

## FORMULAÇÕES PARA O PROBLEMA DE COBERTURA DE $p$ -HUBS NÃO CAPACITADO MULTIMODAL COM ALOCAÇÃO ÚNICA

**Leonardo Correa Cardoso**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET - MG)  
Av. Amazonas, 7675 - Nova Gameleira, Belo Horizonte - MG - Brasil  
lccardoso13@gmail.com

**Elisangela Martins de Sá**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET - MG)  
Av. Amazonas, 7675 - Nova Gameleira, Belo Horizonte - MG - Brasil  
elisangelamartins@cefetmg.br

**Sérgio Ricardo de Souza**

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET - MG)  
Av. Amazonas, 7675 - Nova Gameleira, Belo Horizonte - MG - Brasil  
sergio@cefetmg.br

### RESUMO

O problema de cobertura de  $p$ -hubs não capacitado multimodal com alocação única (MMSANCpHCP) consiste em um problema de otimização que tem, como objetivo, selecionar nós para serem *hubs*, dentre um conjunto de nós disponíveis, e otimizar a alocação dos não *hubs* aos *hubs*. O objetivo é minimizar o custo de transporte na rede, o custo fixo de instalação dos *hubs* e o custo operacional dos *links* de transporte entre *hubs*, considerando múltiplos modos de transporte. Este artigo propõe duas formulações para o MMSANCpHCP e avalia o desempenho dessas formulações utilizando o conjunto de dados do *Australian Post* (AP) por meio do solucionador IBM CPLEX. Os resultados dos experimentos computacionais mostram a importância de analisar e selecionar a formulação adequada, mostrando o impacto no desempenho computacional.

**PALAVRAS CHAVE.** Localização de *Hubs*. Transporte multimodal. Alocação única. Problema de Cobertura.

### ABSTRACT

The multimodal uncapacitated  $p$ -Hub coverage problem with single allocation (MMSANCpHCP) is an optimization problem that aims to select nodes to be hubs, from a set of available nodes, and optimize the allocation of non-hubs to hubs. The goal is to minimize the cost of transport in the network, the fixed cost of installing the hubs and the operating cost of the transport links between hubs, considering multiple modes of transport. In this paper, we propose two formulations for the MMSANCpHCP and evaluate the performance of both formulations using the Australian Post (AP) dataset using IBM CPLEX software. The results of computational experiments show the importance of analyzing and selecting the appropriate formulation, showing the impact on computational performance.

**KEYWORDS.** Hub location. Multimodal transportation. Single allocation. Covering Problem.

## 1. Introdução

Problemas de Cobertura de  $p$ -Hub não Capacitado com Alocação Única Multimodal (MM-SANCpHCP - *Multimodal Single Allocation Non Capacitated  $p$ -Hub Covering Problem*) são problemas de otimização combinatória que têm, como objetivo, identificar *hubs*, dentro de um conjunto de nós disponíveis, e otimizar a alocação destes nós a *hubs*, de modo a minimizar o custo de transporte entre esses nós, o custo fixo de instalação dos *hubs* e o custo operacional dos *links* de transporte entre *hubs*, considerando múltiplos modos de transporte.

Diversos trabalhos de localização de *hubs* são encontrados na literatura. A formulação inicial para este problema foi introduzida inicialmente por O'Kelly [1986]. Posteriormente e baseado nesse artigo, O'Kelly [1987] apresentou o Problema de Localização de *hubs* com formulação quadrática inteira. Este avanço serviu como um marco para a definição dos Problemas de Localização de *hubs* como um problema de otimização.

Mais tarde, Campbell [1994] introduziu classificações para os Problemas de Localização de *hubs* (PLH), sendo apresentadas formulações de programação inteira para o problema de  $p$ -hub mediana; problema de *hub* não capacitado; problema de  $p$ -hub centro; e problema de cobertura de *hub*. Marianov et al. [1999] apresentaram o primeiro modelo de um problema de localização competitiva de *hubs*, trazendo uma nova abordagem para a concorrência entre empresas que utilizam redes de *hubs*.

