j \in N, t \in T, v \in V : A_{ij}^v = 0; \quad (4e)$$

$$P_{ij}^t \leq \sum_{v \in V} p_{ij}^v X_{ij}^{vt}, \quad i, j \in N, t \in T : i \neq j; \quad (4f)$$

$$\sum_{v \in V} \hat{y}_{ij}^{vt} \geq \sum_{v \in V} X_{ij}^{vt} - d_{ij}^t + \hat{d}_{ij}^t, \quad i, j \in N, t \in T : i \neq j; \quad (4g)$$

$$C_{ij}^{t\gamma} \geq C_{ij}^{(t-1)\gamma} + \sum_{v \in V} (c_{ij}^v + p_{ij}^v) y_{ij}^{vt} \quad i, j \in N, t \in T, \quad (4h)$$

$$\gamma \in \{0, \dots, \Gamma_{ij}^t\} : i \neq j;$$

$$C_{ij}^{t\gamma} \geq C_{ij}^{(t-1)(\gamma-1)} + \sum_{v \in V} (c_{ij}^v + p_{ij}^v) \hat{y}_{ij}^{vt}, \quad i, j \in N, t \in T, \quad (4i)$$

$$\gamma \in \{1, \dots, \Gamma_{ij}^t\} : i \neq j;$$

$$\hat{y}_{ij}^{vt} \leq X_{ij}^{vt} + M(C_{ij}^{t\gamma} - C_{ij}^{(t-1)(\gamma-1)}) - \sum_{v' \in V} (c_{ij}^{v'} + p_{ij}^{v'}) \hat{y}_{ij}^{v't} \quad i, j \in N, t \in T, v \in V \quad (4j)$$

$$\gamma \in \{1, \dots, \Gamma_{ij}^t\} : i \neq j;$$

$$y_{ij}^{vt}, \hat{y}_{ij}^{vt}, X_{ij}^{vt} \in \mathbb{Z}_+, \quad i, j \in N, t \in T, v \in V; \quad (4k)$$

$$P_{ij}^t \geq 0, \quad i, j \in N, t \in T : i \neq j; \quad (4l)$$

$$C_{ij}^{t\gamma} \geq 0, \quad i, j \in N, t \in T, \gamma \in \{0, \dots, \Gamma_{ij}^t\} : i \neq j. \quad (4m)$$

A função objetivo (4a) busca maximizar o lucro total. Assumindo que $C_{ij}^{0\gamma} = 0$, essa função adota a variável que representa o custo acumulado de i para j até o período t , sendo necessário, portanto, considerar apenas o custo acumulado no último período $|T|$, conforme computado pelas restrições (4h) e (4i).

As restrições (4b) garantem a conservação do fluxo de veículos no sistema. As restrições (4c) asseguram que, caso o número de veículos que partem do terminal i para o terminal j no período t exceda a demanda correspondente, o excedente seja contabilizado como veículos vazios. As restrições (4d) relacionam as variáveis de decisão y_{ij}^{vt} e X_{ij}^{vt} , garantindo que o número de veículos vazios do tipo v viajando de i para j no período t não exceda o número total de veículos do mesmo tipo realizando essa operação. As restrições (4e) asseguram que veículos do tipo v não realizem viagens entre i e j quando essas não forem permitidas.

As restrições (4f) determinam o lucro máximo obtido com os veículos (carregados ou vazios) viajando de i para j no período t , com base no lucro unitário por tipo de veículo. Já as restrições (4h) e (4i) garantem que os custos dos veículos vazios sejam incorporados em $C_{ij}^{t\gamma}$ e que o lucro considerado em P_{ij}^t seja devidamente descontado — observando-se que o custo aparece com sinal negativo na função objetivo.

As restrições do tipo (4g)–(4j) são formuladas para lidar com a incerteza da demanda, conforme proposto por Munari et al. [2019]. As restrições (4g) modelam uma exceção às restrições (4c), permitindo mais veículos vazios entre i e j no período t quando a demanda atinge seu pior caso no arco (i, j, t) . As restrições (4h) e (4i) correspondem a versões linearizadas de equações recursivas para o cálculo de custos: a primeira considera a demanda no valor nominal, enquanto a segunda considera a realização no pior caso. Note que, quando $\Gamma_{ij}^t = 0$, as restrições (4i) perdem efeito, e o modelo se reduz ao caso determinístico.

