57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

Sobre a 4-atribuição de papéis para produto forte de grafos

Gustavo Morais Medeiros
Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Caixa Postal 131 – 74001-970 – Goiânia – GO – Brasil
medeiros@discente.ufg.br

Julliano Rosa Nascimento
Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Caixa Postal 131 – 74001-970 – Goiânia – GO – Brasil
jullianonascimento@ufg.br

RESUMO

Uma r-atribuição de papéis em um grafo G consiste em rotular os vértices com r papéis distintos de forma que vértices com o mesmo papel tenham o mesmo conjunto de papéis nos vértices adjacentes. O problema de atribuição de papéis possui aplicações em redes sociais, biológicas e tecnológicas. É conhecido que determinar se um grafo admite r-atribuição de papéis é NP-completo para $r \geq 2$. Neste artigo, investigamos o problema da 4-atribuição de papéis no produto forte de grafos $G \boxtimes H$. Provamos que o problema é NP-completo quando G e H são grafos não triviais. Por outro lado, mostramos que, quando G ou H são bipartidos, cografos, grafos *split*, ou cordais com 2-atribuição de papéis, o produto forte entre eles sempre admite uma 4-atribuição de papéis, o que torna o problema solucionável em tempo constante ou linear no caso dos cordais.

PALAVRAS CHAVE. Atribuição de papéis, Produto forte de grafos, Complexidade computacional.

TAG – Teoria dos Grafos e Algoritmos Relacionados; OA – Outras aplicações em PO

ABSTRACT

An r-role assignment in a graph G consists of labeling the vertices with r distinct roles such that vertices with the same role have the same set of roles in their adjacent vertices. The role assignment problem has applications in social, biological, and technological networks. It is known that determining whether a graph admits an r-role assignment is NP-complete for $r \geq 2$. In this paper, we investigate the problem of 4-role assignment in the strong product of graphs $G \boxtimes H$. We prove that the problem is NP-complete when G and H are nontrivial graphs. On the other hand, we show that when G and H are bipartite graphs, cographs, or split graphs, their strong product always admits a 4-role assignment, making the problem solvable in constant time, or linear time in the case of chordal graphs.

KEYWORDS. Role assignment, Strong product of graphs, Computational complexity.

TAG - Graph Theory and Related Algorithms; OA – Other Applications in OR

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

1. Introdução

Introduzido por Everett e Borgatti [1991] como uma variação da coloração de grafos, uma r-atribuição de papéis de G é uma atribuição de r papéis distintos para os vértices de G, de forma que se dois vértices possuem a mesma atribuição de papéis, então o conjunto de papéis dos seus vizinhos é igual. Dizemos que a atribuição de papéis é uma R-atribuição de papéis de G, quando R é um grafo e $r = |V(R)|$, no qual R é um grafo onde cada vértice representa um inteiro da r-atribuição de papéis. Assim, se G tem uma R-atribuição de papéis, então G possui uma r-atribuição de papéis. Comumente, chamamos os elementos de $V(R)$ de *papéis*.

Aleksandar e Fred [1999] apresentam aplicações de atribuição de papéis em grafos de interações e papéis desempenhados por indivíduos em redes sociais.

Temos que o problema de determinar uma r-atribuição é um problema não monótono, ou seja, pode ser que para determinado grafo exista uma 3-atribuição de papéis e não exista uma 2-atribuição de papéis, como é o caso do grafo ciclo com 5 vértices.

Sabemos que determinar se um grafo geral G possui uma r-atribuição de papéis é um problema NP-completo para qualquer $r \geq 2$ fixo [Roberts e Sheng, 2001; Fiala e Paulusma, 2005]. Além disso, para grafos cordais, foi provado que o problema é solucionável em tempo linear para $r = 2$, porém NP-completo para $r \geq 3$ [van 't Hof et al., 2010]. Em grafos bipartidos, o problema é NP-completo para $r \geq 3$, por outro lado, constante para $r = 2$ [Pandey, 2019]. Para grafos planares e grafos com grau máximo 3, o problema é NP-completo para $r \geq 2$ [Purcell e Rombach, 2015, 2021]. Em grafos *split*, o problema é trivial para $r = 2$, polinomial para $r = 3$ e NP-completo para $r \geq 4$ [Dourado, 2016].

Castonguay et al. [2022, 2023] provaram que para produto Cartesiano sempre existe uma 2-atribuição de papéis, e ainda assim o problema permanece NP-completo para qualquer $r \geq 3$ fixo. Recentemente, foi provado por Castonguay et al. [2025] que decidir se um prisma complementar possui uma 3-atribuição de papéis pode ser resolvido em tempo polinomial. Além disso, existem alguns resultados de atribuição de papéis para algumas operações em grafos, como o produto direto [Fiala e Paulusma, 2005], produto lexicográfico [Zhao et al., 2010], produto corona [Guajajara e Nascimento, 2024], grafo torus hexagonais [LI e HE, 2004] e grafo de Mycielski [Zhao et al., 2010].

Seguindo as definições de Hammack et al. [2011], o *produto forte* de dois grafos G e H, denotado por $G \boxtimes H$, é definido como um grafo com conjunto de vértices $V(G \boxtimes H) = \{(g, h) \mid g \in V(G) \text{ e } h \in V(H)\}$ e conjunto de arestas $E(G \boxtimes H) = \{(g_1, h_1)(g_2, h_2) \mid g_1 = g_2, h_1h_2 \in E(H) \text{ ou } g_1g_2 \in E(G), h_1 = h_2\} \cup \{(g_1, h_1)(g_2, h_2) \mid g_1g_2 \in E(G) \text{ e } h_1h_2 \in E(H)\}$. G e H são chamados de *fatores*.

Sabemos que qualquer grafo resultante de um produto forte possui uma 2-atribuição de papéis e para um dos fatores completo ou bipartido possui uma 3-atribuição de papéis [Medeiros e Nascimento, 2023, 2024]. Neste artigo focamos na 4-atribuição de papéis. Mostramos que decidir se uma entrada composta por um produto forte $G \boxtimes H$ possui 4-atribuição de papéis é NP-completo quando G e H são conexos não triviais. Além disso identificamos algumas classes sobre G e H nas quais o problema é solúvel em tempo constante, como bipartidos, cografos e grafos *split* e em tempo linear como no caso de grafos cordais com 2-atribuição de papéis.

2. Preliminares

Para conceitos básicos em grafos o leitor pode conferir em Diestel [2000]; Bondy e Murty [2008]. Denotamos uma aresta entre os vértices $u, v \in V(G)$ por $uv \in E(G)$. Se $uv \in E(G)$, dizemos que o vértice u é *adjacente* ao vértice v, ou que u é *vizinho* de v. Para a vizinhança de um vértice v, usamos a notação $N_G(v)$.

Um grafo é chamado *trivial* se possui um único vértice e *não trivial* caso contrário. Uma *conjunto independente* de um grafo G é um subconjunto de vértices que tomados dois a dois não

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

são adjacentes. Um conjunto independente I de um grafo G é *maximal* se todo vértice $v \in V(G) \setminus I$ tem um vizinho em I. Um grafo G é *bipartido*, se existe uma partição de $V(G) = A \cup B$, tal que A e B são conjuntos independentes; (A, B) é chamada *bipartição* de G. Um grafo é dito *cordal* se não contém ciclos induzidos com 4 ou mais vértices.