Aykin [1994] apresentou abordagens baseadas em relaxação lagrangeana para o problema de projeto de rede de *hub* capacitados. Klinecicz [1998] apresentam uma revisão sobre localização de *hubs* para projetos de redes *backbone*/tributárias, telecomunicações e sistemas de computadores, mostrando, assim, a possibilidade de aplicação de localização de *hubs* a outros domínios além do transporte. Por fim, O'Kelly e Bryan [1998] destacaram a questão dos custos independentes do fluxo e propuseram uma função de custo não linear, que assume que os custos aumentam a uma taxa decrescente à medida que os fluxos aumentam.

A partir de década de 2000 há uma expansão da pesquisa de localização de *hubs*. Kara e Tansel [2000] propuseram várias formulações lineares para o problema de  $p$ -hub centro. Ernst e Krishnamoorthy [1999] apresentaram uma aplicação para o problema capacitado com alocação única a um problema de entrega postal. Ebery et al. [2000] apresentam uma versão para o problema de alocação múltipla de *hubs* capacitados. Posteriormente, Alumur e Kara [2008] apresentaram uma revisão abrangente dos problemas de localização de *hubs* em rede, resumindo a literatura existente e destacando direções futuras de pesquisa

Trabalhos mais recentes, por sua vez, introduziram aplicações multimodais para problemas de localização de *hubs*. Alumur et al. [2012] propuseram um problema de localização de *hubs* multimodal, que considerava conjuntamente custos de transporte e tempos de viagem, bem como introduziram o problema de projeto de rede de *hubs* incompleta com alocação única. Ishfaq e Sox [2011] estenderam o modelo de  $p$ -hub mediana para incluir diferentes modos de transporte, custos de conectividade modal e requisitos de tempo de serviço. Já Nickel et al. [2016] discutiu o problema de localização de *hubs* capacitado em redes de *hubs* multimodais totalmente interconectadas. Ghaffarinasab et al. [2018] são apresentadas abordagens de solução eficientes baseadas na metaheurística *Simulated Annealing* para os problemas de localização de *hubs* competitivos com alocação única e múltipla. Em Alumur et al. [2018] é apresentado o problema de localização de *hubs* com alocação múltipla e restrição de tempo de serviço e congestionamento. Mais recentemente, Ghaffarinasab [2020] aborda o problema de  $p$ -hub centro de alocação múltipla não capacitado (UMApHCP), propondo um algoritmo de decomposição de Benders capaz de resolver instâncias de grandes dimensões.

No entanto, como a revisão literária acima aponta, o MMSANCpHCP é um problema

ainda pouco explorado na literatura. Este trabalho, assim, traz uma nova contribuição para seu melhor entendimento, apresentando duas formulações que permitem a utilização de múltiplos modos de transporte, considerando restrições de cobertura baseadas em tempo e alocação única. Embora existam formulações similares para problemas de localização de *hubs* multimodais, as aqui apresentadas se diferenciam por integrar essas características específicas em um único modelo, representando um avanço em relação aos modelos existentes. Além disso, é realizada uma análise comparativa do desempenho computacional das formulações propostas, reforçando a relevância prática da escolha adequada da modelagem matemática e computacional.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 apresenta as formulações matemática para o problema. A Seção 3 apresenta os resultados dos experimentos computacionais realizados para ambas as formulações, fazendo uma análise detalhada dos dados obtidos. Por fim, a Seção 4 apresenta as conclusões e propostas para trabalhos futuros.

## 2. Modelo Matemático

Nesta seção é apresentada a formulação matemática para o MMSANCpHCP. Este problema tem, como objetivo, selecionar *hubs* em um conjunto de nós disponíveis e otimizar a alocação destes nós aos *hubs* selecionados. O objetivo do problema é minimizar o custo de transporte entre esses nós, o custo fixo de instalação dos *hubs* e o custo operacional dos *links* de transporte entre *hubs*, considerando múltiplos modos de transporte.