As restrições (4j) representam uma exceção a (4d), limitando o número de veículos vazios ao total de veículos utilizados, sendo ativadas apenas quando a demanda atinge seu valor de pior caso. Por fim, as restrições (4k), (4l) e (4m) definem o domínio das variáveis de decisão.

4. Experimentos computacionais

Nesta seção, são apresentados os resultados dos experimentos computacionais realizados com a abordagem proposta. Um total de 51 instâncias realistas foram coletadas de Vasco e Morabito [2016] e Cruz et al. [2020], assegurando a relevância prática do estudo. Cada instância é identificada no formato *terminais-períodos-veículos-solicitações*, oferecendo uma estrutura de referência padronizada. A formulação foi implementada em Python 3.10.0, utilizando a biblioteca de otimização Pyomo 6.8.2, e resolvida com o IBM CPLEX Optimization Studio, versão 22.1.1.0. Todos os experimentos foram executados em um computador com processador Intel Core i7-7700HQ

2.80 GHz e 16 GB de memória RAM no sistema operacional Windows 10, com tempo máximo de execução de uma hora por instância.

Com o objetivo de analisar o desempenho do modelo robusto proposto, foram conduzidos testes apenas para o modelo RVAP. O modelo alternativo RVAP-BD ainda está em processo de teste e validação, razão pela qual seus resultados não foram incluídos neste trabalho. A avaliação de seu desempenho será abordada em publicações futuras relacionadas a esta pesquisa.

Antes de apresentar os resultados, é importante esclarecer como foram configurados os diferentes níveis de incerteza. Os orçamentos de incerteza, representados pelo parâmetro Γ , variam conforme o grau de robustez imposto ao modelo. Quando $\Gamma = 0$, o modelo opera de maneira determinística, desconsiderando variações na demanda. Para $\Gamma = 25$, 25% dos elementos do vetor Γ^d são definidos como 1, e os demais como 0. Essa definição é feita de forma regressiva, iniciando no último período do horizonte de planejamento e retrocedendo até completar a proporção estabelecida. O mesmo procedimento é adotado para $\Gamma = 50$ e $\Gamma = 100$. Para o caso em que $\Gamma = 100$, todos os valores de Γ_{ij}^t são definidos como 1, o que indica que, para cada tripla (i, j, t) , a demanda correspondente atinge seu pior caso uma vez ao longo do horizonte de planejamento, aqui não foram definidos Γ_{ijt} com valores fracionários, portanto se a porcentagem de Γ escolhida acarreta na decisão de valores para um número de arcos fracionário, foi adotado o arredondamento para o inteiro mais próximo.

4.1. Apresentação dos resultados computacionais

A Tabela 1 apresenta os resultados detalhados obtidos para todas as instâncias testadas, bem como seus valores médios, considerando diferentes configurações de Γ . A coluna **FO** exibe o valor da função objetivo obtido para cada instância; a coluna **PoR** mostra o *preço da robustez*, conforme definido em [Bertsimas e Sim, 2004], métrica que representa o percentual de redução no valor da função objetivo (lucro) decorrente da adoção do nível de robustez considerado; por fim, a coluna **Tempo** informa o tempo de processamento, em segundos, necessário para resolver cada instância. A análise desses resultados permite avaliar os efeitos da robustez sobre o desempenho do modelo, tanto em termos de qualidade da solução quanto de custo computacional.

Na Tabela 1, as médias foram calculadas com base nos resultados das 51 instâncias analisadas. Observa-se que, à medida que Γ aumenta, há uma redução nos lucros, o que seria esperado. Essa tendência reflete a necessidade de acomodar possíveis variações na realização da demanda, o que compromete a solução ótima nominal em favor de uma solução mais robusta. Por exemplo, para $\Gamma = 25$, os lucros diminuem, em média, 4,04% em relação ao resultado determinístico; para $\Gamma = 50$ e $\Gamma = 100$, as reduções médias são de 5,66% e 10,05%, respectivamente. Além disso, o tempo de processamento aumenta significativamente quando $\Gamma > 0$, pois o modelo passa a incorporar restrições robustas — retornando ao modelo determinístico quando $\Gamma = 0$, o que reduz substancialmente a carga computacional. Nota-se ainda que, com o aumento de Γ , o tempo de processamento tende a se estabilizar, indicando que variações adicionais em Γ não impactam de forma relevante a tratabilidade computacional do modelo. Considerando o porte típico das instâncias, com cerca de 20 veículos e 35 requisições, o modelo se mostra computacionalmente viável. Uma análise adicional associada ao risco dos lucros esperados com estas soluções robustas (geradas com o modelo RVAP) não serem obtidos devido às incertezas dos parâmetros, ainda será realizada neste estudo e disponibilizada em publicações futuras. Para isso, pretende-se utilizar a simulação de Monte Carlo.

