57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

MIP-heurística para o caso discreto do problema integrado de empacotamento de peças irregulares e caminho de corte

Larissa Tebaldi Oliveira
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, Bauru
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01, Vargem Limpa, 17033-360, Bauru/SP
larissa.tebaldi@unesp.br

RESUMO

O problema integrado de empacotamento de peças irregulares em faixas e determinação do caminho mínimo de corte visa definir um plano de corte de peças irregulares, a serem cortadas a partir de placas maiores, buscando o compromisso entre a perda de material gerada durante o empacotamento e o comprimento do percurso de corte realizado pela ferramenta de corte. Neste artigo, propomos uma MIP-heurística que resolve o problema integrado considerando o caso discreto em que o empacotamento é feito através de uma grade de pontos e o corte é realizado por peças.

PALAVRAS CHAVE. Empacotamento de peças irregulares, Caminho de corte, Compromisso entre soluções.

Programação Matemática, Metaheurísticas

ABSTRACT

The integrated nesting and cutting path determination problem aims to define a layout for irregular pieces to be cut from larger objects, balancing the material loss during the packing stage and the length of the cutting path performed by the cutting tool. In this article, we propose a MIP-heuristic that solves the integrated problem considering the discrete case where packing is done through a grid of points and cutting is carried out piece by piece.

KEYWORDS. Nesting problem, Cutting path determination problem, Compromise between solutions.

Mathematical Programming, Metaheuristics

https://proceedings.science/p/212373?lang=pt-br

1. Introdução

O problema integrado de empacotamento de peças irregulares em faixa e caminho mínimo de corte consiste em investigar o compromisso entre as soluções de dois problemas bem conhecidos na literatura: o problema de empacotamento de peças irregulares em faixa, também conhecido como *nesting*, e o problema de determinação do caminho de corte. O problema de empacotamento de peças irregulares em faixa é um problema de otimização combinatória, pertencente à classe de problemas de corte e empacotamento. Ele busca determinar o posicionamento de itens menores, normalmente chamados de peças, em uma placa de altura fixa e comprimento ilimitado, com o objetivo de encontrar o *layout* de menor comprimento, garantindo que todas as peças estejam inteiramente dentro da placa e sem sobreposição. Mais detalhes podem ser encontrados em [Álvarez-Valdés et al., 2018] e [Leão et al., 2020].

Uma vez definido o posicionamento (*layout*), surge a questão adicional de como encontrar o melhor percurso de corte. Conhecido como problema de determinação do caminho de corte, este problema consiste em definir a trajetória que uma ou mais ferramentas de corte devem seguir para executar um dado *layout*. Resultados anteriores mostraram ser vantajoso resolver os problemas de empacotamento de peças irregulares em faixas e de determinação de caminho mínimo de corte de forma integrada ([Oliveira et al., 2020], [Oliveira et al., 2023]). [Oliveira et al., 2020] propuseram o primeiro modelo matemático para o caso discreto do problema integrado, porém apenas instâncias com até 6 peças foram resolvidas de forma ótima.

Neste trabalho, propomos uma MIP-heurística para a versão discreta do problema integrado, no qual o empacotamento é realizado em uma placa definida por uma malha de pontos e o corte é realizado por peças, através de um vértice qualquer das peças. No corte por peças, uma vez iniciado, a peça deve ser completamente cortada antes que se inicie o corte da próxima.

2. Método proposto

Esta MIP-heurística, denominada por BRKGA-GI, foi baseada no BRKGA (*Biased Random-Key Genetic Algorithms*) de [Gonçalves e Resende, 2011]. No BRKGA, cada solução é representada por um vetor de n chaves aleatórias, denominado cromossomo. A transformação deste vetor em uma solução do problema é feita por um decodificador, que retorna um valor único (*fitness*) representativo da solução decodificada. Nesta proposta, o cromossomo é um vetor de tamanho $3p$, divido em três partes de mesmo tamanho p, em que p é a quantidade total de peças. A primeira parte do vetor está relacionada à ordem da sequência de peças a serem posicionadas, a segunda parte representa a estratégia de empacotamento de cada peça e a terceira parte representa o vértice da peça que será utilizado no caminho de corte.

