57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

# Minimização da Máxima Potência em Linhas de uma Rede Elétrica de Transmissão: Uma Abordagem via Teoria Espectral de Grafos para o Balanço de Potência

**Antônio Geovane Cavalcante da Silva & Rafael Castro de Andrade**
Universidade Federal do Ceará
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada
Campus do Pici S/N - bloco 910 - Fortaleza - Ceará, 60.440-900, Brasil
geovanecavalcante@alu.ufc.br, rafael.andrade@ufc.br

**Arnaud Knippel & Jean-Guy Caputo**
INSA Rouen Normandie
Laboratoire de Mathématiques
Av. de l'université, 76801 Saint-Etienne du Rouvray, France.
arnaud.knippel@insa-rouen.fr, jean-guy.caputo@insa-rouen.fr

## RESUMO

Propomos uma abordagem original para o balanço de carga em redes de transmissão, via teoria espectral de grafos, para otimizar a distribuição de potência nas linhas da rede. Diferentemente de métodos tradicionais presentes na literatura que o fazem minimizando o quadrado da norma do vetor de potências nas linhas, desenvolvemos um modelo matemático linear original cujo objetivo é minimizar a potência máxima das linhas, promovendo um balanço de carga mais equilibrado. Essa abordagem resultou, por exemplo, em uma redução de 23% na potência máxima observada para uma rede adaptada IEEE de 2383 nós, além de ganhos significativos em desempenho computacional para realizar seu balanço de carga. O modelo incorpora restrições operacionais realistas, como limites de potência nas linhas e de geração nas unidades geradoras. Além disso, possibilita o monitoramento automatizado de linhas críticas, identificando pontos de iminente sobrecarga. Tal avanço constitue uma nova e alternativa maneira de lidar com o problema, apresentando-se como uma abordagem robusta e confiável para a segurança e desempenho da infraestrutura elétrica da rede, aumentando sua eficiência operacional para lidar com eventualidades devido à integração de energia gerada por fontes renováveis.

**PALAVRAS CHAVE. Teoria espectral de grafos, Fluxo de potência ótimo, Rede elétrica de transmissão.**

**PO na Área de Energia, Petróleo e Gás**

## ABSTRACT

This study proposes a novel approach to load balancing in transmission networks using spectral graph theory to optimize the power distribution on network lines. Unlike traditional methods in the literature that minimize the squared norm of power flows, the original linear mathematical model focuses on reducing the maximum power on the lines, promoting a more balanced load distribution. This approach resulted, for instance, in a 23% reduction in the maximum power on the IEEE 2383-bus system, along with significant gains in computational performance. The model

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

incorporates realistic operational constraints, such as line power limits and generation limits in generator units. In addition, it enables automated monitoring of critical lines, identifying potential overload points. Such an advance constitutes a new and alternative way to address the problem, presenting itself as a robust and reliable approach for the security and performance of the electrical infrastructure of the network, increasing its operational efficiency to handle eventualities due to the integration of energy generated from renewable sources.

**KEYWORDS. Graph spectral theory, Optimal power flow, Transmission power network.**

**OR in the Energy, Oil, and Gas.**

## 1. Introdução

A eletricidade é fundamental para o desenvolvimento humano, impactando setores essenciais como saúde, transporte, indústria, financeiro, educação, etc. A interrupção de seu fornecimento pode gerar graves crises, como vistas em apagões históricos, incluindo os ocorridos nos EUA e Canadá em 1965 [U.S. Department of Energy, 1965], no Brasil em 2001 [Pereira et al., 2002], e mais recentemente em 2023 [Operador Nacional do Sistema Elétrico, 2023], evidenciando a fragilidade da infraestrutura elétrica mesmo em sistemas modernos.

A complexidade operacional das redes elétricas tem aumentado devido ao crescimento da demanda por eletricidade, interconexão de sistemas e, principalmente, pela integração de fontes renováveis de energia, como a eólica e a solar. Essa transição energética exige abordagens e métodos eficientes para o planejamento e operação de redes, especialmente na identificação de linhas críticas, i.e, aquelas mais suscetíveis a sobrecargas e, consequentemente, falhas.

O Nordeste brasileiro, particularmente o Ceará, se destaca na geração de energia eólica e solar, mas enfrenta desafios na transmissão devido a gargalos na infraestrutura de sua rede elétrica. Esses limitantes resultam em cortes de geração, desperdício energético e perdas financeiras [Diário do Nordeste, 2024], demandando investimentos bilionários para a expansão da rede [Secretaria de Desenvolvimento Econômico do Ceará, 2024]. Para otimizar esses investimentos, são necessárias ferramentas matemáticas e computacionais que identifiquem pontos críticos, gerenciem fluxos de potência e aumentem a confiabilidade do sistema.

Nesse aspecto, o problema de Fluxo de Potência Ótimo (Optimal Power Flow - OPF, em inglês) é central na operação de redes elétricas. Ele busca otimizar uma função objetivo de interesse sujeita a restrições operacionais do sistema. Por exemplo, a minimização de perdas de potência ativa [Baptista et al., 2004]. Nesse sentido, as equações de fluxo de carga formam a principal ferramenta para o estudo desses problemas, fornecendo uma relação entre a potência, a voltagem e a corrente da rede.