5. Conclusão

Este trabalho abordou o Problema de Alocação de Veículos (VAP), sem e com *backlog* (VAP-BD), sob incertezas na demanda, utilizando otimização robusta. Foram propostos dois mo-

Tabela 1: Resultados com $\Gamma \in \{0, 25, 50, 100\}$ para o RVAP

Instância	$\Gamma = 0$			$\Gamma = 25$			$\Gamma = 50$			$\Gamma = 100$		
	FO	PoR	Tempo	FO	PoR	Tempo	FO	PoR	Tempo	FO	PoR	Tempo
10-10-20-20	1937	0,00%	1,26	1864	3,77%	2,16	1704	12,03%	2,55	1581	18,38%	4,72
10-10-20-25	1857	0,00%	0,78	1718	7,49%	1,00	1718	7,49%	1,36	1659	10,66%	1,72
10-10-20-30	501	0,00%	0,70	447	10,78%	1,17	447	10,78%	1,26	410	18,16%	1,57
10-10-20-35	2464	0,00%	0,91	2347	4,75%	1,33	2095	14,98%	1,50	2022	17,94%	1,82
10-10-20-50	421	0,00%	1,19	413	1,90%	1,67	410	2,61%	2,15	400	4,99%	3,11
11-10-20-20	1584	0,00%	1,07	1487	6,12%	1,38	1487	6,12%	1,93	1397	11,81%	2,59
11-10-20-25	659	0,00%	1,05	613	6,98%	1,46	572	13,20%	1,76	548	16,84%	2,35
11-10-20-30	1596	0,00%	1,20	1549	2,94%	1,50	1549	2,94%	2,07	1444	9,52%	2,72
11-10-20-35	2238	0,00%	1,00	2178	2,68%	1,43	2071	7,46%	1,83	1936	13,49%	2,56
11-10-20-50	2701	0,00%	1,40	2612	3,30%	2,24	2612	3,30%	3,17	2496	7,59%	3,50
12-10-20-20	904	0,00%	1,57	835	7,63%	2,19	826	8,63%	2,53	798	11,73%	3,75
12-10-20-25	396	0,00%	1,65	383	3,28%	2,62	383	3,28%	3,22	371	6,31%	4,99
12-10-20-30	335	0,00%	1,74	333	0,60%	2,39	333	0,60%	2,95	326	2,69%	5,53
12-10-20-35	669	0,00%	1,33	641	4,19%	1,84	623	6,88%	2,36	623	6,88%	3,24
12-10-20-50	811	0,00%	1,10	790	2,59%	1,65	790	2,59%	2,05	787	2,96%	2,75
13-10-20-20	1259	0,00%	2,19	1119	11,12%	3,24	1119	11,12%	4,03	1090	13,42%	5,47
13-10-20-25	669	0,00%	1,84	656	1,94%	3,82	656	1,94%	4,16	620	7,32%	6,16
13-10-20-30	580	0,00%	1,60	579	0,17%	2,40	520	10,34%	2,97	520	10,34%	4,08
13-10-20-35	266	0,00%	1,30	266	0,00%	2,00	266	0,00%	2,89	240	9,77%	4,20
13-10-20-50	678	0,00%	1,55	654	3,54%	2,10	654	3,54%	2,69	646	4,72%	4,40
14-10-20-20	633	0,00%	2,04	559	11,69%	3,57	503	20,54%	4,81	435	31,28%	7,73
14-10-20-25	1292	0,00%	2,92	1276	1,24%	4,81	1276	1,24%	6,32	1232	4,64%	8,96
14-10-20-30	574	0,00%	1,66	559	2,61%	3,12	559	2,61%	3,69	517	9,93%	6,30
14-10-20-35	2057	0,00%	1,81	1997	2,92%	3,10	1980	3,74%	4,04	1980	3,74%	5,63
14-10-20-50	355	0,00%	1,92	349	1,69%	3,17	349	1,69%	4,50	341	3,94%	6,34
15-10-20-20	560	0,00%	2,12	518	7,50%	3,38	518	7,50%	5,82	489	12,68%	7,66
15-10-20-25	1202	0,00%	2,95	1202	0,00%	4,94	1157	3,74%	5,15	1129	6,07%	8,74
15-10-20-30	1451	0,00%	2,61	1386	4,48%	4,56	1374	5,31%	6,24	1250	13,85%	9,51
15-10-20-35	1679	0,00%	1,40	1564	6,85%	2,24	1564	6,85%	3,20	1534	8,64%	5,40
15-10-20-50	623	0,00%	3,28	599	3,85%	5,15	595	4,49%	6,23	563	9,63%	11
16-10-20-20	736	0,00%	3,53	736	0,00%	6,68	721	2,04%	7,66	698	5,16%	12,10
16-10-20-25	1479	0,00%	3,27	1346	8,99%	5,08	1299	12,17%	7,30	1288	12,91%	11,60
16-10-20-30	1788	0,00%	3,06	1742	2,57%	5,58	1739	2,74%	6,58	1677	6,21%	10,29
16-10-20-35	2037	0,00%	2,71	1937	4,91%	5,09	1937	4,91%	5,92	1924	5,55%	9,39
16-10-20-50	1562	0,00%	5,71	1560	0,13%	8,25	1560	0,13%	10,97	1486	4,87%	16,82
17-10-20-20	632	0,00%	3,25	627	0,79%	5,07	625	1,11%	7,44	524	17,09%	12,16
17-10-20-25	1611	0,00%	5,54	1611	0,00%	8,83	1611	0,00%	9,74	1585	1,61%	16,22
17-10-20-30	424	0,00%	2,69	404	4,72%	4,57	404	4,72%	6,20	404	4,72%	9,55
17-10-20-35	2347	0,00%	5,11	2272	3,20%	9,06	2175	7,33%	11,02	2125	9,46%	15,49
17-10-20-50	2202	0,00%	3,51	2074	5,81%	5,72	1963	10,85%	7,74	1963	10,85%	11,82
18-10-20-20	1143	0,00%	3,70	1049	8,22%	6,28	1049	8,22%	8,78	1049	8,22%	14,94
18-10-20-25	291	0,00%	5,67	291	0,00%	8,61	291	0,00%	14,19	267	8,25%	21,88
18-10-20-30	1835	0,00%	5,59	1737	5,34%	7,94	1737	5,34%	12,82	1629	11,23%	21,40
18-10-20-35	991	0,00%	4,38	986	0,50%	7,28	986	0,50%	9,60	915	7,67%	15,06
18-10-20-50	550	0,00%	5,96	543	1,27%	8,77	543	1,27%	11,08	509	7,45%	18,79
19-10-20-20	905	0,00%	3,78	867	4,20%	6,56	824	8,95%	9,41	741	18,12%	14,56
19-10-20-25	535	0,00%	6,27	498	6,92%	10,42	492	8,04%	14,42	487	8,97%	20,97
19-10-20-30	1333	0,00%	7,56	1291	3,15%	12,03	1237	7,20%	16,59	1053	21,01%	28,20
19-10-20-35	691	0,00%	7,18	688	0,43%	11,39	688	0,43%	15,07	647	6,37%	25,14
19-10-20-50	2591	0,00%	5,67	2586	0,19%	8,76	2586	0,19%	12,14	2377	8,26%	21,07
20-20-100-200	14471	0,00%	862	14144	2,26%	1922,52	13887	4,04%	2732,24	13772	4,83%	3128,69
20-20-130-200	31327	0,00%	787,38	30345	3,13%	1921,76	30168	3,70%	3576,81	23865	23,82%	3622,05
Média	–	0,00%	55,88	–	4,04%	145,12	–	5,66%	193,14	–	10,05%	204,74