A decodificação da primeira parte do vetor das chaves é feita utilizando um vetor auxiliar com uma sequência fixa das peças. Reordenamos ambos os vetores seguindo a orientação crescente de valores do vetor de chaves aleatórias e assim temos a sequência de peças a serem empacotadas. Como mencionado, a segunda parte do vetor de chaves aleatórias representa a estratégia de empacotamento de cada peça. O empacotamento é feito utilizando a versão discreta da heurística *Bottom-Left* (BL) em que peças em uma dada sequência são alocadas, uma a uma, nas coordenadas mais à esquerda e mais abaixo possível. Em sua versão discreta, o posicionamento das peças se dá em pontos pré-definidos da placa (grade). Um ponto positivo de utilizar a BL é que ela sempre encontra um empacotamento factível para qualquer sequência de peças dada.

Utilizamos, em conjunto com a BL, uma versão alternativa em que as peças são alocadas, uma a uma, nas coordenadas mais à esquerda e mais acima possível. Chamaremos esta versão de heurística *Top-Left* (TL). Assim, o empacotamento será feito considerando uma sequência de peças, que serão alocadas à placa utilizando ou a heurística BL ou a heurística TL. Como temos apenas duas opções, se a chave aleatória for um valor entre 0 e $0,5$ utilizaremos a BL, mas se a chave aleatória for um valor entre $0,5$ e 1 utilizaremos a TL.

Para cada *layout*, é necessário determinar o menor caminho que a ferramenta de corte deve seguir para cortar as peças. Nesta versão, consideramos o corte por peças realizado através de um vértice qualquer da peça. Neste caso, a terceira parte do cromossomo é decodificada nos respectivos vértices de corte, um para cada peça. Com o vértice pré-definido pelo cromossomo, o problema de caminho de corte pode ser interpretado como um TSP (*Traveling Salesman Problem*) e obtemos o caminho de corte através do modelo de [Dantzig et al., 1954].

Ao final, teremos dois valores representativos para cada cromossomo: o comprimento do empacotamento e do caminho de corte. Esses dois valores se tornam uma única *fitness* utilizando os algoritmos de *non-dominated sorting* e *crowding distance* propostos por [Deb et al., 2002] para o *Non-dominated Sorting Genetic Algorithm* (NSGA-II).

3. Resultados computacionais

Para os testes computacionais, utilizamos seis instâncias da literatura do problema de corte e empacotamento que podem ser encontradas no endereço eletrônico do ESICUP (`https://www.euro-online.org/websites/esicup/`). Estas instâncias possuem de 3 a 9 peças (convexas e não convexas) e as dimensões das placas variam de 7×9 a 20×35. A discretização utilizada para a grade de pontos da placa foi de 1×1. O BRKGA-GI foi implementado em C/C++ e os experimentos foram realizados em um computador Intel Core i7-14700 (2.10 GHz), 28GB de RAM, Ubuntu 22.04 rodando no WSL2 e tempo limite de 720s. Para o modelo matemático do TSP foi utilizado ILOG CPLEX 22.11 com os parâmetros padrão. Os valores considerados para os parâmetros do BRKGA são: o tamanho da população é $5n$, sendo n o tamanho do cromossomo; a taxa da população elite é 20%; da população de mutantes é 25%; e a probabilidade da prole herdar um alelo do pai elite é 80%. O BRKGA-GI foi executado dez vezes com diferentes *seeds*.

O problema integrado é biobjetivo, assim não temos apenas uma única solução ótima, mas um conjunto de soluções eficientes, que juntas formam a chamada curva de pareto-ótima. As soluções eficientes, para cada instância, são apresentadas na Tabela 1, que também apresenta os resultados obtidos pelo modelo integrado de [Oliveira et al., 2020]. Cada linha apresenta uma solução eficiente. O modelo integrado utiliza a estratégia ε-restrito, em que a minimização do caminho de corte é mantida como função objetivo e o empacotamento é adicionado às restrições.

Na Tabela 1, a primeira coluna contém o nome das instâncias, enquanto as colunas 2 - 6 apresentam os resultados do modelo integrado de [Oliveira et al., 2020], sendo que na coluna 2 são apresentados os valores considerados para ε, seguido dos valores obtidos para os *layouts*, o caminho de corte (CC), o Gap (%) da solução e o tempo de execução. Por fim, as colunas 7 - 9 apresentam os resultados obtidos pelo BRKGA-GI, sendo primeiramente apresentado o comprimento do *layout*, seguido do comprimento do caminho de corte (CC) e o tempo médio das dez execuções.