Neste trabalho, abordamos um problema relacionado ao OPF. O objetivo é encontrar a melhor distribuição de potência nas linhas de uma rede de transmissão a partir da perspectiva da teoria espectral de grafos [Knippel et al., 2020; da Silva et al., 2024]. Para isso, empregamos a matriz laplaciana da rede elétrica, permitindo linearizar a equação de fluxo de carga associada à potência ativa [Caputo et al., 2019]. Essa matriz, semelhante ao operador laplaciano em problemas contínuos [Newman, 2000], permite analisar como a topologia da rede e a distribuição de geradores e cargas influenciam os fluxos de potência. Essa metodologia já foi aplicada com sucesso na identificação de vulnerabilidades em redes de energia [Retiere et al., 2020], reforçando seu potencial para este estudo. Essa abordagem permite determinar um vetor de potência nas linhas, cujas componentes correspondem individualmente às linhas da rede, possibilitando o cálculo de sua norma quadrática, utilizada como função objetivo nos modelos matemáticos tradicionais [Knippel et al., 2020].

Com isso, propomos um novo modelo linear que minimiza a potência máxima nas linhas da rede, promovendo uma distribuição de carga mais equilibrada em comparação com abordagens

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

quadráticas presentes na literatura. Além disso, expandimos esse modelo para incluir restrições de capacidade máxima de potência nas linhas e de geração nas unidades geradoras, bem como variáveis de controle para identificar linhas críticas, alinhando-se às necessidades práticas dos operadores de rede. As distribuições de potência nas linhas podem ser recalculadas em intervalos curtos (tipicamente a cada 10 a 15 minutos), o que permite rápida adaptação às variações do sistema e possibilita ao operador um controle para a tomada de decisão. Conduzimos experimentos computacionais para redes IEEE adaptadas e comparamos os resultados com os de modelos existentes na literatura para o problema. Entre os principais resultados, destaca-se a redução de 23% na potência máxima observada em uma rede adaptada do sistema IEEE de 2383 nós em relação ao modelo da literatura; e a ocorrência de menor tempo computacional do modelo proposto em redes de grande escala. Esses resultados evidenciam que a nova abordagem baseada em teoria espectral de grafos possibilita novas direções de pesquisa para o balanço de carga em redes de energia, constituindo uma alternativa viável para a concepção de modelos que tornem mais segura a infraestrutura elétrica do país, tornando-a mais resiliente e eficiente.

## 2. Equação espectral para as potências nas linhas

O desenvolvimento desta seção é baseado na abordagem de [Caputo et al., 2019], sendo posteriormente detalhado em [da Silva et al., 2024], com foco na análise de rede elétrica de transmissão. Essa rede pode ser representada como um grafo simples, conexo e não orientado $\overline{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ com $n = |\mathcal{V}|$ vértices e $m = |\mathcal{E}|$ arestas. Para esse tipo de sistema, é usual adotarmos certas aproximações que conduzem a uma forma simplificada das equações de fluxo de carga. O que permite representar elementos da rede elétrica por meio de estruturas matemáticas oriundas da teoria espectral de grafos. Nesse contexto, o vetor de potência ativa nos nós $P$ da rede é descrito por:

$$P = -\Delta\theta, \tag{1}$$

onde $\theta_{n\times 1}$ representa o vetor de fases e, $\Delta_{n\times n}$, o laplaciano do grafo associado à rede elétrica, que pode ser definido como $\Delta = D_n - A_n$, em que $A_n$ é a matriz de adjacência do grafo e $D_n$ é uma matriz diagonal cujo elemento $D_{ii}$ é o grau do vértice $i$ em $\overline{G}$. Já o vetor de potência nas linhas de transmissão $P_\ell$ é expresso por:

$$P_\ell = \nabla\theta, \tag{2}$$

em que $\nabla_{m\times n}$ denota o gradiente discreto, podendo ser definido como a matriz $\nabla = M^T$, em que $M^T$ é a transposta da matriz de incidência nó-arco $M$ do grafo orientado resultante de uma orientação arbitrária das arestas de $\overline{G}$.

Para obter uma expressão espectral para a potência nas linhas $P_\ell$, projeta-se inicialmente o vetor de potências ativas $P$ na base dos autovetores ortonormais do laplaciano $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$:

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbf{v}^i, \tag{3}$$

onde $p_i$ são os coeficientes correspondentes à projeção de $P$ nos autovetores $\mathbf{v}^i$, conhecido $p_1 = 0$.

Considerando a rede elétrica envolver pontos específicos de geração e uma demanda distribuída entre diversos nós consumidores, torna-se fundamental representar os vetores de geração de energia nos nós da rede $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$, e de suas demandas $L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)$, na base desses autovetores. Representamos os coeficientes de suas respectivas projeções nessa base por $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, para a geração, e por $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, para a demanda. Desse modo temos:

$$G = \sum_{i=1}^{n} g_i \mathbf{v}^i \quad e \quad L = \sum_{i=1}^{n} l_i \mathbf{v}^i.$$

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

A relação entre a potência ativa $P$, geração $G$ e a carga $L$ é dada por $P \equiv G - L$. Assumimos o equilíbrio entre consumo e produção ($G = L$). Assim, podemos mostrar que a potência nas linhas $P_\ell$ é dada por:

$$P_\ell = -\nabla \sum_{i=2}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i} \mathbf{v}^i, \tag{4}$$

em que cada componete desse vetor corresponde à potência em uma linha de transmissão. Por fim, a norma de $P_\ell$ pode ser expressa por:

$$||P_\ell||_2^2 = \sum_{i=2}^{n} \frac{(g_i - l_i)^2}{\lambda_i}. \tag{5}$$

A expressão (5) indica que a norma euclidiana das potências nas linhas depende exclusivamente dos autovalores e das projeções das potências de geração e consumo nos autovetores do laplaciano. Com base nesse resultado, desenvolvemos, a seguir, modelos matemáticos para o balanço de carga em redes de transmissão.

## 3. Formulações matemáticas

Inicialmente, descrevemos o problema de otimização associado ao balanço de carga em redes elétricas de transmissão, juntamente com as formulações matemáticas propostas originalmente em Knippel et al. [2020]. Em seguida, introduzimos as novas formulações desenvolvidas no presente trabalho.

