

Novas Abordagens de Programação Cônica de Segunda Ordem para o Problema de Otimização de Weber Multi-Source

Marcella Braga de Assis Linhares, Nelson Maculan e Renan Pinto

Universidade Federal do Rio de Janeiro

R. Antônio Barros de Castro, 119 - Cidade Universitária - RJ, 21941-853

marcellabal@cos.ufrj.br

maculan@cos.ufrj.br

renanvp@im.ufrj.br

RESUMO

Nesta pesquisa, propomos duas novas modelagens para o *Multi-source Weber Problem* (MWP) as quais possuem relaxação contínua convexa e diferenciável, características favoráveis e que se mostraram muito relevantes quanto aos resultados computacionais nos problemas de agrupamento o qual inspirou a metodologia utilizada. Apresentamos uma proposta de extensão dessa metodologia ao *Multi-source Weber Problem* (MWP) que é uma variação do Problema de Fermat-Weber, propondo novas formulações combinando uma discretização apresentada neste trabalho e outra utilizando a técnica *DC Programming*.

PALAVRAS CHAVE. Otimização Não Linear. Modelagem Matemática. Programação Cônica de Segunda Ordem.

ONL – Otimização Não-linear, OD – Otimização Discreta, OC – Otimização Contínua.

ABSTRACT

In this research, we propose two new models for the Multi-source Weber Problem (MWP) which have convex and differentiable continuous relaxation, favorable characteristics and which have proven to be very relevant in terms of computational results in the clustering problems which inspired the methodology used. We present a proposal to extend this methodology to the Multi-source Weber Problem (MWP), which is a variation of the Fermat-Weber Problem, proposing new formulations combining a discretization presented in this work and another using the DC Programming technique.

KEYWORDS. Nonlinear Optimization. Mathematical Modeling. Second Order Conic Programming.

ONL - Nonlinear Optimization, OD - Discrete Optimization, OC - Continuous Optimization.

1. Introdução

Neste estudo, propõe-se uma extensão da metodologia empregada em modelos de agrupamento (clustering) para o *Multi-source Weber Problem* (MWP), uma variante do Problema de Fermat-Weber. São apresentadas duas novas formulações: a primeira baseia-se em uma abordagem de discretização inédita, enquanto a segunda utiliza a técnica de *DC Programming*.

Esta metodologia foi inspirada pelo trabalho de [Linhares et al., 2025], o qual constitui uma contribuição significativa ao estudo de problemas de agrupamento (clustering). O trabalho sistematiza as características fundamentais do problema, revisa modelagens clássicas da literatura e introduz novos modelos desenvolvidos nesta pesquisa. Especificamente, propõem-se novas formulações de programação não linear inteira mista para dois problemas de agrupamento: o *Unitary Weighted Weber Problem* (UWWP) e o *Minimum Sum of Squares Clustering* (MSSC), cujas relaxações contínuas apresentam propriedades de convexidade e diferenciabilidade. Os resultados experimentais demonstram a superioridade computacional dos modelos propostos em comparação com abordagens clássicas encontradas na literatura.

Assim como os problemas clássicos de agrupamento encontrados na literatura, como em [Aloise e Hansen, 2009; Chen et al., 1992], o problema de Fermat-Weber apresentado em [Chandrasekaran e Tamir, 1990] — bem como suas variações, discutidas por exemplo em [Brimberg et al., 2000; Öncan, 2013] — também possuem modelagens tradicionais com características que tornam sua resolução ainda mais desafiadora, como a não convexidade e a não diferenciabilidade.

A convexidade desempenha um papel fundamental na teoria da otimização devido às suas propriedades matemáticas vantajosas. Em particular, problemas de otimização convexa — definidos por uma função objetivo convexa e um conjunto viável convexo — apresentam características notáveis que simplificam sua resolução. Entre essas propriedades, destaca-se o fato de que todo mínimo local em um problema convexo é automaticamente um mínimo global [Boyd e Vandenberghe, 2004]. Essa garantia teórica é particularmente valiosa, pois elimina a necessidade de buscar soluções alternativas em diferentes regiões do espaço viável. Em contraste, problemas não convexos introduzem desafios significativos devido à possível existência de múltiplos mínimos locais. Quando a região viável apresenta uma topologia complexa, com numerosos ótimos locais, a otimização torna-se computacionalmente mais custosa, exigindo técnicas especializadas, como relaxações convexas, métodos estocásticos ou estratégias de globalização. É possível encontrar mais detalhes sobre este tema em [Luenberger et al., 1984; Boyd e Vandenberghe, 2004].