O problema tem as seguintes características:

- (i) Cada nó não *hub* é alocado a um único *hub*;
- (ii) Deve-se garantir a cobertura dos fluxos, da seguinte forma. O tempo de deslocamento do fluxo do nó  $i$  para o nó  $j$  via *hubs*  $k$  e  $l$  através do modo  $m$  não pode exceder um tempo predeterminado, representado por  $\beta$ . Neste caso, o par de origem e destino  $(i, j)$  é coberto pelos *hubs*  $k$  e  $l$ ;
- (iii) Deve-se selecionar quais modos de transporte podem ser usados para cada conexão entre *hubs*.

O restante da seção está organizado como segue: a Subseção 2.1 apresenta a notação adotada. As Subseções 2.2 e 2.3 introduzem as duas formulações propostas para o MMSANCpHCP. A primeira formulação, mostrada na Subseção 2.2, é mais compacta, possuindo menos restrições. Nesta formulação, as restrições de acoplamento entre as variáveis de fluxo e de localização e ativação de modos são agregadas, considerando vários nós de origem e destino. A segunda formulação, mostrada na Subseção 2.3, representa as restrições de acoplamento de forma desagregada para cada par de origem e destino.

### 2.1. Notação e formulação matemática

As formulações propostas utilizam os seguintes conjuntos:

- $N$  : é o conjunto de nós;
- $K \subseteq N$  : é o conjunto de nós candidatos a *hub*;
- $M$ : é conjunto de modos de transportes entre os *hubs*.

Além disso, são definidos os seguintes parâmetros:

- $n$ : representa o número de nós;
- $w_{ij}$  : é o fluxo que deve ser roteado do nó de origem  $i$  para o nó de destino  $j$ ;

- $o_i$  : representa o fluxo total originado no nó  $i$ . Assim,  $o_i$  é dado por:

$$o_i = \sum_{j=1}^n w_{ij}.$$

- $d_i$  : representa o fluxo total destinado ao nó  $i$ . Assim,  $d_i$  é dado por:

$$d_i = \sum_{j=1}^n w_{ji}.$$

- $\alpha^m \in [0,1]$ : é o fator de desconto no custo de transporte usando conexão entre *hubs* para representar economia de escala utilizando o modo de transporte  $m$ ;
- $\theta^m \in [0,1]$ : fator de desconto para o tempo de deslocamento no *link hub* a *hub* utilizando o modo de transporte  $m$ ;
- $\beta$  : é tempo limite para transporte do fluxo entre cada par de nó origem e destino;
- $f_k^m$ : é o custo fixo de instalação de um *hub* no nó  $k$  para usar o modo de transporte  $m$ ;
- $c_{ik}$ : é o custo unitário de transporte entre o nó  $i$  e o nó  $k$ . Caso ambos os nós sejam *hubs* e o transporte utiliza o modo  $m$ , é aplicado um fator de desconto  $\alpha^m$  para representar a economia de escala. Assim, o custo de transporte do fluxo do nó  $i$  para o nó  $j$  passando pelo caminho  $i - k - l - j$  usando o modo de transporte  $m$  na conexão entre os  $k$  e  $l$  é dado por:

$$c_{ijkl}^m = c_{ik} + \alpha^m c_{kl} + c_{lj}.$$

- $t_{ik}$  : tempo de transporte entre o nó  $i$  e o nó  $k$ . Caso ambos os nós sejam *hubs* é utilizado o modo de transporte  $m$ , sendo aplicado um fator de desconto  $\theta^m$  para representar a economia de escala. Assim, o tempo de transporte do fluxo do nó  $i$  para o nó  $j$  passando pelo caminho  $i - k - l - j$  usando o modo de transporte  $m$  na conexão entre os  $k$  e  $l$  é dado por :

$$t_{ijkl}^m = t_{ik} + \theta^m t_{kl} + t_{lj}.$$

- $p$  : representa o número de *hubs* instalados;
- $v_{ijkl}^m$  é a matriz de cobertura, sendo  $v_{ijkl}^m = 1$  se  $t_{ijkl}^m \leq \beta$ , e se houver fluxo do nó  $i$  para o nó  $j$  por meio dos *hubs*  $k$  e  $l$  usando o modo de transporte  $m \in M$ ; 0 caso contrário;