### 3.1. Definição formal do problema

Modelamos a rede elétrica de transmissão como um grafo simples conexo $\overline{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, onde cada ponto de geração ou consumo de energia da rede é representado por um elemento do conjunto de vértices $\mathcal{V}$ (nós da rede), e as conexões entre eles, correspondentes às linhas de transmissão, são descritas pelo conjunto de arestas $\mathcal{E}$. Denotamos por $n = |\mathcal{V}|$ o número de nós e por $m = |\mathcal{E}|$ o número de linhas da rede. Assume-se a existência de uma demanda elétrica associada a cada nó. Os nós são classificados em duas categorias: $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{ger} \cup \mathcal{V}_{cons}$, onde $\mathcal{V}_{ger}$ representa o conjunto de nós geradores (que produzem e distribuem energia), e $\mathcal{V}_{cons}$ representa os nós consumidores (onde há retirada de potência).

O objetivo consiste em determinar a quantidade de eletricidade gerada em cada nó gerador, de forma a minimizar a *"potência elétrica"* nas linhas da rede de transmissão enquanto atende a demanda dos consumidores. Equivale a obter a melhor distribuição possível de potência nas linhas, no contexto do problema conhecido como balanço de carga em redes de transmissão de energia. Para isso, adota-se, em uma abordagem clássica, a minimização da norma euclidiana do vetor de potências nas linhas, conforme a Equação (5). Tal objetivo implica em determinar o vetor de geração dos nós geradores $G$, dado o vetor de carga (demanda) dos nós consumidores $L$, que minimiza $||P_\ell||_2^2$. O problema de otimização resultante é descrito em [Knippel et al., 2020], vide modelo (FP), que explora as propriedades do espaço espectral formado pelos autovetores $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\}$ e

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

autovalores $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ do laplaciano associado à rede elétrica.

$$\begin{aligned}
\text{(FP)} \quad \min \quad & \sum_{i=2}^{n} \frac{(g_i - l_i)^2}{\lambda_i} \\
\text{s.a:} \quad & \sum_{i=1}^{n} g_i \mathbf{v}_k^i \geq 0, \quad k \in \mathcal{V}_{ger}, && (6) \\
& \sum_{i=1}^{n} g_i \mathbf{v}_k^i = 0, \quad k \notin \mathcal{V}_{ger}, && (7) \\
& \sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} \left( \sum_{i=1}^{n} g_i \mathbf{v}_k^i \right) = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} l_i \mathbf{v}_k^i \right), && (8)
\end{aligned}$$

de forma que a desigualdade (6) garante a não negatividade da geração de energia no vértice gerador $k$. As variáveis $g_i$, livres de sinal, correspondem às projeções do vetor de geração $G$ sobre os autovetores $\mathbf{v}^i$ do laplaciano associado à rede, sendo $\mathbf{v}_k^i$ a componente $k$ do autovetor $\mathbf{v}^i$. Por sua vez, a equação (7) impõe a ausência de geração nos vértices não geradores. Já a equação (8) garante a conservação de energia no sistema, assegurando que toda a energia gerada seja integralmente consumida. Como o vetor de consumo $L$ é conhecido, suas projeções $\ell_i$ também são, sendo um parâmetro constante no modelo.

### 3.2. Contribuição do trabalho

Tendo apresentado um dos modelos disponíveis na literatura, passamos agora a delinear a contribuição original deste trabalho. Destacamos os aspectos inovadores propostos, com foco no desempenho computacional e operacional das formulações propostas.

Uma questão natural a ser levantada refere-se à efetividade do modelo (FP) quanto à distribuição de potência nas linhas. Tal modelo minimiza, de fato, a maior potência transmitida pelas linhas? Como será discutido a seguir, a resposta a essa indagação nem sempre é afirmativa. Diante desse cenário, propomos o desenvolvimento de uma nova abordagem para tratar diretamente essa questão, buscando minimizar a máxima potência transmitida em cada linha da rede. Seja $P_\ell^k$ a potência em uma linha $k$ em $P_\ell$ na equação (4). Veja que o gradiente discreto pode assumir, devido à orientação arbitrária atribuída às linhas da rede, valores positivos ou negativos de potência nas linhas. Assim, como primeira abordagem, propomos uma formulação matemática baseada em cotas inferiores $\underline{P}_\ell^k$ para $P_\ell^k$, satisfazendo as desigualdades:

$$\underline{P}_\ell^k \geq P_\ell^k \quad e \quad \underline{P}_\ell^k \geq -P_\ell^k, \tag{9}$$

garantindo que $\underline{P}_\ell^k$ seja, no mínimo, igual ao valor absoluto de $P_\ell^k$. Com isso, um modelo matemático minimizando a maior potência nas linhas da rede, denotada por $W$, é dado por:

$$\begin{aligned}
\text{(WM)}_i \quad \min \quad & W \\
\text{s.a:} \quad & (4), (6) - (9), \ e \\
& \underline{P}_\ell^k \leq W, \quad \forall k \in \mathcal{E}. && (10)
\end{aligned}$$

Esse modelo minimiza a maior potência nas linhas pela função objetivo do problema e por (10). Nesse modelo, as variáveis são $W \geq 0$ e as projeções $g_i$ livres de sinal, sendo as projeções $\ell_i$ conhecidas. Agora adaptaremos $(\text{WM})_i$ para capturar exatamente os valores absolutos da distribuição de potência nas linhas para analisar outros aspectos relacionados à segurança operacional da rede.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

Por exemplo, verificar se alguma linha atinge um dado limite de risco (i.e., um valor de potência perto de sua potência nominal máxima).