A diferenciabilidade constitui outra propriedade fundamental em problemas de otimização, complementando as vantagens oferecidas pela convexidade. Sua relevância reside principalmente na possibilidade de explorar técnicas baseadas em cálculo diferencial, que utilizam informações de primeira e segunda ordens — representadas respectivamente pelo gradiente e hessiana — para desenvolver algoritmos eficientes de resolução. Em particular, a existência de derivadas contínuas permite a aplicação de Métodos de otimização clássicos (gradiente descendente, Newton), critérios de otimalidade bem estabelecidos (condições de Karush-Kuhn-Tucker), estratégias de convergência acelerada em problemas não lineares. Como discutido por [Fletcher, 2000], a distinção entre problemas diferenciáveis e não-diferenciáveis é crucial, pois determina a classe de algoritmos aplicáveis e as garantias teóricas disponíveis. Enquanto funções diferenciáveis permitem o uso de técnicas baseadas em aproximações locais, problemas não-diferenciáveis frequentemente exigem abordagens alternativas, como subgradientes ou métodos de aproximação regularizada.

A metodologia usada neste trabalho tem por objetivo fazer um estudo focado na adaptação do modelo matemático com a finalidade de obtermos propriedades favoráveis que torne a resolução do problema uma tarefa possível, ainda que para instâncias pequenas, já que trabalhamos com problemas NP-difíceis [Chandrasekaran e Tamir, 1990]. Obter modelos de otimização não lineares

inteira mista em que suas relaxações contínuas são convexas e diferenciáveis além de nos permitir o uso de solvers para encontrarmos soluções, fortalece o modelo resultando em limitantes inferiores (ou superiores) mais fortes o que propicia melhores gaps para o problema.

Nosso objetivo, neste trabalho, é estender o uso da metodologia utilizada para os problemas de agrupamentos vista em [Linhares et al., 2025] e destacar o seu uso ao problema de Fermat-Weber, além de combinar com novas técnicas como a discretização em um dos modelos e a técnica DC programming. Nas seções subsequentes, apresentamos o problema de Fermat-Weber, declaramos as novas abordagens e propormos detalhadamente as duas extensões para este problema.

2. Problema de Fermat-Weber

Dado $a^i \in R^n, i \in P = \{1, 2, \dots, p\}$, o problema de otimização de Fermat-Weber (FWP) apresentado por [Weber, 1929] requer encontrar um ponto $x \in R^n$, que minimize a soma das distâncias euclidianas ponderadas a todos os pontos em P . Seja $w_i \geq 0, i \in P$, um peso associado à distância euclidiana de x ao vetor a^i .

Utilizando a definição matemática acima, é possível entender de uma forma didática que dados três pontos em um plano, por exemplo, o problema de Fermat-Weber busca encontrar um quarto ponto em que a soma das distâncias entre esse quarto ponto encontrado e os demais três pontos dados seja a menor possível, considerando os pesos associados a cada distância.

Usamos a distância euclidiana entre x e a^i que é definida:

$$\|a^i - x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k)^2}, i \in P.$$

Assim, (FWP) pode ser escrito da seguinte forma:

$$(FWP) : \min \sum_{i=1}^p w_i \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k)^2}.$$

Onde $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^\top$ é o vetor com as variáveis. O (FWP) é um problema de otimização convexo, mas não é suave.

Outra forma de representar (FWP) :

$$(FWP1) : \min \sum_{i=1}^p w_i z_i,$$

sujeito a:

$$z_i \geq \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (1)$$

Cada restrição i em (1) é conhecida como uma restrição de cone de segunda ordem, que também pode ser escrita da forma que vamos apresentar a seguir, elevando ambos lados da desigualdade ao quadrado:

$$z_i^2 \geq \sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k)^2, \quad z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (2)$$

Logo, podemos escrever:

$$(FWP2) : \min \sum_{i=1}^p w_i z_i, \quad (3)$$

sujeito a:

$$z_i^2 \geq \sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k)^2, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (4)$$

$$z_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (5)$$

Esta última formulação (FWP2) é um problema de otimização suave e convexo. Foi apresentada em [Chandrasekaran e Tamir, 1990]. No entanto, não foram obtidos resultados computacionais nele.