Para um inteiro positivo k, definimos $[k] = \{1, 2, \ldots k\}$.

Dado um grafo simples G e um grafo R, possivelmente com laços, uma *R-atribuição de papéis* de G é uma função sobrejetora $p : V(G) \to V(R)$ tal que $p(N_G(v)) = N_R(p(v))$ para todo $v \in V(G)$, onde $p(S)$ denota $\{p(v) \mid v \in S\}$ para qualquer conjunto de vértices S. Diz-se que um grafo G possui uma *r-atribuição de papéis* se ele admite uma R-atribuição de papéis para algum grafo R, chamado de *grafo de papéis*, com $|V(R)| = r$. Denotamos por $V(R) = [r]$ o conjunto de vértices de R, também chamados de *papéis*. Daqui em diante, todos os grafos (exceto por ventura o grafo de papéis) são simples. Uma propriedade útil sobre o grafo de papéis é derivada da conexidade do grafo G, como pode ser visto nos dois resultados seguintes.

Lema 1. *[Hell e Nesetril, 2004] Sejam G e H dois grafos. Se p é um homomorfismo de G para H, então a distância de $p(u)$ para $p(v)$ é no máximo a distância entre u e v, para quaisquer $u, v \in V(G)$.*

Corolário 1. *Se G é um grafo conexo, então o grafo de papéis de toda atribuição de papéis em G também é conexo.*

Concluímos a seção definindo o problema de decisão associado à r-atribuição de papéis.

r-Atribuição de Papéis
Instância: Um grafo simples G.
Pergunta: O grafo G admite uma r-atribuição de papéis?

3. Resultados

Nesta seção apresentamos os resultados para uma 4-atribuição de papéis. Primeiro provamos casos particulares da atribuição de papéis que possuem complexidade polinomial para alguns grafos produto forte. Posteriormente apresentamos uma redução provando que o problema de 4-Atribuição de Papéis é NP-completo.

Teorema 1. *[Medeiros e Nascimento, 2025] Sejam G e H grafos simples conexos e R e S grafos de papéis, possivelmente com laço. Se G possui uma R-atribuição de papéis e H possui uma S-atribuição de papéis, então $G \boxtimes H$ possui uma $(R \boxtimes S)$-atribuição de papéis.*

Corolário 2. *Sejam G e H grafos simples conexos. Se G possui r-atribuição de papéis e H possui s-atribuição de papéis, então $G \boxtimes H$ possui $(r \cdot s)$-atribuição de papéis.*

Demonstração. Pelo Teorema 1, sendo R e S, respectivamente, grafos de atribuição de papéis para G e H, $G \boxtimes H$ possui uma $R \boxtimes S$-atribuição de papéis. Sendo $|V(R)| = r$ e $|V(S)| = s$, temos por definição de produto forte que $|V(R \boxtimes S)| = |V(R) \times V(S)| = |V(R \boxtimes S)| = r \cdot s$. □

Notamos que a recíproca do Corolário 2 nem sempre é verdadeira. Como contraexemplo, temos que C_5 não admite uma 2-atribuição de papéis, porém $C_5 \boxtimes C_5$ possui uma 4-atribuição de papéis, como pode ser visto na Figura 1.

Algumas outras classes com resultados derivados do Corolário 2 são a dos bipartidos, *split* e cografos, que, quando conexos e não triviais, sempre possuem uma 2-atribuição de papéis, como demonstrado por Roberts e Sheng [2001], Dourado [2016] e Purcell e Rombach [2015], respectivamente. Isso implica no Corolário 3 a seguir.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

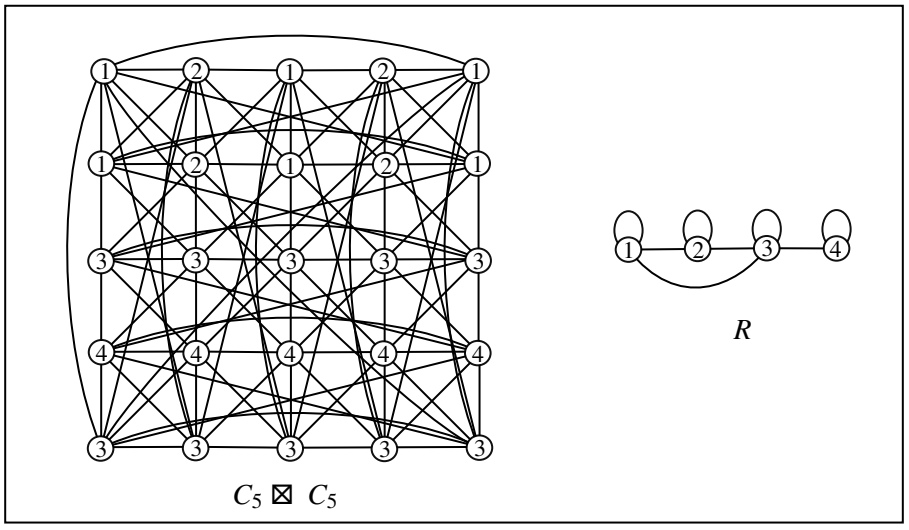


Figura 1: Grafo $C_5 \boxtimes C_5$ com uma 4-atribuição de papéis.

Corolário 3. *Sejam G e H grafos conexos. Se G e H são bipartidos, cografos ou grafos split, então $G \boxtimes H$ sempre possui uma* 4*-atribuição de papéis.*

Exploramos a seguir o comportamento da 4-atribuição de papéis no produto forte quando seus fatores são cordais. Observamos que pelo Teorema 1, se G possui uma R-atribuição de papéis e H possui uma S-atribuição de papéis, então $G \boxtimes H$ possui uma $(R \boxtimes S)$-atribuição de papéis. Como R e S podem ser determinados em tempo linear [van 't Hof et al., 2010], isso implica que uma 4-atribuição de papéis para $G \boxtimes H$, cujo grafo de papéis é $R \boxtimes S$, pode ser determinada em tempo linear quando G e H são cordais. Observamos que isso é diferente de dizer que retornar o grafo $G \boxtimes H$ com uma atribuição possui tempo linear; neste caso, pela definição de produto forte, temos que um grafo $G \boxtimes H$ terá $m \cdot n$ arestas, sendo $m = |E(G)|$ e $n = |E(G)|$, isso implica que se $m = n$, então $E(G \boxtimes H) = n^2$, ou seja, retornar o grafo produto forte $G \boxtimes H$ pode ser não linear.

Corolário 4. *Sejam G e H grafos cordais conexos. Se G e H possuem* 2*-atribuição de papéis, então, uma* 4*-atribuição de papéis para $G \boxtimes H$ pode ser determinada em tempo linear.*

A seguir, inspirados na demonstração de Castonguay et al. [2023], mostramos que o problema de 4-Atribuição de Papéis é NP-completo para o produto forte de dois grafos conexos e não triviais. Para isso, faremos uma redução do problema NP-completo 3-Coloração [Garey e Johnson, 2002], cuja definição segue abaixo:

3-Coloração
Instância: Um grafo $G = (V, E)$.
Pergunta: O grafo G admite um mapeamento $c : V(G) \to \{1, 2, 3\}$ tal que $c(u) \neq c(v)$, para todo $uv \in E(G)$?