Analisando a Tabela 1, observamos que o BRKGA-GI foi capaz de obter uma curva de soluções para todas as instâncias. As soluções obtidas foram muito próximas àquelas obtidas pelo modelo integrado. O método se mostrou rápido tendo utilizado, no pior caso, 370s em média para encontrar a curva de soluções. Vale destacar que o método obtém toda a curva de soluções eficientes, enquanto no método exato devemos resolver um modelo para cada valor de ε. Mesmo nos casos em que o modelo e o BRKGA-GI encontraram o mesmo comprimento do empacotamento, os layouts são diferentes e, por isso, os caminhos de corte podem ser diferentes. Embora utilizar a BL e a TL em conjunto melhorou a qualidade e diversidade dos *layouts* gerados, a BRKGA-GI ainda não é capaz de gerar alguns empacotamentos. Por fim, algumas instâncias, como a "shapes4", podem não ser biobjetivas, apresentando uma única solução que minimiza simultaneamente empacotamento e caminho de corte. Essa particularidade é atribuída às características consideradas, notadamente a altura da placa. Considerando novas dimensões para a placa conferimos uma maior flexibilidade ao processo de empacotamento, podendo estabelecer a biobjetividade da instância.

Tabela 1: Comparação entre o modelo de [Oliveira et al., 2020] e BRKGA-GI.

	Modelo					BRKGA-GI		
	ε	Layout	CC	GAP (%)	T. (s)	Layout	CC	T. Médio (s)
three	6	6	9,8	0,0	1	6	9,8	8
	7	7	8,5	0,0	16	7	8,9	
three2	10	10	16,6	15,0	3600	10	16,6	120
	11	11	15,4	58,4	3600			
three2w9	8	8	16,6	0,0	456	8	16,8	77
	9	9	15,4	53,0	3600	9	15,8	
three3	14	14	24,1	51,7	3600	14	24,5	371
	15	15	23,8	68,9	3600	15	24,4	
	16	16	26,1	75,8	3600			
three3w9	12	12	21,8	73,7	3600	12	21,9	307
	13	13	24,3	75,2	3600			
	14	14	23,4	78,5	3600			
shapes4	24	24	27,3	55,1	3600	24	27,9	20

4. Conclusão

Neste artigo apresenta uma MIP-heurística que resolve o problema integrado de empacotamento de peças irregulares em faixas e determinação do caminho mínimo de corte, considerando o caso discreto em que o empacotamento é feito através de uma grade de pontos e o corte é realizado por peças. Os resultados mostraram que a integração é vantajosa e que o método foi capaz de obter soluções em um curto tempo de execução. Como trabalho futuro, pretendemos melhorar este método e/ou propor novos métodos para resolver o problema.

5. Agradecimentos

À FAPESP (2013/25743-6, 2016/09476-6 e 2023/13087-9) e ao CNPq (402240/2023-5).

Referências

Álvarez-Valdés, R., Carravilla, M. A., e Oliveira, J. F. (2018). Cutting and packing. In *Handbook of Heuristics*, p. 1–46. Springer International Publishing.

Dantzig, G., Fulkerson, R., e Johnson, S. (1954). Solutions of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*, 2:363 – 410.

Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., e Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 6(2):182–197.

Gonçalves, J. F. e Resende, M. G. C. (2011). Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *Journal of Heuristics*, 17(5):487 – 525.

Leão, A. A., Toledo, F. M., Oliveira, J. F., Carravilla, M. A., e Alvarez-Valdés, R. (2020). Irregular packing problems: A review of mathematical models. *European Journal of Operational Research*, 282(3):803 – 822.

Oliveira, L. T., Carravilla, M. A., Oliveira, J. F., e Toledo, F. M. B. (2023). A biobjective matheuristic for the integrated solution of the irregular strip packing and the cutting path determination problems. *Pesquisa Operacional*.

Oliveira, L. T., Silva, E. F., Oliveira, J. F., e Toledo, F. M. B. (2020). Integrating irregular strip packing and cutting path determination problems: A discrete exact approach. *Computers & Industrial Engineering*, 149:106757.