As restrições (4) e (5) formam um cone de segunda ordem, o que permite a aplicação de métodos de pontos interiores, como os desenvolvidos em [Xue e Ye, 1997]. Além disso, resolvidores comerciais como Xpress, Gurobi e Cplex são capazes de reconhecer automaticamente esse tipo de restrição como sendo um cone de segunda ordem.

2.1. Problema de Weber Multi-origem - Multi-source Weber Problem (MWP)

Dado $a^i \in R^n, i \in P = \{1, 2, \dots, p\}$, a posição geométrica dos clientes e q o número de instalações ou facilidades cujas localizações físicas temos de encontrar $x^j \in R^n, j = 1, 2, \dots, q$. Nós conhecemos $d_i \in R_+, i = 1, 2, \dots, p$ que é a demanda requerida pelo i -ésimo cliente e $o_j \in R_+, j = 1, 2, \dots, q$, é a máxima oferta da j -ésima facilidade. Podemos escrever o seguinte modelo para o MWP:

$$(MWP) : \min \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q w_{ij} \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k^j)^2}, \quad (6)$$

subject to:

$$\sum_{j=1}^q w_{ij} \geq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p w_{ij} \leq o_j, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (7)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (8)$$

$$x_k^j \in R, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (9)$$

Onde w_{ij} representa além da alocação de atendimento indicada por seus índices, em princípio desconhecida, representa o valor do que vai ser ofertado da j -ésima facilidade ao i -ésimo cliente, e assumimos que esse valor é diretamente proporcional à distância, ou seja esses custos de transporte envolvidos são proporcionais às distâncias correspondentes, veja [Raeisi Dehkordi, 2019].

Consideramos que

$$\sum_{i=1}^p d_i \leq \sum_{j=1}^q o_j, \quad (10)$$

assim o conjunto de restrições (7) e (8) não será vazio. O modelo (MWP) não é convexo, nem diferenciável.

O que difere este problema do problema original de Fermat-Weber é o ponto a ser encontrado, uma vez que no original buscamos encontrar uma única instalação que minimize a soma das

distâncias entre esta instalação e os clientes que são os pontos dados. Já nesta variação, o problema contém múltiplas instalações ou facilidades. A ideia é que o problema retorne a melhor localização das instalações minimizando as distâncias entre os clientes e suas respectivas facilidades que lhes atendem, levando em consideração a demanda, a oferta e o peso w_{ij} que corresponde a um valor diretamente proporcional à distância.

2.2. Formulação usando DC Programming - DC-Multi-source Weber Problem (DC-MWP)

Na área de otimização não convexa, a programação DC tem um papel relevante devido às suas características teóricas, além de sua ampla variedade de aplicações. Se uma função puder ser representada como a diferença de duas funções convexas, ela é designada por ser DC. Os problemas matemáticos de programação que envolvem funções DC são conhecidos como problemas de programação DC.

Na subseção anterior, mostramos o Problema de Weber Multi-origem e uma modelagem que é não convexa para ele. Na tentativa de contornar esta não convexidade, vamos usar uma modelagem baseada em Programação DC a seguir:

Uma vez que $w_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, q$ também podemos escrever (6) da seguinte forma:

$$(MWP) : \min \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q w_{ij} z_{ij}, \quad (11)$$

sujeito a:

$$z_{ij} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k^j)^2}, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q. \quad (12)$$

(12) será substituído por:

$$z_{ij}^2 \geq \sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k^j)^2, z_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q. \quad (13)$$