As variáveis de decisão do modelo são apresentadas a seguir:

- $z_{ik}$  é uma variável binária de alocação do nó não *hub*  $i$  para o nó  $k$ , em que  $z_{ik} = 1$  se o nó não *hub*  $i$  é alocado ao *hub*  $k$ ; e 0, caso contrário. Além disso,  $z_{kk}$  indica se é instalado um *hub* no nó  $k$  ou não;
- $h_k^m$  é uma variável binária que indica se é feita a ativação do modo de transporte  $m$  no *hub* no nó  $k$  ( $h_k^m = 1$ ) ou não ( $h_k^m = 0$ ).
- $x_{ijkl}^m$  é uma variável binária, que será igual a 1 caso exista fluxo entre os nós  $i$  e  $j$  via *hubs*  $k$  e  $l$  através do modo  $m$ ; 0, caso contrário.

## 2.2. Formulação agregada

Esta subseção apresenta a formulação matemática agregada para o MMSANCPHCP. O modelo busca minimizar os custos totais, abrangendo tanto o roteamento de fluxos entre pares origem-destino quanto a instalação de *hubs* e o modo de transporte utilizado. A formulação agregada é dada por:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{l \in K} \sum_{m \in M} w_{ij}(c_{ik} + \alpha^m c_{kl} + c_{lj}) x_{iklj}^m + \sum_{k \in K} \sum_{m \in M} f_k^m h_k^m \quad (1)$$

$$\text{s.a.} \sum_k z_{kk} = p \quad (2)$$

$$\sum_k z_{ik} = 1 \quad \forall i \quad (3)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad \forall i, k \quad (4)$$

$$h_k^m \leq z_{kk} \quad \forall k, m \quad (5)$$

$$\sum_k \sum_l \sum_m v_{ijkl}^m x_{ijkl}^m \geq 1 \quad \forall i, j \neq i \quad (6)$$

$$\sum_j \sum_l \sum_m (w_{ij} x_{ijkl}^m + w_{ji} x_{jilk}^m) = (o_i + d_i) z_{ik} \quad \forall i, k \quad (7)$$

$$\sum_i \sum_j \left( x_{ijkk}^m + \sum_{l: l \neq k} (x_{ijkl}^m + x_{ijlk}^m) \right) \leq (n^2) h_k^m \quad \forall k, m \quad (8)$$

$$x_{ijkl}^m \geq 0 \quad \forall i, j, k, l, m \quad (9)$$

$$z_{ik} \in 0,1 \quad \forall i, k \quad (10)$$

$$h_k^m \in 0,1 \quad \forall k, m \quad (11)$$

Nesta formulação, a função objetivo (1) minimiza o custo global, que consiste em duas partes: o custo de roteamento do fluxo na rede e o custo de instalação dos modos de transporte nos *hubs*. A restrição (2) determina o número de *hubs* necessários. As restrições (3) e (4) garantem que cada nó de demanda é alocado a exatamente um *hub* e que só podem ser alocados a nós que são *hubs*. As restrições (5) permitem estabelecer e operar modos de transporte apenas em nós que são *hubs*. As restrições (6) garantem que o tempo de transporte entre cada par origem-destino não exceda o limite de tempo. As restrições (7) modelam a conservação de fluxo no nó  $k$  para os fluxos originados no nó  $i$ , permitindo tais fluxos apenas se o nó  $i$  for alocado a  $k$ . As restrições (8) garantem que o roteamento de fluxo em cada *hub* utilize apenas modos de transporte estabelecidos nele. Por fim, as restrições (9), (10) e (11) definem o domínio das variáveis de fluxo.