Para isso, denotamos o valor absoluto da potência na linha $k$ por $\hat{P}_\ell^k = |P_\ell^k|$. Esse valor pode ser obtido introduzindo-se variáveis binárias $Y_1^k$ e $Y_2^k$, associadas a cada linha $k$, juntamente com um parâmetro big-M, digamos $\hat{M} \in \mathbb{R}_+$, suficientemente grande, como segue:

$$\begin{cases} P_\ell^k \leq \hat{P}_\ell^k \leq P_\ell^k + \hat{M} Y_2^k, \\ -P_\ell^k \leq \hat{P}_\ell^k \leq -P_\ell^k + M' Y_1^k, \\ Y_1^k + Y_2^k = 1, \\ Y_1^k, Y_2^k \in \{0,1\}, \end{cases} \tag{11}$$

onde percebemos que

$$\hat{P}_\ell^k = \quad \begin{cases} P_\ell^k \quad se \quad P_\ell^k \geq 0, \quad \text{quando} \quad Y_1^k = 1, \\ -P_\ell^k \quad se \quad P_\ell^k < 0, \quad \text{quando} \quad Y_2^k = 1. \end{cases}$$

Cumpre destacar ainda que a crescente integração de fontes de energia renovável apresenta desafios significativos para a estabilidade e a capacidade da rede elétrica brasileira, podendo causar sobrecarga nas linhas de transmissão, em que esse fato ocorre quando o fluxo de potência ultrapassa a capacidade nominal da infraestrutura existente, aumentando o risco de falhas no fornecimento e a possibilidade de apagões. Nesse contexto, é crucial a introdução de variáveis que possibilitem o monitoramento do risco de uma linha atingir um percentual crítico de seu limite máximo de potência. Para isso, define-se uma variável $R_k$ associada a cada linha $k$, permitindo a identificação de situações em que a potência transmitida ultrapassa, por exemplo, um limite arbitrário de 80% ou 90% de sua capacidade máxima. Esse percentual, que denotaremos como $p^{\%}$, é um parâmetro ajustável, determinado pelo operador do sistema, enquanto o limite de potência $P_{\text{lim}}^k$ de cada linha é um valor físico previamente conhecido em função de seu material. Nesse sentido, propomos modelar o controle de risco de atingir um limite nominal de carga de uma linha da seguinte forma:

$$\begin{cases} \hat{P}_\ell^k \leq p^{\%} P_{lim}^k + R_k (1 - p^{\%}) P_{lim}^k, \quad \forall k \in \mathcal{E}, \\ \hat{P}_\ell^k \geq p^{\%} P_{lim}^k R_k, \quad \forall k \in \mathcal{E}, \\ R_k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in \mathcal{E}. \end{cases} \tag{12}$$

Quando $R_k = 1$, isso indica que a linha $k$ atingiu seu limite de risco, sinalizando a necessidade de um monitoramento mais rigoroso para evitar seu desligamento e prevenir impactos negativos no sistema.

A modelagem dessa variável possibilita a implementação automatizada de ações preventivas e corretivas de forma mais precisa, contribuindo para a manutenção da integridade e da confiabilidade do sistema elétrico. Essa abordagem se torna ainda mais relevante diante das novas dinâmicas de geração e consumo de energia, permitindo uma gestão mais eficiente da rede elétrica.

Adicionalmente, as usinas geradoras possuem limites físicos e operacionais que restringem a quantidade máxima de energia que podem produzir. Nesse contexto, propomos um último modelo matemático, mais realista, que leva em consideração não apenas os limites físicos das linhas de transmissão, representados por $P_{lim}^k$, mas também as restrições de geração nos nós geradores, denotadas por $G_{lim}^k$. Especificamente, impomos a restrição $0 \leq G_k \leq G_{lim}^k$ para todo $k \in \mathcal{V}_{\text{ger}}$. Além disso, reconhecendo que, em situações críticas, parte da carga dos consumidores pode não ser atendida a fim de evitar falhas sistêmicas, introduzimos um gerador artificial $G_a$. Esse gerador artificial permite contabilizar a energia não fornecida aos consumidores, oferecendo uma modelagem mais próxima do real comportamento da rede em cenários adversos.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

Dessa forma, ao considerar o percentual $p^{\%}$ de controle de risco de sobrecarga nas linhas como parâmetro de entrada, formulamos um novo modelo capaz de representar de maneira mais precisa as restrições e os riscos operacionais da rede elétrica:

$$
\begin{aligned}
(\text{WM})_L \quad \min \quad & W + \hat{M} G_a \\
\text{s.a.:} \quad & (4), (6), (7), (11), (12), \text{ e} \\
& \hat{P}_\ell^k \leq W, \quad \forall k \in \mathcal{E}, && (13) \\
& \hat{P}_\ell^k \leq P_{lim}^k, \quad \forall k \in \mathcal{E}, && (14) \\
& \sum_{i=1}^{n} g_i \mathbf{v}_k^i \leq G_{lim}^k, \quad k \in \mathcal{V}_{ger}, && (15) \\
& \sum_{k \in V_{ger}} \left(\sum_{i=1}^{n} g_i \mathbf{v}_k^i\right) + G_a = \sum_{i=1}^{n} L_i, && (16) \\
& G_a \geq 0, && (17)
\end{aligned}
$$

em que $\hat{M} \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro convenientemente grande. O modelo proposto visa otimizar a expressão $W + \hat{M} G_a$, priorizando a minimização de $W$, com o objetivo de alcançar uma melhor distribuição da geração entre os geradores reais, considerando ainda uma conservação de energia eventualmente fictícia conforme a expressão em (16). Quando $G_a \neq 0$, a geração artificial está sendo utilizada, o que indica que a geração real não foi suficiente para suprir totalmente a demanda. Nesse caso, parte da demanda dos consumidores não é atendida e, determinar o montante não atendido, pode ser feito considerando a demanda $L_i$ do nó $i$ e a potência líquida das linhas adjacentes a esse nó, cujos sinais indicam o sentido do fluxo (positivo quando a potência é injetada em $i$ e negativo quando é extraída).