Nós definimos

$$w_{ij} = t_{ij} - v_{ij}, z_{ij} = t_{ij} + v_{ij}, t_{ij} \in R, v_{ij} \in R, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q.$$

$$\text{Então, } w_{ij} z_{ij} = t_{ij}^2 - v_{ij}^2, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q.$$

$$(DC : MWP) : \min \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q (t_{ij}^2 - v_{ij}^2), \quad (14)$$

sujeito a:

$$w_{ij} = t_{ij} - v_{ij}, z_{ij} = t_{ij} + v_{ij}, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q, \quad (15)$$

$$z_{ij}^2 \geq \sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k^j)^2, z_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q, \quad (16)$$

$$t_{ij} \in R, v_{ij} \in R, i = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, q, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^q w_{ij} \geq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p w_{ij} \leq o_j, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (18)$$

$$w_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (19)$$

$$x_k^j \in R, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (20)$$

Minimizamos a diferença de duas funções convexas, essa técnica é conhecida como programação DC num conjunto convexo, veja [Phong, 1994], ($DC : MWP$) pode ser resolvido utilizando técnicas branch-and-bound, [An e Tao, 1998].

2.3. Problema de Weber Multi-origem Discreto - Discrete Multi-source Weber Problem (DMWP)

Propomos outra abordagem, o Problema de Weber Multi-origem Discreto ($DMWP$). Mantemos a notação utilizada anteriormente, mas adotamos uma abordagem diferente: discretizar os valores de w_{ij} . Para isso, definimos um conjunto S_i contendo os valores possíveis para w_{ij} , variando de 0 até d_i , que representa a demanda. Vamos definir para cada $i = 1, 2, \dots, p$, e $\forall j$, $w_{ij} \in S_i = \{s_1^i, s_2^i, \dots, d_i\}$, em que $s_1^i = 0 < s_2^i < s_3^i < \dots < s_{|S_i|}^i = d_i$.

Consideramos

$$M = \max_{1 \leq i < j \leq p} \|a^i - a^j\|_2.$$

De (6):

$$w_{ij} \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k^j)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n w_{ij}^2 (a_k^i - x_k^j)^2} \quad (21)$$

Definimos $t_{ijk} = w_{ij}(a_k^i - x_k^j)$. Poderemos escrever:

$$t_{ijk} \geq -M(1 - y_{ijl}) + s_l^i(a_k^i - x_k^j), \quad l = 1, \dots, |S_i|, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad (22)$$

$$t_{ijk} \leq s_l^i(a_k^i - x_k^j) + M(1 - y_{ijl}), \quad l = 1, \dots, |S_i|, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad (23)$$

$$\sum_{l=1}^{|S_i|} y_{ijl} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (24)$$

$$y_{ijl} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad l = 1, 2, \dots, |S_i|, \quad (25)$$

$$w_{ij} = \sum_{l=1}^{|S_i|} s_l^i y_{ijl}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad l = 1, 2, \dots, |S_i|, \quad (26)$$

$$\sum_{j=1}^q w_{ij} \geq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p w_{ij} \leq o_j, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (27)$$

De (21), (22), (23), (24), (25):

$$w_{ij} \sqrt{\sum_{k=1}^n (a_k^i - x_k^j)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n w_{ij}^2 (a_k^i - x_k^j)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n t_{ijk}^2}.$$

Assim, podemos escrever:

$$(DMWP) : \min \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q z_{ij}, \quad (28)$$

sujeito a: (22), (23), (24), (25), (26), (27), e

$$z_{ij} \geq \sqrt{\sum_{k=1}^n t_{ijk}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (29)$$

Restrições (29) podem ser substituídas por:

$$z_{ij}^2 \geq \sum_{k=1}^n t_{ijk}^2, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (30)$$

$$z_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (31)$$

$$x_k^j \in R, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (32)$$

Como vimos acima, as restrições (30), (31) formam um cone de segunda ordem [Xue e Ye, 1997].

Finalmente, apresentaremos um novo modelo de otimização cuja relaxação contínua é um problema de otimização convexo e suave, que visamos resolver usando solvers como Xpress, Gurobi, Cplex:

$$(DMWP) : \min \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q z_{ij}, \quad (33)$$