A partir de um grafo G, instância para o problema de 3-Coloração, apresentamos a Construção 1 para obter um grafo H. Após, o utilizamos para obter a instância $H \boxtimes K_2$, de 4-Atribuição de Papéis para produto forte. Assumimos que G é conexo e que $|V(G)| \geq 3$.

O *grafo de Levi*, ou grafo de *incidência*, H de um grafo G é um grafo bipartido tal que $V(H) = V(G) \cup E(G)$ e $E(H) = \{ve \mid v \in V(G), e \in E(G) \text{ e } v \in e\}$.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

Construção 1: Dado um grafo G com $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, com $n \geq 3$ e $E(\mathcal{H}) = \{e_1, \ldots, e_m\}$. Definimos $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

- Construímos um grafo H, a partir do grafo de Levi $L(G)$.
- Para cada par de vértices $e_j \in V(H)$ adicionamos uma aresta. Para cada $e_j \in V(H)$ adicionamos um vértice $f_j \in V(H)$ e $e_j f_j \in E(H)$, formando o subgrafo Z_4 como podemos ver na Figura 2.
- Adicionamos o subgrafo F_4, exibido na Figura 2, e adicionamos $v_i d_2 \in E(H)$.

Isto completa a construção do grafo H. Um exemplo do Grafo H segue na Figura 2. Utilizaremos uma notação semelhante à usada em produtos Cartesianos por Castonguay et al. [2022]. Em um produto $G \boxtimes K_2$, temos que K_2 é um grafo completo de ordem 2, consideramos $V(K_2) = \{v_1, v_2\}$, denotamos por u o vértice (u, v_1) e por u' o vértice (u, v_2) para qualquer $u \in V(G)$. Dizemos que u' é o vértice *correspondente* de u, e G' é o grafo correspondente de G.

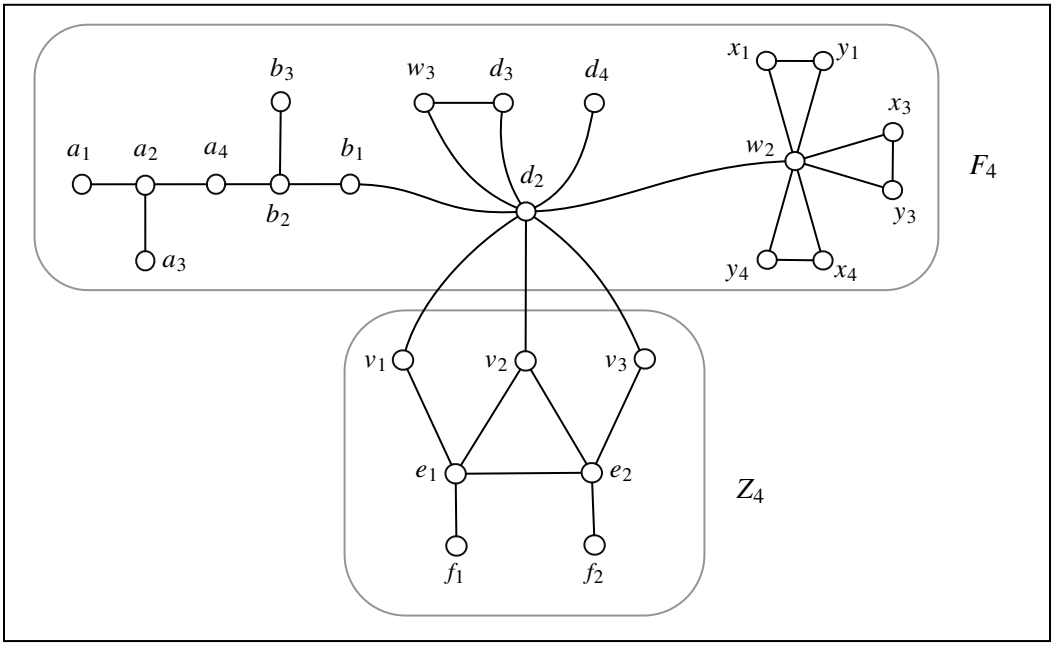


Figura 2: Grafo H, construído a partir do grafo G, com $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $E(G) = \{e_1, e_2\}$, sendo $e_1 = v_1v_2$ e $e_2 = v_2v_3$.

A demonstração estrutura-se da seguinte forma: primeiro, no Lema 2 mostramos que se G possui uma 3-coloração então $H \boxtimes K_2$ possui uma 4-atribuição de papéis; posteriormente, no Lema 4 mostramos que se $H \boxtimes K_2$ possui uma 4-atribuição de papéis, então G possui uma 3-coloração. Na prova, usaremos o grafo R_4, da figura 3, para uma 4-atribuição de papéis. Finalmente, no Teorema 2 concluímos o resultado de complexidade.

Lema 2. *Seja G um grafo e H um grafo obtido a partir da Construção 1. Se G tem uma* 3*-coloração então* $H \boxtimes K_2$ *possui uma* 4*-atribuição de papéis.*

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

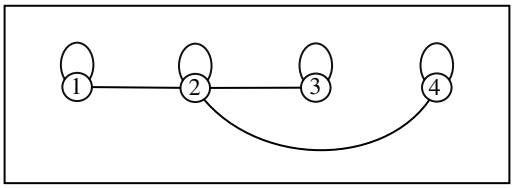


Figura 3: Grafo R_4.

Demonstração. Seja $c : V(G) \to \{1, 2, 3\}$ uma 3-coloração de G.

Para simplificar a definição da função de atribuição de papéis, sendo $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, introduzimos os seguintes subconjuntos de $V(H)$:

$A_1 = \{f_j \mid e_j = v_{i_1}v_{i_2} \in E(G), c(v_{i_1}) = 3 \text{ e } c(v_{i_2}) = 2\} \cup \{v_i \mid c(v_i) = 1\} \cup \{a_1, b_1, x_1, y_1, \};$
$A_2 = \{e_j \mid e_j \in V(H)\} \cup \{a_2, b_2, d_2, w_2\};$
$A_3 = \{f_j \mid e_j = v_{i_1}v_{i_2} \in E(G), c(v_{i_1}) = 1 \text{ e } c(v_{i_2}) = 2\} \cup \{v_i \mid c(v_i) = 3\} \cup \{a_3, b_3, d_3, w_3, x_3, y_3\};$
$A_4 = \{f_j \mid e_j = v_{i_1}v_{i_2} \in E(G), c(v_{i_1}) = 1 \text{ e } c(v_{i_2}) = 3\} \cup \{v_i \mid c(v_i) = 2\} \cup \{a_4, d_4, x_4, y_4\};$

Definimos a atribuição de papéis $p : V(H \boxtimes K_2) \to \{1, 2, 3, 4\}$ da seguinte forma: para cada $z \in V(H)$, $p(z) = p(z') = \ell$ se $z \in A_\ell$, com $\ell \in [4]$.

Mostramos que p é uma R_4-atribuição de papéis.