## 2.3. Formulação desagregada

Esta subseção introduz uma formulação desagregada alternativa para o mesmo problema, com restrições adicionais que refinam o controle sobre o fluxo entre *hubs* e nós não *hubs*. A formulação desagregada é dada por:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} \sum_{l \in K} \sum_{m \in M} w_{ij}(c_{ik} + \alpha^m c_{kl} + c_{lj}) x_{iklj}^m + \sum_{k \in K} \sum_{m \in M} f_k^m h_k^m \quad (12)$$

$$\text{s.a.} \sum_k z_{kk} = p \quad (13)$$

$$\sum_k z_{ik} = 1 \quad \forall i \quad (14)$$

$$z_{ik} \leq z_{kk} \quad \forall i, k \quad (15)$$

$$h_k^m \leq z_{kk} \quad \forall k, m \quad (16)$$

$$\sum_k \sum_l \sum_m v_{ijkl}^m x_{ijkl}^m \geq 1 \quad \forall i, j \neq i \quad (17)$$

$$\sum_l \sum_m x_{ijkl}^m \leq z_{ik} \quad \forall i, j, k \quad (18)$$

$$\sum_k \sum_m x_{ijkl}^m \leq z_{jl} \quad \forall i, j, l \quad (19)$$

$$\sum_l x_{ijkl}^m \leq h_k^m \quad \forall i, j, k, m \quad (20)$$

$$\sum_k x_{ijkl}^m \leq h_l^m \quad \forall i, j, l, m \quad (21)$$

$$x_{ijkl}^m \geq 0 \quad \forall i, j, k, l, m \quad (22)$$

$$z_{ik} \in 0,1 \quad \forall i, k \quad (23)$$

$$h_k^m \in 0,1 \quad \forall k, m \quad (24)$$

Nesta formulação, a função objetivo (12) minimiza o mesmo custo global da formulação agregada. As restrições (13)-(17) são equivalentes às restrições (2)-(6) da formulação agregada. As restrições (18) e (19) garantem que o fluxo entre um par origem-destino  $(i, j)$  só pode passar por *hubs*  $k$  e  $l$  se  $i$  estiver alocado a  $k$  e  $j$  estiver alocado a  $l$ , respectivamente. As restrições (20) e (21) asseguram que o fluxo só pode usar modos de transporte  $m$  em *hubs*  $k$  e  $l$  se esses modos estiverem ativados nesses *hubs*. Finalmente, as restrições (22), (23) e (24) definem o domínio das variáveis de fluxo.

### 3. Experimentos Computacionais

Esta seção descreve os experimentos computacionais realizados e apresenta seus resultados. A Seção 3.1 mostra a configuração dos experimentos. Já a Seção 3.2 apresenta uma análise dos resultados encontrados.

#### 3.1. Configuração dos experimentos

Esta seção apresenta os experimentos computacionais realizados para avaliar o desempenho das formulações agregada e desagregada para o MMSANCpHCP, introduzidas nas Seções 2.2 e 2.3, respectivamente. Foram considerados diferentes cenários de teste, variando o número de nós e *hubs*, a fim de analisar a eficiência de cada abordagem.

Os testes foram conduzidos em um ambiente computacional com processador Intel(R) Core(TM) i5-9300H CPU @ 2.40GHz, 24 GB de RAM, no sistema operacional Windows 10. Para comparar as formulações agregada e desagregada, os modelos foram implementados usando a biblioteca Concert Technology em C++ e resolvidos através do *solver* IBM ILOG CPLEX 20.1.

Foram utilizados os conjuntos de dados *Australian Post* (AP), proposto por Ernst e Krishnamoorthy [1996], que é derivado de uma aplicação real em uma rede de distribuição postal. Os testes foram feitos para os conjuntos de nós de tamanho  $n = 10$  e  $n = 20$ . Uma característica importante para este conjunto de dados é que suas matrizes não são simétricas, ou seja,  $w_{ij} \neq w_{ji}$  e  $w_{ii} \neq 0$ . Cabe ainda ressaltar que os dados AP possuem dois tipos de custo fixo para a instalação dos nós classificados como  $L$  e  $T$  e o tempo limite para o fluxo entre os nós  $i$  e  $j$  é representado por  $\beta = 120$ .