## 4. Resultados computacionais

Para a análise dos resultados computacionais, utilizamos instâncias adaptadas de redes elétricas de referência do IEEE, considerando as linhas homogêneas e todos os nós consumidores de uma unidade de energia por unidade de tempo, como sugere Knippel et al. [2020]. Foram testadas quatro redes: uma com 30 nós, 41 linhas e 6 geradores; outra com 118 nós, 179 linhas e 15 geradores; uma com 300 nós, 409 linhas e 69 geradores; e, por fim, uma rede com 2383 nós, 2886 linhas e 327 geradores. Os experimentos foram realizados em um computador com processador Intel Core i3-6006U (2 × 2.00 GHz), 12 GB de RAM e sistema operacional Windows 10 Pro (64 bits), com implementações desenvolvidas na linguagem Julia (versão 1.9.3). Utlizamos a biblioteca CPLEX.jl para resolver os modelos lineares e, a HiGHS.jl, para o modelo quadrático.

A seguir, apresentamos os experimentos computacionais para avaliar o desempenho dos modelos linearizados $(\text{WM})_\text{i}$ e $(\text{WM})_\text{L}$. Comparamos $(\text{WM})_\text{i}$ com (FP), analisando a máxima potência nas linhas. Também avaliamos o modelo mais realista $(\text{WM})_\text{L}$ em diferentes cenários operacionais, considerando restrições como capacidade de geração e limites nas linhas de transmissão. A análise inclui a identificação de sobrecargas por meio da variável de controle de risco e o papel do gerador artificial $G_a$ para determinar a demanda não atendida.

A Tabela 1 apresenta os valores de potência máxima (em valor absoluto) e o tempo computacional obtidos pelos modelos (FP) e $(\text{WM})_\text{i}$, para cada rede. Observa-se uma redução na potência máxima nas linhas para as redes IEEE 30, 118 e 2383, com diminuições de 16%, 18% e 23%, respectivamente. Para a rede IEEE 300, o valor permaneceu inalterado. Quanto ao tempo computacional, a máquina inicial não conseguiu resolver o modelo (FP) para a rede IEEE 2383 em até 4 horas, levando à interrupção da execução. Já o modelo $(\text{WM})_i$ solucionou essa instância em 18

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

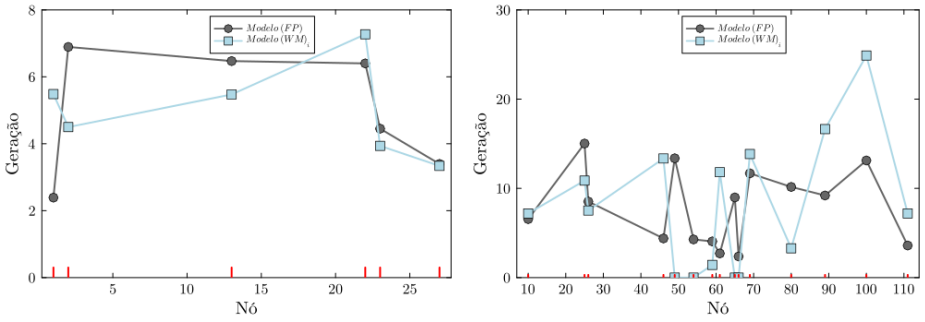
minutos. Em todas as redes, o tempo de (FP) superou o de $(\text{WM})_i$. Diante disso, os experimentos foram refeitos em outra máquina (Intel Core i7, 3,40 GHz, 16 GB RAM, Linux 14.04 LTS/64 bits). Os resultados evidenciam que o modelo $(\text{WM})_i$ apresenta vantagens significativas tanto de tempo de execução para redes de grande porte quanto para determinar um balaço de potência com a máxima potência inferior à do modelo da literatura.

| Rede | IEEE 30 | | IEEE 118 | | IEEE 300 | | IEEE 2383 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo | (FP) | $(\text{WM})_i$ | (FP) | $(\text{WM})_i$ | (FP) | $(\text{WM})_i$ | (FP) | $(\text{WM})_i$ |
| Máxima potência | 2.78 | 2.34 | 7.52 | 6.19 | 18.00 | 18.00 | 11.94 | 9.22 |
| Tempo (s) | 0.00 | 0.10 | 0.05 | 0.20 | 0.28 | 0.36 | 198.18 | 196.08 |

Tabela 1: Comparação da potência máxima nas linhas de transmissão e do tempo computacional obtido pelos modelos $(\text{WM})_i$ e (FP) para diferentes redes.

A Figura 1 mostra a distribuição das potências nas linhas (em valor absoluto) para as redes analisadas, comparando modelo (FP) e $(\text{WM})_\text{i}$. A linha horizontal tracejada (em vermelho) indica o valor (na parte superior da figura) da potência máxima observada. Observe que, com a redução da potência máxima, o modelo $(\text{WM})_\text{i}$ promove uma distribuição mais uniforme entre as linhas, tendo um papel fundamental para reduzir sobrecargas e favorecenr uma operação mais estável e eficiente da rede.

Como a distribuição de potência difere entre os modelos (FP) e $(\text{WM})_\text{i}$, espera-se que a geração nos vértices geradores também apresente variações. A Figura 2 ilustra essa situação para as redes IEEE 30 e IEEE 118. Os traços em destaque maior no eixo $x$ indicam os índices dos vértices geradores. Observa-se uma variação na geração em cada nó gerador em função do modelo adotado.