Sujeito a:

$$t_{ijk} \geq -M(1 - y_{ijl}) + s_l^i(a_k^i - x_k^j), \quad l = 1, \dots, |S_i|, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad (34)$$

$$t_{ijk} \leq s_l^i(a_k^i - x_k^j) + M(1 - y_{ijl}), \quad l = 1, \dots, |S_i|, \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q, \quad (35)$$

$$\sum_{l=1}^{|S_i|} y_{ijl} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (36)$$

$$y_{ijl} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad l = 1, 2, \dots, |S_i|, \quad (37)$$

$$w_{ij} = \sum_{j=1}^p s_l^i y_{ijl}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad l = 1, 2, \dots, |S_i|, \quad (38)$$

$$\sum_{j=1}^q w_{ij} \geq d_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad \sum_{i=1}^p w_{ij} \leq o_j, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (39)$$

$$z_{ij}^2 \geq \sum_{k=1}^n t_{ijk}^2, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (40)$$

$$z_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (41)$$

$$x_k^j \in R, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (42)$$

Note que para que o problema de otimização (*DMWP*) tenha uma solução, garantimos que: $\sum_{j=1}^q o_j \geq \sum_{i=1}^p d_i$.

3. Conclusão

Neste trabalho, propusemos uma extensão metodológica inovadora para o Multi-source Weber Problem (MWP), uma variante do clássico Problema de Fermat-Weber. Apresentamos duas novas formulações não lineares inteiras mistas, sendo uma baseada em discretização e outra na técnica de DC Programming, ambas com relaxações contínuas convexas e diferenciáveis, propriedades que, conforme discutido, são fundamentais para a eficiência e robustez na resolução de problemas de otimização complexos. Nossa contribuição nos direciona a preservação de propriedades matemáticas desejáveis (convexidade e diferenciabilidade) no desenvolvimento dos modelos que leva ao fortalecimento dos limitantes através das relaxações contínuas e possível superação de desafios computacionais inerentes a problemas NP-difíceis. Os princípios metodológicos aqui desenvolvidos oferecem base teórica sólida para investigações futuras em otimização não linear, abre novas perspectivas para extensões na modelagem matemática, além de expandir novos horizontes para a resolução de problemas por meio de experimentos computacionais.

4. Agradecimentos

Esta pesquisa foi parcialmente apoiada pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (23079.227622/2023-70), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq (302435/2019) e Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro - FAPERJ (E-26/201.341/2022).

Referências

- Aloise, D. e Hansen, P. (2009). A branch-and-cut sdp-based algorithm for minimum sum-of-squares clustering. *Pesquisa Operacional*, 29(3):503–516.
- An, L. T. H. e Tao, P. D. (1998). A branch and bound method via d.c. optimization algorithms and ellipsoidal technique for box constrained nonconvex quadratic problems. *Journal of Global Optimization*, 13:171–206.

- Boyd, S. P. e Vandenberghe, L. (2004). *Convex optimization*. Cambridge university press.
- Brimberg, J., Hansen, P., Mladenović, N., e Taillard, E. D. (2000). Improvements and comparison of heuristics for solving the uncapacitated multisource weber problem. *Operations research*, 48 (3):444–460.
- Chandrasekaran, R. e Tamir, A. (1990). Algebraic optimization Fermat—Weber location problem. *Mathematical Programming*, 46:219–224.
- Chen, P.-C., Hansen, P., Jaumard, B., e Tuy, H. (1992). Weber’s problem with attraction and repulsion. *Journal of Regional Science*, 32(4):467–486.
- Fletcher, R. (2000). *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons.
- Linhares, M. B. d. A., Pinto, R. V., Maculan, N., e Negreiros, M. (2025). Second-order cone programming models for the unitary weighted weber problem and for the minimum sum of the squares clustering problem. *International Transactions in Operational Research*, 32(2):961–972.
- Luenberger, D. G., Ye, Y., et al. (1984). *Linear and nonlinear programming*, volume 2. Springer.
- Öncan, T. (2013). Heuristics for the single source capacitated multi-facility weber problem. *Computers & Industrial Engineering*, 64(4):959–971.
- Phong, T. Q. (1994). An algorithm for solving general D.C. programming problems. *Operations Research Letters*, 15(2):73–79.
- Raeisi Dehkordi, A. (2019). The optimal solution set of the multi-source Weber problem. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 45:495–514.
- Weber, A. (1929). *Über den Standort der Industrien (1909) - English translation: The Theory of the Location of Industries*. Chicago, Chicago University Press.
- Xue, G. e Ye, Y. (1997). An efficient algorithm for minimizing a sum of euclidean norms with applications. *SIAM Journal on Optimization*, 4(7):1017–1036.