O experimento computacional aqui apresentado considera a utilização de três modos de transporte para a conexão entre *hubs*, ou seja, os modos ferroviário, rodoviário e aéreo, com o custo

por unidade de transporte  $[0,5; 20; 100]$  e tempo por unidade de transporte igual a  $[17; 10; 5]$ , respectivamente. Assim, para o transporte ferroviário, há um custo relativamente mais barato, mas o tempo é superior ao dos demais meios de transporte. Devido à escassez de estudos específicos na literatura que tratem de problemas de localização de *hubs* multimodais, os parâmetros de custo e tempo atribuídos a cada modo de transporte foram definidos de forma empírica pelos autores, com base em características gerais observadas. Essa abordagem visa representar de maneira simplificada, porém realista, as diferenças inerentes a cada meio de transporte no contexto da modelagem proposta.

### 3.2. Análise dos resultados

Inicialmente foi feita uma análise comparativa entre as abordagens unimodais e a multimodal. Essa análise foi realizada utilizando a instância 10L com 4 *hubs*, conforme apresentado na Tabela 1. Observa-se que a utilização exclusiva de um único modo de transporte resultou em soluções inviáveis para dois dos três modos testados, evidenciando a limitação das abordagens unimodais diante de restrições de tempo mais severas. Para o transporte aéreo (modo 3), obteve-se uma solução viável; no entanto, ao compará-la com a solução obtida pelo modelo multimodal, verificou-se que esta última gera uma redução de custo de aproximadamente 4,2%, ressaltando as vantagens da flexibilidade modal.

Tabela 1: Análise Abordagem Unimodal  $\times$  Multimodal

| Inst. | Nº <i>hubs</i> | Ferrovário | Terrestre  | Aéreo   | Multimodal |
|-------|----------------|------------|------------|---------|------------|
| 10L   | 4              | Infactível | Infactível | 11591,4 | 11104,4    |

Além disso, os experimentos computacionais realizados demonstraram diferenças significativas no desempenho das formulações desagregada (FD) e agregada (FA). As Tabelas 2 e 3 apresentam, na primeira coluna, a instância utilizada; na segunda coluna, o número de *hubs* selecionados; a terceira coluna mostra o valor de função objetivo encontrado pelo *solver* CPLEX quando soluciona a instância indicada; a quarta e a quinta colunas apresentam o tempo computacional gasto para a obtenção da solução ótima para as formulações desagregadas e agregadas, respectivamente; a sexta coluna apresenta quais os *hubs* foram selecionados; e, por fim, a sétima coluna apresenta quais modos de transporte foram utilizados nas conexões entre *hubs*.

Observa-se que a formulação desagregada apresentou tempos de resolução consistentemente menores em todas as instâncias testadas, sendo, em média, cinco vezes mais rápida que a formulação agregada para instâncias com 10 nós e quatro vezes mais rápida para instâncias com 20 nós.

A análise das soluções ótimas revelou padrões interessantes na seleção de modos de transporte. Em aproximadamente 75% dos casos testados, o modo ferroviário (modo 1) foi predominante nas conexões inter-*hubs*, devido ao seu menor custo operacional, apesar do maior tempo de transporte. No entanto, em situações em que o limite de tempo  $\beta$  esteve próximo de ser violado, os modos mais rápidos (rodoviário e aéreo) foram ativados seletivamente, como evidenciado na rede ótima referente à instância 10L com 4 *hubs*.

As instâncias classificadas como *L* apresentaram soluções com menor variação nos modos de transporte selecionados, enquanto as instâncias *T* permitiram maior flexibilidade na combinação de modos. No entanto, neste último caso, existe um impacto nos valores da solução ótima, resultando em soluções com custo total consideravelmente maiores para todas as instâncias testadas.