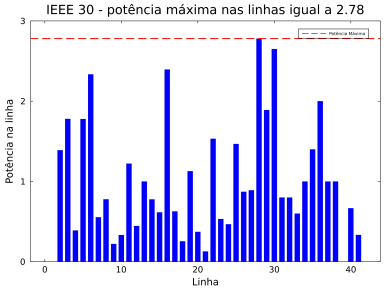

(a) Distribuição de geração da rede IEEE 30.

(b) Distribuição de geração da rede IEEE 118.

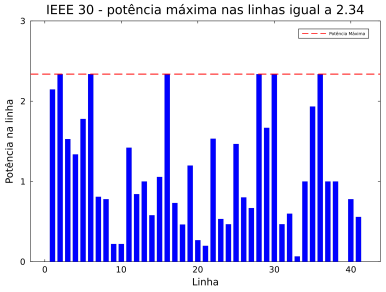
Figura 2: Distribuição de geração para as redes IEEE 30 e IEEE 118 para os modelos (FP) e $(\text{WM})_i$.

Agora utilizamos o modelo $(\text{WM})_\text{L}$ para identificar as linhas que excedem 80% da potência máxima suportada pelas linhas da rede, considerando como referência a potência limite previamente obtida com o modelo $(\text{WM})_\text{i}$. As linhas que ultrapassam esse limite são indicadas como em risco de sobrecarga. A Figura 3 apresenta os resultados para três redes analisadas, onde as linhas críticas, ou seja, aquelas com risco de sobrecarga, estão indicadas em vermelho. Por exemplo, na rede IEEE 30, oito linhas ultrapassam 80% da potência máxima de 2,34 unidades. Na IEEE 118, vinte e uma linhas excedem 80% da potência máxima de 6,19 unidades. Já na rede IEEE 300, seis linhas superam 80% da potência máxima de 18,00 unidades. O tempo computacional necessário para a execução do modelo foi de aproximadamente um segundo para a rede IEEE 30, 5 segundos para a IEEE 118 e 57 segundos para a IEEE 300. A execução para a rede IEEE 2383 foi interrompida após 6 horas

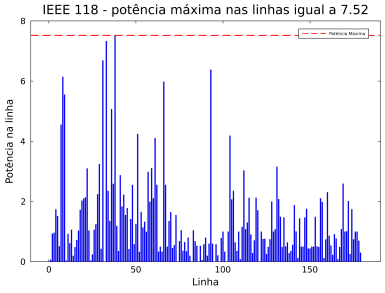
DOI: 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br



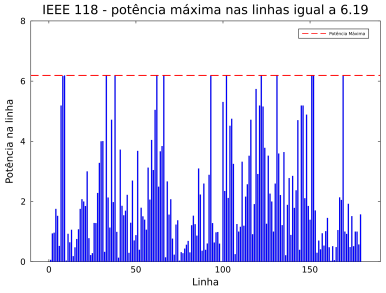

(a) Potência nas linhas IEEE 30 com (FP).



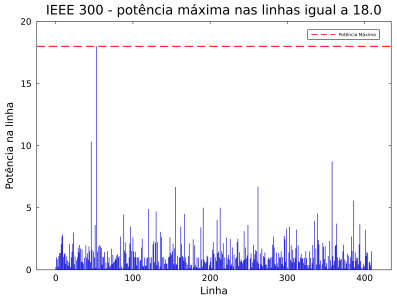

(b) Potência nas linhas IEEE 30 com $(\mathrm{WM})_i$.



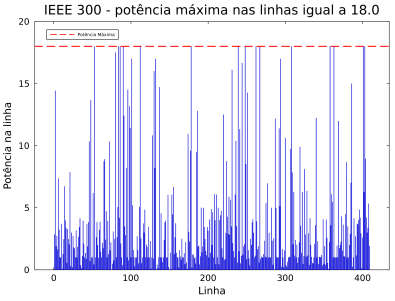

(c) Potência nas linhas IEEE 118 com (FP).



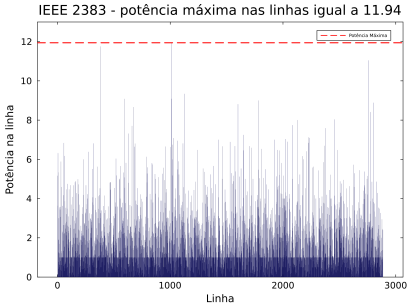

(d) Potência nas linhas IEEE 118 com $(\mathrm{WM})_i$.



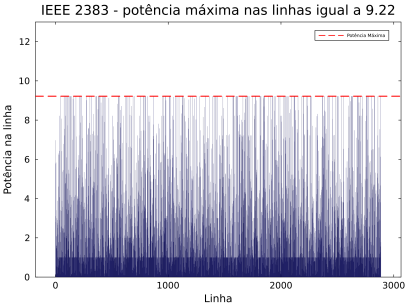

(e) Potência nas linhas IEEE 300 com (FP).




(f) Potência nas linhas IEEE 300 com $(\mathrm{WM})_i$.




(g) Potência nas linhas IEEE 2383 com (FP).



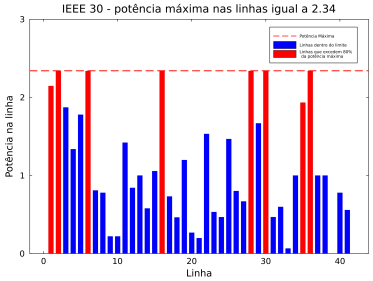

(h) Potência nas linhas IEEE 2383 com $(\mathrm{WM})_i$.

Figura 1: Distribuição de potência nas linhas da rede para os modelos $(\mathrm{QP})_B$ e $(MW)_i$.