Observamos que a atribuição de $V(H)$ é a mesma que para $V(H')$. Logo, para $z \in V(H)$, dado que $zz' \in E(H \boxtimes K_2)$ e $p(z) = p(z')$, então $\ell \in N_R(\ell)$, para $\ell \in [4]$.

Fornecemos na Tabela 1, para cada vértice com papel 2 (Coluna 1) todos os vizinhos com papel 1 (Coluna 2), 3 (Coluna 3) e 4 (Coluna 4). Mostraremos para $z \in V(H)$, pois para $z' \in V(H')$ a tabela é similar, considerando que todos os vértices são correspondentes.

x $p(x) = 2$	$y \in N(x)$ $p(y) = 1$	$y \in N(x)$ $p(y) = 3$	$y \in N(x)$ $p(y) = 4$
e_j	$\{f_j \mid f_j \in A_1\} \cup \{v_i \in A_1\}$	$\{f_j \mid f_j \in A_3\} \cup \{v_i \in A_3\}$	$\{f_j \mid f_j \in A_4\} \cup \{v_i \in A_4\}$
a_2	a_1	a_3	a_4
b_2	b_1	b_3	a_4
d_2	$\{b_1\} \cup \{v_i \in A_1\}$	$\{d_3, w_3\} \cup \{v_i \in A_3\}$	$\{d_4\} \cup \{v_i \in A_4\}$
w_2	$\{x_1, y_1\}$	$\{x_3, y_3\}$	$\{x_4, y_4\}$

Tabela 1: Vizinhança de atribuição de papéis dos vértices $x \in V(H)$ para os papéis $1, 2, 3, 4$.

Desta forma, mostramos que todo $x \in V(H \boxtimes K_2)$, com $p(x) = 2$, possui $1, 3, 4 \in p(N_{H\boxtimes K_2}(x))$. Além disso, todo $x \in V(H \boxtimes K_2)$, com $p(x) = \{1, 3, 4\}$, possui $2 \in p(N_{H\boxtimes K_2}(x))$.

Nos resta mostrar que os papéis 1,3 e 4 não fazem adjacência entre si.

Observamos que os vértices dos conjuntos A_1, A_3 e A_4 não possuem adjacência entre si. Logo em H e H' os vértices que recebem papel 1, 2 e 3 não fazem adjacência entre si. Dado dois vértices $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in V(H \boxtimes K_2)$, para $g_1, g_2 \in V(H)$ e $h_1, h_2 \in V(K_2)$, temos os seguintes casos de adjacência:

- Se $g_1 = g_2$ e $h_1h_2 \in E(K_2)$. Temos por definição de p que os vértices $p(g_1, h_1) = p(g_2, h_2)$;

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

- Se $g_1g_2 \in E(H)$ e $h_1 = h_2$. Como já citado, temos que se $g_1g_2 \in E(H)$ então sem perda de generalidade $p(g_1, h_1) = 2$ e $p(g_2, h_2) \in \{1, 2, 3, 4\}$;
- Se $g_1g_2 \in E(H)$ e $h_1h_2 \in E(K_2)$. Observamos que (g_1, h_2) faz adjacência com os vértices correspondentes da vizinhança de g_1 e h_2, logo pela definição de p, temos que se $p(g_1, h_2) = 2$, então $p(g_2, h_2) \in \{1, 2, 3, 4\}$ ou, dado que $\ell \in \{1, 3, 4\}$, se $p(g_1, h_2) = \ell$, então $p(g_2, h_2) \in \{\ell, 2\}$.

□

A seguir, no Lema 3, mostramos que R_4 é o único grafo de 4-atribuição de papéis possível para $H \boxtimes K_2$.

Lema 3. *Seja H o grafo obtido a partir da Construção 1, aplicada sobre G, e seja R um grafo de papéis. Se $p : V(H \boxtimes K_2) \to V(R)$ é uma 4-atribuição de papéis, então $R = R_4$.*

Demonstração. Seja $p : V(H \boxtimes K_2) \to V(R)$ uma 4-atribuição de papéis. Mostramos que $R = R_4$. Como $H \boxtimes K_2$ é conexo, sabemos pelo Lema 1 que R é conexo. Assumimos que $p(a_1) = 1$. A demonstração seguirá por avaliar as possibilidades de papéis para os vértices a'_1, a_2, e a'_2. Primeiro, observe que se $p(\{a_1, a'_1, a_2, a'_2\}) = \{1\}$, então $N_R(1) = \{1\}$, uma contradição já que R é conexo. Consideramos então que $2 \in p(\{a'_1, a_2, a'_2\})$ e assim $2 \in N_R(1)$. A fim de descartar algumas possibilidades recorremos à afirmação abaixo.

Afirmação 1. $p(a'_1) \neq p(a_2)$.

Suponha por contradição que $p(a'_1) = p(a_2) = i \in [4]$. Se $i = 1$, como $2 \in N_R(1)$, temos $p(a'_2) = 2$. Desta forma, $N_R(1) = \{1, 2\}$. A conexidade de R nos permite supor que $3 \in N_R(2)$. Assim a'_2 deve ter algum vizinho com papel 3, uma contradição dado que $p(a_2) = 1$ e $3 \notin N_R(1)$. Se $i \neq 1$, suponha s.p.g. que $i = 2$. A conexidade de R nos permite assumir que $p(a'_2) = 3$, e tomar $4 \in N_R(3)$. Até aqui sabemos que $N_R(2) = \{1, 2, 3\}$. O vértice a'_2 deve ter algum vizinho com papel 4, o que gera uma contradição dado que $p(a_2) = 2$ e $4 \notin N_R(2)$.

Afirmação 2. $p(a_1) \neq p(a_2)$.

Relembramos que $p(a_1) = 1$. Suponha por contradição que $p(a_2) = 1$. Da Afirmação 1 temos que $p(a'_1) \neq 1$. Suponha s.p.g que $p(a'_1) = 2$. Dado que R é conexo assumimos que $p(a'_2) = 3$, e tomamos $4 \in N_R(3)$. Em relação ao papel 1, temos que $N_R(1) = \{1, 2, 3\}$. Observe que a'_2 deve ter algum vizinho com papel 4, uma contradição dado que $p(a_2) = 1$ e $4 \notin N_R(1)$.

Da Afirmação 1 podemos considerar que $p(a'_1) \neq p(a_2)$ e, por simetria, que $p(a'_2) \neq 1$. Da Afirmação 2 podemos considerar que $p(a_2) \neq 1$ e, por simetria, que $p(a'_2) \neq p(a'_1)$. Para analisar o restante dos casos possíveis, já desconsideradas as simetrias, temos:

- Caso 1. $p(a'_1) = 1$, $p(a_2) = 2$, $p(a'_2) = 2$;
- Caso 2. $p(a'_1) = 1$, $p(a_2) = 2$, $p(a'_2) = 3$;
- Caso 3. $p(a'_1) = 2$, $p(a_2) = 3$, $p(a'_2) = 3$;
- Caso 4. $p(a'_1) = 2$, $p(a_2) = 3$, $p(a'_2) = 4$.

Observamos que o Caso 1 trata-se do ideal para concluirmos $R = R_4$. Prosseguimos mostrando contradições nos Casos 2, 3 e 4.