delos formulados como problemas de programação linear inteira, um para cada caso: o RVAP e o RVAP-BD.

O modelo RVAP-BD foi desenvolvido a partir de uma formulação determinística alternativa para o VAP, à qual se aplicou o método de dualização proposto por [Bertsimas e Sim, 2004]. Por sua vez, o modelo RVAP incorpora a variabilidade da demanda por meio de restrições robustas construídas com base em equações recursivas linearizadas, que permitem calcular os custos acumulados em cenários de pior caso. Ambas as abordagens fazem uso do conceito de conjuntos e orçamentos de incerteza, o que possibilita controlar o nível de conservadorismo aplicado ao parâmetro incerto.

Os experimentos computacionais realizados com o modelo RVAP envolveram 51 instâncias derivadas de cenários realistas. Os resultados mostraram que, à medida que o parâmetro de robustez Γ aumenta, há uma redução no lucro obtido, reflexo do esforço necessário para garantir a viabilidade das soluções diante da incerteza. Essa perda é capturada pelo *preço da robustez*, uma métrica relevante para auxiliar tomadores de decisão na definição do nível adequado de conservadorismo. Além disso, observou-se uma estabilização no tempo de resolução à medida que Γ cresce, indicando que o modelo permanece computacionalmente tratável mesmo sob altos níveis de incerteza, considerando instâncias com cerca de 20 veículos e 35 pedidos.