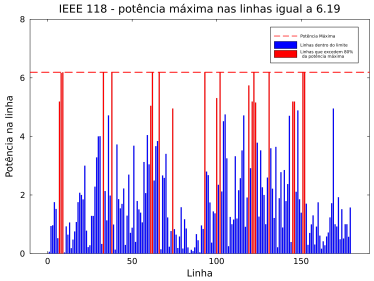
de tempo de execução devido à limitação de memória da máquina.

Nos próximos experimentos, usamos o modelo $(\mathrm{WM})_\mathrm{L}$ para analisar o impacto das limita-

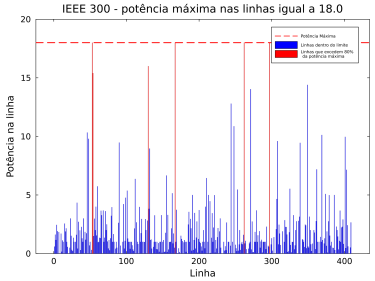
**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br




(a) Potência nas linhas da rede IEEE 30.



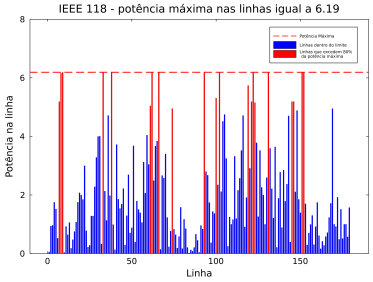

(b) Potência nas linhas da rede IEEE 118.



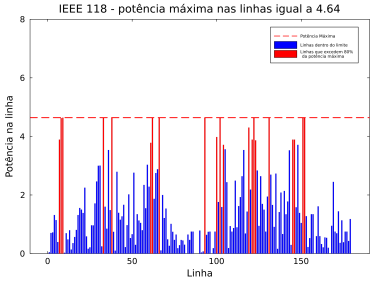

(c) Potência nas linhas da rede IEEE 300.

Figura 3: Distribuição da potência nas linhas das redes IEEE 30, IEEE 118 e IEEE 300 com identificação de linhas críticas (em vermelho) obtidas com o modelo $(WM)_L$.

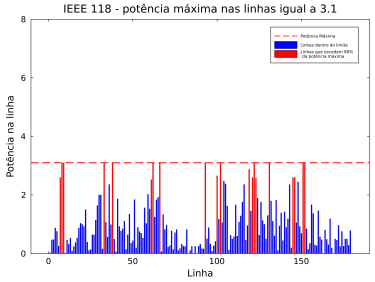
ções físicas na capacidade máxima de potência das linhas da rede. Como exemplo, consideramos a rede IEEE 118 sob restrições de 75% e 50% daquela potência máxima obtida com o modelo $(WM)_i$, conforme descrito na Tabela 1. As distribuições de potência para esses cenários estão ilustradas na Figura 4. Reportamos (na descrição textual de cada figura) a demanda não atendida representada pelo valor da variável artificial $G_a$.




(a) Potência ilimitada (potência nas linhas igual a 6,19)). $G_a = 0$.




(b) Limite de 75% (potência nas linhas igual a 4,64) $G_a = 29.49$.




(c) Limite de 50% (potência nas linhas igual a 3,10). $G_a = 58.99$.

Figura 4: Distribuição da potência nas linhas sob diferentes limites de capacidade máxima.

Os resultados indicam que, tanto com a restrição de 75% quanto com a de 50%, as mesmas linhas e a mesma quantidade tendem a permanecerem sobrecarregadas, o que evidencia a incapacidade da rede de redistribuir a potência mantendo o atendimento pleno da demanda. Observa-se ainda um aumento significativo na geração artificial ao se reduzir o limite de 75% para 50%, passando de 29,49 para 58,99 unidades, o que reforça a dificuldade de atender a carga sem violar os limites físicos das linhas. Visualmente, nota-se um achatamento vertical nos gráficos, reflexo direto das restrições impostas à capacidade das linhas, o que se traduz em maior demanda não atendida. Isso sugere a necessidade de novas linhas de transmissão para garantir a operação da rede.

O próximo experimento computacional se inspira em uma situação possível de ocorrer quando a matriz energética é diversificada, incluindo fontes hidrelétricas, usinas solares e parques eólicos. Em períodos de seca, a geração das hidrelétricas pode ser drasticamente reduzida, comprometendo o atendimento pleno da demanda. Nosso modelo $(WM)_L$ é capaz de capturar essas limitações e avaliar seus efeitos na rede de transmissão. Para ilustrar, simulamos um cenário na rede IEEE 118 com a geração limitada a 50% da capacidade máxima e as linhas operando com até 75% de sua capacidade, para a situação analisada anteriormente. A Figura 5 mostra a distribuição

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

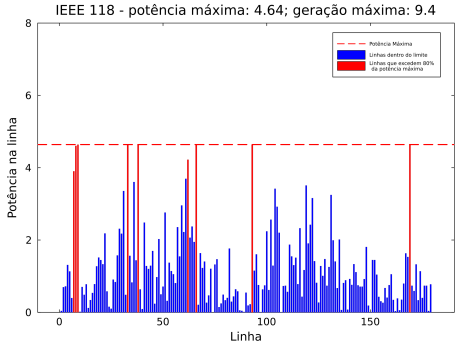



Figura 5: Distribuição da potência nas linhas para a rede IEEE 118 com limitação de potência nas linhas e de geração nos geradores.

resultante da potência nas linha da rede. Nesse cenário, a geração artificial aumenta para 31,03, enquanto o número de linhas críticas caiu para 9. Apesar da demanda não ser totalmente atendida, essa redução melhora a estabilidade da rede, diminui o risco de falhas em cascata e proporciona maior flexibilidade operacional.