Caso 2. $p(a'_1) = 1$, $p(a_2) = 2$, $p(a'_2) = 3$.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

Da definição deste caso, temos que $N_R(1) = \{1, 2, 3\}$. Como R é conexo, temos que $4 \in p(\{a_3, a'_3, a_4, a'_4\})$. é imediato observar que se $p(a_3) = 4$, então $p(a'_3) = 4$. Além disso, se $p(a_4) = 4$, temos que $1 \notin p(\{a'_4, b_2, b'_2\})$ e $p(a'_4) \neq 2, 3$, pois $1 \notin p(\{b_2, b'_2\})$. Logo $p(a_4) = 4$ implica que $p(a'_4) = 4$. Assim temos que $N_R(2) = \{1, 3, 4\}$, $N_R(3) = \{1, 2, 4\}$ e $N_R(4) = \{2, 3, 4\}$. Similarmente, concluímos que se $p(a_3) = 1$, então $p(a'_3) = 1$ e que se $p(a_4) = 4$ então $p(a'_4) = 4$. Agora, analisaremos os papéis que a_4 e a'_4 podem assumir: ambos 1 ou ambos 4.

Considere primeiro que $p(a_4) = p(a'_4) = 1$. Se $1 \in p(\{b_2, b'_2\})$, note que $4 \notin p(\{b_3, b'_3\})$, pois $1 \notin N_R(4)$. Além disso, $2, 3 \notin p(\{b_3, b'_3\})$, uma vez que $4 \notin p(\{b_3, b'_3\})$. Consequentemente, $1 \notin p(\{b_3, b'_3\})$, dado que $2, 3 \notin p(\{b_3, b'_3\})$. Assim, temos então que $1 \notin p(\{b_2, b'_2\})$. Já sabemos que $1 \notin N_R(4)$ e que 2 e 3 não possuem laço, logo $p(b_2) = 2$ e $p(b'_2) = 3$.

Agora, suponha que $p(a_4) = p(a'_4) = 4$. De forma análoga ao visto no parágrafo anterior, podemos concluir que $p(\{b_2, b'_2\}) = \{2, 3\}$. Prosseguindo, dadas as adjacências de R, temos $(p(b_1), p(b'_1)) \in \{(1, 1), (4, 4)\}$, $p(\{d_2, d'_2\}) = \{2, 3\}$, $(p(w_2), p(w'_2)) \in \{(1, 1), (4, 4)\}$ e $2, 3 \in p(\{x_1, x'_1, y_1, y'_1\})$. Para este último, temos que há exatamente um vértice α de $\{x_1, x'_1, y_1, y'_1\}$ com papel 2 e exatamente um vértice β com papel 3, já que 2 e 3 não possuem laço. Por fim, para $x \in \{x_1, x'_1, y_1, y'_1\} \setminus \{\alpha, \beta\}$, se $(p(w_2), p(w'_2)) = (1, 1)$, como $4 \in N_R(\{2, 3\})$, então $p(x) = 4$, uma contradição pois $1 \notin N_R(4)$. O caso em que $(p(w_2), p(w'_2)) = (4, 4)$ permite obter uma contradição análoga.

Caso 3. $p(a'_1) = 2$, $p(a_2) = 3$, $p(a'_2) = 3$.

Pela definição deste caso, temos que $N_R(1) = \{2, 3\}$ e $N_R(2) = \{1, 3\}$. Como R é conexo, temos que $4 \in p(\{a_3, a'_3, a_4, a'_4\})$, logo $N_R(3) = \{1, 2, 3, 4\}$. Além disso, observamos que $3 \notin p(\{a_3, a'_3\})$ pois $|\{a_3, a'_3\}| = 2 < |N_R(3)| = 4$. Assim, observamos que se $p(a_3) = 1$, então $p(a'_3) = 2$, pois $2 \in N_R(1)$ e se $p(a_4) = 4$, então $p(a'_4) = 4$, pois $1, 2 \notin N_R(4)$.

Podemos tomar então que se $p(a_3) = 1$ e $p(a'_3) = 2$, então $p(a_4) = 4$ e $p(a'_4) = 4$, pois $1, 2 \notin p(\{a'_4, b_2, b'_2\})$, e se $p(a_3) = 4$ e $p(a'_3) = 4$, então ou $p(a_4) = 1$ e $p(a'_4) = 2$ ou $p(a_4) = 4$ e $p(a'_4) = 4$. Analisaremos as possibilidades de papéis que a_4 e a'_4 podem assumir.

Se $p(a_4) = 1$ e $p(a'_4) = 2$, como nem 1 nem 2 possuem laços, então $1, 2 \notin p(\{b_2, b'_2\})$, além disso $4 \notin N_R(\{1, 2\})$, logo temos que $p(b_2) = 3$ e $p(b'_2) = 3$. De outra forma, considerando que $p(a_4) = 4$ e $p(a'_4) = 4$, se $p(\{b_2, b'_2\}) = 4$ então temos que $p(\{b_3, b'_3\}) \neq \{1, 2\}$, pois $1, 2 \notin N_R(4)$ e $p(\{b_3, b'_3\}) \neq \{3, 4\}$, pois $3 \in N_R(4)$, $1 \in N_R(3)$ e $1 \notin N_R(4)$. Desta forma, concluímos que $p(b_2) = 3$ e, consequentemente, $p(b'_2) = 3$.

Prosseguindo, dadas as adjacências de R, temos que $(p(b_1), p(b'_1)) \in \{(1, 2), (4, 4)\}$, $p(\{d_2, d'_2\}) = 3$, $(p(w_2), p(w'_2)) \in \{(1, 2), (4, 4)\}$ e $1, 2, 3$ ou $3, 4 \in p(\{x_1, x'_1, y_1, y'_1\})$. Para este último, temos que dois vértices terão papel 3, já que 3 possui laço. Além disso, temos que $1, 2, 3, 4 \in N_R(3)$. Desta forma, para $\alpha, \beta \in \{x_1, x'_1, y_1, y'_1\}$, se $(p(w_2), p(w'_2)) = (1, 2)$, então $(p(\alpha), p(\beta)) = (4, 4)$ e se $(p(w_2), p(w'_2)) = (4, 4)$, então $(p(\alpha), p(\beta)) = (1, 2)$, os dois casos nos levam a uma contradição, dado que $1, 2 \notin N_R(4)$.

Caso 4. $p(a'_1) = 2$, $p(a_2) = 3$, $p(a'_2) = 4$.

Da definição deste caso, temos que $N_R(1) = \{2, 3, 4\}$ e $N_R(2) = \{1, 3, 4\}$. É imediato observar que $p(a_3) = 1$ e $p(a_3) = 2$, pois se $3, 4 \in p(\{a_3, a'_3\})$, dado que $1, 2 \in N_R(\{3, 4\})$, $|\{a_3, a'_3\}| = 2 < |N_R(\{3, 4\})| = 3$. Observamos que $(p(a_4), p(a'_4)) = \{(1, 2), (\{1, 2\}, \{3, 4\}), (\{3, 4\}, \{3, 4\})\}$. Desta forma, iremos analisar os papéis que a_4 e a'_4 podem assumir.