Como próximos passos desta pesquisa, serão conduzidos experimentos computacionais com o modelo RVAP-BD, que ainda se encontra em fase de testes e validação. Ambos os modelos — RVAP e RVAP-BD — também serão submetidos a uma análise de risco por meio de simulação de Monte Carlo a fim de verificar se o lucro obtido pelas soluções robustas se mantém estável frente às possíveis realizações da demanda incerta. Pretende-se ainda desenvolver e comparar uma versão do modelo RVAP-BD construída a partir de uma abordagem recursiva, inspirada na estrutura do modelo RVAP apresentado neste trabalho.

Agradecimentos

Essa pesquisa foi financiada pelos Processos nº 2024/19664-0, 2022/16817-5, 2024/21921-1 da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)

Referências

- Alem, D. e Morabito, R. (2013). The integrated problem of production planning and cutting stock under uncertainties: application in small-scale furniture plants. *Gestão & Produção*, 20:111–133.
- Bauerhenne, C., Bard, J., e Kolisch, R. (2024). Robust routing and scheduling of home healthcare workers: A nested branch-and-price approach. Technical report, arXiv preprint arXiv:2407.06215.
- Ben-Tal, A. e Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, (88):411–424.
- Bertsimas, D. e Sim, M. (2003). Robust discrete optimization and network flows. *Mathematical Programming*, 98(1):49–71. ISSN 0025-5610.
- Bertsimas, D. e Sim, M. (2004). The price of robustness. *Operations Research*, 52(1):35–53.
- Bertsimas, D. e Thiele, A. (2006). A robust optimization approach to inventory theory. *Operations Research*, 54(1):150–168.
- Campos, R., Munari, P., e Coelho, L. C. (2024). New formulations for the robust vehicle routing problem with time windows under demand and travel time uncertainty. *OR Spectrum*. DOI: 10.1007/s00291-024-00781-z.

- Cheung, R. K. e Powell, W. B. (1996). An algorithm for multistage dynamic networks with random arc capacities, with an application to dynamic fleet management. *Operations Research*, 44(6): 951–963.
- Cruz, C. A., Costa, A. M., Munari, P., e Morabito, R. (2022). The vehicle allocation problem: Alternative formulation and branch-and-price method. *Computers & Operations Research*, 144: 105784.
- Cruz, C. A., Munari, P., e Morabito, R. (2020). A branch-and-price method for the vehicle allocation problem. *Computers & Industrial Engineering*, 149:106745.
- Frantzeskakis, L. F. e Powell, W. B. (1990). A successive linear approximation procedure for stochastic, dynamic vehicle allocation problems. *Transportation Science*, 24(1):40–57.
- Munari, P., Moreno, A., Vega, J. D. L., Alem, D., Gondzio, J., e Morabito, R. (2019). The robust vehicle routing problem with time windows: Compact formulation and branch-price-and-cut method. *Transportation Science*, 53(4):1043–1066.
- Powell, W. B. (1986). A stochastic model of the dynamic vehicle allocation problem. *Transportation Science*, 20(2):117–129.
- Powell, W. B. (1998). A stochastic formulation of the dynamic assignment problem, with an application to truckload motor carriers. *Transportation Science*, 32(2):90–109.
- Soyster, A. L. (1973). Technical note—convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations Research*, 21(5):1154–1157.
- Vasco, R. A. e Morabito, R. (2014). Otimização na alocação dinâmica de veículos no transporte rodoviário de cargas completas entre terminais. *Gestão & Produção*, 21(2):271–284. ISSN 0104-530X. URL <https://doi.org/10.1590/S0104-530X2014005000011>.
- Vasco, R. A. e Morabito, R. (2015). Dimensionamento e alocação dinâmica de veículos no transporte rodoviário de cargas completas entre terminais. *Production*, 26:430–444.
- Vasco, R. A. e Morabito, R. (2016). The dynamic vehicle allocation problem with application in trucking companies in brazil. *Computers & Operations Research*, 76:118–133.
- Yu, Q., Cheng, C., e Zhu, N. (2022). Robust team orienteering problem with decreasing profits. *INFORMS Journal on Computing*, 34(6)(6):3215–3233.