Por fim, sintetizamos na Tabela 2 os principais resultados da comparação entre os modelos (FP) e (WM), no qual aglutinamos as variantes $(WM)_i$ e $(WM)_L$. Os dados permitem uma análise quantitativa do desempenho das duas abordagens nas quatro redes analisadas, com ênfase em quatro aspectos fundamentais: (1) eficácia na redução da potência máxima e na distribuição de potência nas linhas; (2) tempo computacional requerido; (3) identificação de linhas críticas sob condições operacionais restritivas; (4) capacidade de capturar situações reais e especificações operacionais.

| Rede | IEEE 30 | | IEEE 118 | | IEEE 300 | | IEEE 2383 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Modelo | (FP) | (WM) | (FP) | (WM) | (FP) | (WM) | (FP) | (WM) |
| Máxima potência | 2.78 | 2.34 | 7.52 | 6.19 | 18.00 | 18.00 | 11.94 | 9.22 |
| Tempo (s)* | 0.00 | 0.10 \| 1 | 0.05 | 0.20 \| 5 | 0.28 | 0.36 \| 57 | 198.18 | 196.08 \| - |
| N° linhas críticas | 1 | 8 | 1 | 21 | 1 | 6 | 2 | - |
| Redução | 16% | | 18% | | 0% | | 23% | |
| $G_a$** | - | - | - | 29.49 \| 58.99 | - | - | - | - |

Tabela 2: Resumo dos principais resultados.
*Tempo $(WM)_i$ | $(WM)_L$ na coluna (WM). **Demanda não atendida para limites de 75% | 50%.

## 5. Considerações Finais

Este trabalho propõe uma nova abordagem para o balanço de carga em redes elétricas, utilizando teoria espectral de grafos. Desenvolvemos um modelo matemático linear que incorpora restrições operacionais das linhas e limites de geração, fornecendo informações mais precisas sobre sobrecargas e auxiliando na tomada de decisões. Comparado aos modelos quadráticos da literatura, nossa solução apresenta limites de potência máximos iguais ou inferiores, garantindo maior eficiência e melhor distribuição de carga nas linhas.

Este estudo abre caminho para pesquisas futuras, como a análise estratégica de investimentos em novas linhas de transmissão ou expansão da capacidade das linhas existentes, assegurando o atendimento da demanda sem comprometer a rede. Essa linha de investigação pode ser estendida para redes reais, nas quais as linhas não são homogêneas - apresentando diferentes características técnicas. Nesses casos, o uso do gradiente e do laplaciano ponderado permite capturar adequadamente essa heterogeneidade estrutural. Adicionalmente, análises de sensibilidade

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br

podem avaliar o impacto de variações nos parâmetros, por exemplo, como alterações na geração em determinados nós podem afetar a criticidade das linhas. Por fim, considerando que os modelos apresentados são inteiramente determinísticos, abordagens de programação estocástica configuram uma evolução natural deste trabalho, tendo em vista a intermitência das fontes renováveis.

**Agradecimentos**

Pesquisa financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nıvel Superior - Brasil (CAPES) (Código de Financiamento 001 e Proc. 88887.858272/2023-00), pela Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Cientıfico e Tecnológico (FUNCAP) (Proc. PGP-0192-00040.01.00/22, SPU No: 10583149/2022) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientıfico e Tecnológico (Proc. CNPq 303988/2021-5, 306492/2025-3). Agradecemos também aos revisores pelos valiosos comentários construtivos.

**Referências**

Baptista, E. C., Belati, E. A., e da Costa, G. R. M. (2004). Um método primal-dual aplicado na resolução do problema de fluxo de potência ótimo. *Pesquisa Operacional*, 24(2):215–226.

Caputo, J. G., Knippel, A., e Retiere, N. (2019). Spectral analysis of load flow equations for transmission networks. *Engineering Research Express*, 1(2).

da Silva, A. G. C., de Andrade, R. C., Knippel, A., e Caputo, J.-G. (2024). Modelos matemáticos para balanceamento de carga em redes de energia com uso de teoria espectral de grafos. In *Anais do LVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO)*, Fortaleza, Brasil. Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional.

Diário do Nordeste (2024). Após prejuízos, setor de energia renovável sinaliza cautela para investir no ceará; entenda. Disponível em: https://diariodonordeste.verdesmares.com.br/negocios/apos-prejuizos-setor-de-energia-renovavel-sinaliza-cautela-para-investir-no-ceara-entenda-1.3571834.

Knippel, A., Caputo, J.-G., e Aymaz, I. (2020). Modèle de load flow et décomposition spectrale pour l'optimisation des réseaux électriques. In *Congrès Annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision*, Montpellier, France.

Newman, M. W. (2000). The laplacian spectrum of graphs. Dissertação (mestrado em matemática), University of Manitoba, Winnipeg, Canada.

Operador Nacional do Sistema Elétrico (2023). Relatório técnico sobre a ocorrência sistêmica de agosto de 2023. Disponível em: https://www.ons.org.br/RelatorioTecnico/Apagao2023.

Pereira, M. V. F., Pinto, L. M. V., e Cunha, S. H. (2002). O apagão de 2001 no brasil: Causas, consequências e lições aprendidas. *Revista Brasileira de Energia*, 12(3):45–60.

Retiere, N., Ha, D. T., e Caputo, J. G. (2020). Spectral graph analysis of the geometry of power flows in transmission networks. *Engineering Research Express*, 14(2):2736–2747.

Secretaria de Desenvolvimento Econômico do Ceará (2024). Reunião discute implantação de linhas de transmissão no ceará. Disponível em: https://www.sde.ce.gov.br/2024/04/19/reuniao-discute-implantacao-de-linhas-de-transmissao-no-ceara.

U.S. Department of Energy (1965). Northeast power failure, november 9-10, 1965. Disponível em: https://www.osti.gov/biblio/5457792.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2025-212383
https://proceedings.science/p/212383?lang=pt-br