Considere primeiro que $p(a_4) = 1$ e $p(a'_4) = 2$. Isso nos dá que $N_R(3) = \{1, 2, 4\}$ e $N_R(4) = \{1, 2, 3\}$. Prosseguindo, dadas as adjacências de R, temos $(p(b_2), p(b'_2) = (3, 4)$, $(p(b_3), p(b'_3) = (1, 2)$, $(p(b_1), p(b'_1) = (3, 4)$ e $(p(d_2), p(d'_2) = (1, 2)$. Observamos que $3, 4 \in p(\{d_3, d'_3, w_3, w'_3\})$, porém como não há laços em R, temos uma contradição, dado que ao menos

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

dois vértices em $p(\{d_3, d'_3, w_3, w'_3\})$ receberiam o mesmo papel.

Consideramos que $p(a_4) \in \{1,2\}$ e $p(a'_4) \in \{3,4\}$, s.p.g consideramos $p(a_4) = 1$ e $p(a'_4) = 3$. Isso nos dá que $N_R(3) = \{1,2,3,4\}$ e $N_R(4) = \{1,2,3\}$. Prosseguindo, dadas as adjacências de R, temos $(p(b_2), p(b'_2)) = (2,4)$. Observamos que $1,3 \in p(\{b_3, b'_3\})$ nos dá uma contradição, pois se $(p(b_3), p(b'_3)) \in \{(1,3),(3,3)\}$, então $|\{b_3, b'_3\}| = 2 < |N_R(\{1,3\})| = 3$.

Por fim, consideramos $(p(a_4), p(a'_4)) \in \{(3,3),(4,4)\}$, s.p.g consideramos que $p(a_4) = 3$ e $p(a'_4) = 3$. Isso nos dá que $N_R(3) = \{1,2,3,4\}$ e $N_R(4) = \{1,2,3\}$. Prosseguindo, dadas as adjacências de R, temos $(p(b_2), p(b'_2) = (1,2)$. Observamos que $3,4 \in \{p(\{b_3, b'_3\})\}$ nos dá uma contradição, pois se $p(b_3) = 3$, $|N_{H\boxtimes K_2}(b_3)| = 3 < |N_R(3)| = 4$. Se $p(b_3) = 4$, b_3 precisará de adjacência com um vértice de papel 3, logo $p(b'_3) = 3$, porém $|N_{H\boxtimes K_2}(b'_3)| = 3 < |N_R(3)| = 4$.

Retornamos agora ao Caso 1, provando que $R = R_4$.

Caso 1. $p(a'_1) = 1$, $p(a_2) = 2$, $p(a'_2) = 2$;

Pela definição do caso, temos que $N_R(1) = \{1,2\}$. Como R é conexo, temos que ou $N_R(2) = \{1,2,i\}$, com $i \in \{3,4\}$, ou $N_R(2) = \{1,2,3,4\}$. Analisaremos os dois possíveis conjuntos de adjacências que o papel 2 pode assumir.

Considere primeiro que $N_R(2) = \{1,2,3\}$, observamos que $2 \notin p(\{b_3, b'_3\})$, dado que $|\{a_3, a'_3\}| = 2 < |N_R(2)| = 3$. Além disso, $3 \notin p(\{a_3, a'_3\})$, pois $4 \notin N_R(2)$ e sendo R conexo, $4 \in N_R(3)$. Assim, temos que $(p(a_3), p(a'_3)) = (1,1)$. Logo $(p(a_4), p(a'_4)) = (3,3)$. Observamos que como R é conexo, $N_R(3) = \{2,3,4\}$. Desta forma, $3 \notin p(\{b_2, b'_2\})$, pois, s.p.g., $p(b_2) = 3$ implica que $p(b'_2) = 4$ e $1,2 \in p(\{b_3, b'_3, b_1, b'_1\})$, porém $1,2 \notin N_R(4)$, assim, temos que $(p(b_2), p(b'_2)) = (4,4)$. Observamos que $3,4 \notin p(\{b_3, b'_3\})$, uma contradição, pois $3 \in N_R(4)$ e $|\{b_3, b'_3\}| = 2 < |N_R(3)| = 3$.

Agora, suponha que $N_R(2) = \{1,2,3,4\}$ observamos que $2 \notin p(\{b_3, b'_3\})$, dado que $|\{a_3, a'_3\}| = 2 < |N_R(2)| = 4$. Assim, temos que $(p(a_3), p(a'_3)) = \{(1,1),(3,4),(i,i)\}$, para $i \in \{3,4\}$.

Se $(p(a_3), p(a'_3)) = (1,1)$, implica que $(p(a_4), p(a'_4)) = (3,4)$, dado que $(p(a_2), p(a'_2)) = (2,2)$ e $3,4 \in N_R(2)$. Temos que $3,4 \notin p(\{b_2, b'_2\})$, pois $2 \notin p(\{b_3, b'_3\})$ visto que $|\{b_3, b'_3\}| = 2 < |N_R(2)| = 4$ e $2 \notin p(\{b_2, b'_2\})$, visto que $1 \notin N_R(\{3,4\})$ e $1 \in p(\{b_3, b'_3, b_1, b'_1\})$. Desta forma $(p(b_2), p(b'_2)) = (2,2)$.

Se $(p(a_3), p(a'_3)) = (3,4)$. Observamos que $N(3) = \{2,4\}$ e $N(4) = \{2,3\}$. Temos que $2 \notin p(\{a_4, a'_4\})$ dado que $1,3,4 \in p(\{a'_4, b_2, b'_2\})$ e $3,4 \notin N_R(1)$. Desta forma $(p(a_4), p(a'_4)) = \{(1,1),(3,4)\}$. Consideramos primeiro que $(p(a_4), p(a'_4)) = (1,1)$, temos que $1 \notin p(\{b_2, b'_2\})$ pois $2 \notin p(\{b_3, b'_3\})$ visto que $|\{b_3, b'_3\}| = 2 < |N_R(2)| = 4$ e $2 \notin p(\{b_2, b'_2\})$, visto que $1 \notin N_R(\{3,4\})$ e $3,4 \in p(\{b_3, b'_3, b_1, b'_1\})$. Desta forma análoga ao visto no parágrafo anterior, podemos concluir que $(p(b_2), p(b'_2)) = (2,2)$. Prosseguindo, dadas as adjacências de R, temos $(p(b_1), p(b'_1)) \in \{(1,1),(3,4)\}$, $(p(d_2), p(d'_2)) = (2,2)$, $(p(w_2), p(w'_2)) \in \{(1,1),(3,4)\}$ e $2 \in p(\{x_1, x'_1, y_1, y'_1\})$. Para este último teremos que dois vértices terão papel 2, já que 2 possui laço. Além disso, temos que $1,2,3,4 \in N_R(2)$. Desta forma, para $\alpha, \beta \in \{x_1, x'_1, y_1, y'_1\}$, se $(p(w_2), p(w'_2)) = (1,1)$, então $(p(\alpha), p(\beta)) = (3,4)$ e se $(p(w_2), p(w'_2)) = (3,4)$, então $(p(\alpha), p(\beta)) = (1,1)$, os dois casos nos levam a uma contradição, dado que $3,4 \notin N_R(1)$.

Por fim, consideramos $(p(a_3), p(a'_3)) = (i,i)$, para $i \in \{3,4\}$, s.p.g, $i = 3$. Observamos que $N_R(3) = \{2,3\}$. É imediato observar que se $(p(a_3), p(a'_3)) = (3,3)$ então $(p(a_4), p(a'_4)) = (4,4)$. Temos que $4 \notin p(\{b_2, b'_2\})$, pois $2 \in N_R(4)$, $2 \notin p(\{b_3, b'_3\})$ dado que $|\{b_3, b'_3\}| = 2 < |N_R(2)| = 4$, além disso $2 \notin p(\{b_1, b'_1\})$ dado que $|\{b'_2, d_2, d'_2\}| = 3 < |N_R(2)| = 4$ e $1,3 \notin N_R(4)$. Desta forma, temos que $(p(b_2), p(b'_2)) = (2,2)$. Prosseguindo, dadas as adjacências de R, temos $(p(b_3), p(b'_3)) = (3,3)$, $(p(b_1), p(b'_1)) = (1,1)$, $(p(d_2), p(d'_2)) = (2,2)$,

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

$(p(w_2), p(w_2')) = (2, 2)$, $(p(x_1), p(x_1'), p(y_1), p(y_1')) = (1, 1, 1, 1)$, $(p(x_3), p(x_3'), p(y_3), p(y_3')) = (3, 3, 3, 3)$, $(p(x_4), p(x_4'), p(y_4), p(y_4')) = (4, 4, 4, 4)$.

Desta forma, podemos concluir que R é um grafo com 4 papéis, cujas adjacências são $N(2) = \{1, 2, 3, 4\}$ e $N(i) = \{i, 2\}$ com $i \in \{1, 3, 4\}$, ou seja, $R = R_4$. □

Mostramos como encontrar uma 3-coloração para G no lema a seguir.

Lema 4. *Sejam H um grafo obtido a partir da Construção 1 e R_4 um grafo de papéis. Se $p : V(H \boxtimes K_2) \to V(R_4)$ é uma 4-atribuição de papéis para H, então G tem 3-coloração.*

Demonstração. Dado um grafo H obtido pela Construção 1, e R um grafo de 4-atribuição de papéis para H. Temos pelo Lema 3 que $R = R_4$.

Seja $p : V(H \boxtimes K_2) \to V(R_4)$ uma 4-atribuição de papéis. Assumimos, s.p.g., que $p(a_1) = 1$. Observamos que $2 \notin p(a_1')$, dado que $|N_{H \boxtimes K_2}(a_1')| = 3 < |N_R(2)| = 4$. Desta forma $p(a_1') = 1$. Se $1 \in p(\{a_2, a_2'\})$, notamos que $3, 4 \notin p(\{a_3, a_3', a_4, a_4'\})$, pois $3, 4 \notin N_R(1)$. Além disso, temos que $2 \in p(\{a_2, a_2'\})$, pois $2 \in N_R(1)$. Consequentemente, $1 \notin p(\{a_2, a_2'\})$ e temos que $p(a_2) = p(a_2') = 2$.

Dado que $p(a_2) = p(a_2') = 2$, temos que $2 \notin p(\{a_3, a_3'\})$, dado que $|\{a_3, a_3'\}| = 2 < |N_R(2)| = 4$. Então $p(a_3), p(a_3') \in \{1, 3, 4\}$. Dado que R é conexo e $p(a_1) = p(a_1') = 1$, consideramos que $p(a_3), p(a_3') \in \{3, 4\}$, s.p.g $p(a_3) = p(a_3') = 3$. Desta forma, temos que $4 \in p(\{a_4, a_4'\})$. Observamos que $2 \notin p(\{a_4, a_4'\})$, dado que $1, 3 \notin p(\{b_2, b_2'\})$, pois $1, 3 \notin N_R(4)$. Desta forma $p(a_4) = p(a_4') = 4$.

De forma similar a a_2 e a_2' temos que $p(b_2) = p(b_2') = 2$. E prosseguindo, pelo mesmo argumento de a_3 e a_3', temos que $p(b_3), p(b_3') \in \{1, 3\}$, s.p.g $p(b_3) = p(b_3') = 3$. Então, pela afirmação de a_4 e a_4' temos que $p(b_1) = p(b_1') = 1$. Ainda assim, de forma similar à a_2 e a_2', $p(d_2) = p(d_2') = 2$.

Dado que $p(d_2) = p(d_2') = 2$, se $i \in p(\{w_2, w_2'\})$, com $i \in \{1, 3, 4\}$, temos que $2 \in p(\{x_1, x_1', y_1, y_1'\})$. Sabemos que $N_R(2) = \{1, 2, 3, 4\}$, desta forma $1, 2, 3, 4 \in p(\{x_1, x_1', y_1, y_1'\})$, porém $\ell \notin p(\{x_1, x_1', y_1, y_1'\})$, com $\ell \in \{1, 3, 4\} \setminus i$, pois $\ell \notin N_R(i)$. Consequentemente, $p(w_2) = p(w_2') = 2$.

Sendo $p(w_2) = p(w_2') = 2$, sabemos que $1, 3, 4 \in N_R(2)$. Logo, s.p.g, $p(x_1) = 1$, temos que $3, 4 \notin N_R(1)$ e pelo parágrafo anterior $2 \notin p(\{x_1, x_1', y_1, y_1'\})$. Assim, temos que $p(x_1') = p(y_1) = p(y_1') = 1$. De foma similar temos que, dado $3, 4 \in N_R(2)$, $p(x_3) = 3$ então $p(x_3') = p(y_3) = p(y_3') = 3$. E ainda assim, dado que $4 \in N_R(2)$, $p(x_4) = 4$ então $p(x_4') = p(y_4) = p(y_4') = 4$.

Observamos que pelo mesmo motivo do parágrafo anterior $2 \notin p(\{d_3, d_3', w_3, w_3'\})$ e além disso, dado que $3, 4 \in N_R(2)$ se $p(d_3) = 3$, então $p(d_3') = p(w_3) = p(w_3') = 3$. Dado que $4 \in N_R(2)$ e $2 \notin p(\{d_4, d_4'\})$, pois $|\{d_4, d_4'\}| = 2 < |N_R(2)| = 4$, então $p(d_4) = p(d_4) = 4$.

Sejam $n = |V(G)| \geq 3$ e $m = |E(G)| \geq 2$. Desta forma, pela Construção 1, temos $v_i, v_i' \in V(H \boxtimes K_2)$ e $e_j e_j' \in E(H \boxtimes K_2)$, para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$. Além disso, observamos que para todo $e_j \in V(H)$, temos que $e_j = v_{i_1} v_{i_2} \in E(G)$, ou seja, $e_j v_{i_1}, e_j v_{i_2} \in E(H)$.

Assim, sendo $p(d_2) = p(d_2') = 2$, se $p(v_{i_1}) = 2$, temos que $1, 3, 4 \in p(\{v_{i_1}', e_1, e_1'\})$, porém $1 \notin N(\{3, 4\})$ e $3 \notin N(4)$, logo $2 \notin p(\{v_{i_1}, v_{i_1}'\})$. Desta forma, $p(v_{i_1}) = p(v_{i_1}') = \{1, 3, 4\}$, consideramos, s.p.g. que $p(v_{i_1}) = p(v_{i_1}') = 1$. Se $1 \in p(\{e_j, e_j'\})$, temos que $3, 4 \notin p(\{f_j, f_j', v_{i_2}, v_{i_2}', e_z, e_z'\})$, para $z \in [m] \setminus \{j\}$, além disso $p(f_j) = p(f_j') = 1$, ou seja, $2 \in p(\{e_j, e_j'\})$, dado que $3, 4 \in N_R(2)$, $3, 4 \in p(\{f_j, f_j', v_{i_2}, v_{i_2}', e_z, e_z'\})$. Consequentemente, $1 \notin p(\{e_j, e_j'\})$ e $p(e_j) = p(e_j') = 2$.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

Como $3,4 \in N_R(2)$, temos que $3,4 \in p(\{f_j, f'_j\})$, s.p.g. consideramos que $p(f_j) = 3$, dado que $N_R(3) = \{2,3\}$, então $p(f'_j) = 3$. De forma análoga ao parágrafo anterior, temos que $2 \notin p(\{v_{i_2}, v'_{i_2}\})$, então dado que $4 \in N_R(2)$, $p(v_{i_2}) = p(v'_{i_2}) = 4$.

Dessa forma, pelos parágrafos anteriores, observamos que para todo $e_j, e'_j \in V(H \boxtimes K_2)$, $p(e_j) = p(e'_j) = 2$, e dado que $1,3,4 \in N_R(2)$, $p(v_{i_1}) = p(v'_{i_1}) = \ell_1$, $p(v_{i_2}) = p(v'_{i_2}) = \ell_2$ e $p(f_j) = p(f'_j) = \ell_3$, onde $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \{1,3,4\}$ distintos e $|\{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}| = 3$. Consequentemente, $p(v_{i_1}) \neq p(v_{i_2})$ e ao definir uma função $c(v_i) = p(v_i)$ temos uma 3-coloração para G. □

Concluímos com a prova de que 4-Atribuição de Papéis é NP-completo para produto forte de grafos.

Teorema 2. *O problema de* 4-*Atribuição de Papéis é* NP*-completo para o produto forte de dois grafos conexos não triviais.*

Demonstração. Sabemos por Roberts e Sheng [2001] que o problema está em NP.

Para mostrar a NP-completude do problema, usamos uma redução do problema 3-Coloração que é NP-completo [Garey et al., 1976]. A partir de um grafo G construímos $H \boxtimes K_2$, em que H é obtido pela Construção 1. Assim, pelos Lemas 2 e 4 provamos que G possui uma 3-coloração se somente se, $H \boxtimes K_2$ possui uma 4-atribuição de papéis. Desta forma, concluímos que decidir se $H \boxtimes K_2$ possui uma 4-atribuição de papéis é NP-completo. □

4. Considerações finais

Dado que a atribuição de papéis é um problema não monótono e sabendo que o problema de atribuição para produto Cartesiano para $r \geq 4$ é NP-completo, então para trabalhos futuros, sugerimos investigar a seguinte conjectura:

Conjectura 1. *Sejam G e H grafos conexos não triviais. Se $r \geq 5$, o problema de decidir se $G \boxtimes H$ possui uma r-atribuição de papéis é* NP*-completo.*

Referências

Aleksandar, P. e Fred, S. (1999). The role assignment model nearly fits most social networks. *Mathematical Social Sciences*, 41(3):275–293.

Bondy, J. A. e Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*. Springer Publishing Company, Incorporated.

Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., e Nascimento, J. R. (2025). Computing a 3-role assignment is polynomial-time solvable on complementary prisms. *International Journal of Foundations of Computer Science*, p. 1–24.

Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., e Nascimento, J. R. (2022). Computing some role assignments of cartesian product of graphs. *RAIRO-Oper. Res.*, 56(1):115–121.

Castonguay, D., Dias, E. S., Mesquita, F. N., e Nascimento, J. R. (2023). Computing role assignments of cartesian product of graphs. *RAIRO-Oper. Res.*, 57(3):1075–1086.

Diestel, R. (2000). *Graph theory*. New York, USA, Springer-Verlag.

Dourado, M. C. (2016). Computing role assignments of split graphs. *Theoretical Computer Science*, 635:74–84.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br

Everett, M. G. e Borgatti, S. (1991). Role colouring a graph. *Mathematical Social Sciences*, 21(2): 183–188.

Fiala, J. e Paulusma, D. (2005). A complete complexity classification of the role assignment problem. *Theoretical computer science*, 349(1):67–81.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (2002). *Computers and intractability*, volume 29. New York, USA, wh freeman New York.

Garey, M. R., Johnson, D. S., e Stockmeyer, L. (1976). Some simplified NP-complete graph problems. *Theoretical computer science*, 1(3):237–267.

Guajajara, J. e Nascimento, J. (2024). Caracterização de 2-atribuição de papéis em produto corona de dois grafos. In *Anais do IX Encontro de Teoria da Computação*, p. 139–143, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.

Hammack, R. H., Imrich, W., e Klavžar, S. (2011). *Handbook of product graphs*, volume 2. CRC press Boca Raton.

Hell, P. e Nesetril, J. (2004). *Graphs and homomorphisms*. Oxford University Press, New York, USA.

LI, H. e HE, W.-j. (2004). Role assignments on grid graph and honeycomb torus. *Journal of The Hebei Academy of Sciences*, p. 04.

Medeiros, G. e Nascimento, J. (2024). 3-atribuição de papéis em produto forte de grafos bipartidos e grafos cordais sem folhas. In *Anais do IX Encontro de Teoria da Computação*, p. 90–94, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.

Medeiros, G. e Nascimento, J. (2025). Um estudo sobre atribuição de papéis em produto forte de grafos usando contração de vértices gêmeos. In *Anais do X Encontro de Teoria da Computação*, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC. (Trabalho aceito).

Medeiros, G. M. e Nascimento, J. R. (2023). O produto forte de um grafo não trivial e o grafo completo possui 2-e 3-atribuição de papéis. In *Anais da XI Escola Regional de Informática de Goiás*. SBC.

Pandey, S. (2019). *Role colouring hereditary classes of graphs*. PhD thesis, Indian Institute of Science Education and Research Pune.

Purcell, C. e Rombach, P. (2015). On the complexity of role colouring planar graphs, trees and cographs. *Journal of Discrete Algorithms*, 35:1–8.

Purcell, C. e Rombach, P. (2021). Role colouring graphs in hereditary classes. *Theoretical Computer Science*, 876:12–24.

Roberts, F. S. e Sheng, L. (2001). How hard is it to determine if a graph has a 2-role assignment? *Networks*, 37(2):67–73.

van 't Hof, P., Paulusma, D., e van Rooij, J. M. (2010). Computing role assignments of chordal graphs. *Theoretical Computer Science*, 411(40):3601–3613.

Zhao, Y.-q., Feng, W.-l., Li, H., e Yang, J.-m. (2010). k-role assignments under some graph operations. *Journal of Hebei University of Science and Technology*, p. 06.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212389
https://proceedings.science/p/212389?lang=pt-br