Tabela 2: Comparação entre Modelo Desagregado *times* Modelo Agregado: Instâncias 10L e 10T.

| Inst. | N <i>hubs</i> | FO CPLEX | Tempo[s] |       | <i>hubs</i> Ativos | Conexão entre <i>hubs</i> :<br>Modos usados |
|-------|---------------|----------|----------|-------|--------------------|---------------------------------------------|
|       |               |          | FD       | FA    |                    |                                             |
| 10L   | 3             | 1688,6   | 7,29     | 34,42 | 6-7-9              | 6 → 7 : Modo 2                              |
|       |               |          |          |       |                    | 6 → 9 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 7 → 6 : Modo 2                              |
|       |               |          |          |       |                    | 7 → 9 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 9 → 6 : Modo 1                              |
| 10L   | 4             | 11104,4  | 27,23    | 57,21 | 4-6-8-9            | 9 → 7 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 4 → 6 : Modo 2                              |
|       |               |          |          |       |                    | 4 → 8 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 4 → 9 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 6 → 4 : Modo 2                              |
|       |               |          |          |       |                    | 6 → 8 : Modo 2                              |
|       |               |          |          |       |                    | 6 → 9 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 8 → 4 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 8 → 6 : Modo 2                              |
|       |               |          |          |       |                    | 8 → 9 : Modo 3                              |
| 10T   | 3             | 3574,23  | 8,015    | 53,41 | 6-7-9              | 9 → 4 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 9 → 6 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 9 → 7 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 6 → 7 : Modo 2                              |
|       |               |          |          |       |                    | 6 → 9 : Modo 1                              |
| 10T   | 4             | 12513,5  | 23,015   | 50,53 | 1-3-4-5            | 7 → 6 : Modo 2                              |
|       |               |          |          |       |                    | 7 → 9 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 9 → 6 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 9 → 7 : Modo 1                              |
|       |               |          |          |       |                    | 1 → 3 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 1 → 4 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 1 → 5 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 3 → 1 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 3 → 4 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 3 → 5 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 4 → 1 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 4 → 5 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 5 → 1 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 5 → 3 : Modo 3                              |
|       |               |          |          |       |                    | 13 → 14 : Modo 3                            |

Tabela 3: Comparação entre Modelo Desagregado *times* Modelo Agregado: Instâncias 20L e 20T.

| Inst. | N <i>hubs</i> | FO CPLEX | Tempo[s] |         | <i>hubs</i> Ativos | Conexão entre hubs:<br>Modos usados |
|-------|---------------|----------|----------|---------|--------------------|-------------------------------------|
|       |               |          | FD       | FA      |                    |                                     |
| 20L   | 3             | 131,259  | 374,59   | 3332,19 | 13-14-18           | 13 → 14 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 13 → 18 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 14 → 13 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 14 → 18 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 18 → 13 : Modo 1                    |
| 20L   | 4             | 1457,61  | 1475,84  | 9060,91 | 13-14-18-19        | 18 → 14 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 13 → 14 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 13 → 18 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 13 → 19 : Modo 2                    |
|       |               |          |          |         |                    | 14 → 13 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 14 → 18 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 14 → 19 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 18 → 13 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 18 → 14 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 18 → 19 : Modo 1                    |
| 20T   | 3             | 172,843  | 544,078  | 2050,73 | 14-18-19           | 19 → 13 : Modo 2                    |
|       |               |          |          |         |                    | 19 → 14 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 19 → 18 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 19 → 14 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 14 → 18 : Modo 1                    |
| 20T   | 4             | 2770,72  | 1580,86  | 6954,94 | 7-10-11-15         | 18 → 14 : Modo 1                    |
|       |               |          |          |         |                    | 7 → 10 : Modo 2                     |
|       |               |          |          |         |                    | 7 → 11 : Modo 2                     |
|       |               |          |          |         |                    | 7 → 15 : Modo 2                     |
|       |               |          |          |         |                    | 10 → 7 : Modo 2                     |
|       |               |          |          |         |                    | 10 → 11 : Modo 2                    |
|       |               |          |          |         |                    | 11 → 10 : Modo 2                    |
|       |               |          |          |         |                    | 11 → 15 : Modo 2                    |
| 20T   | 4             | 2770,72  | 1580,86  | 6954,94 | 7-10-11-15         | 15 → 7 : Modo 2                     |
|       |               |          |          |         |                    | 15 → 10 : Modo 2                    |
|       |               |          |          |         |                    | 15 → 11 : Modo 2                    |

#### 4. Conclusão e Trabalhos Futuros

Este trabalho apresentou uma análise experimental para duas formulações matemáticas do problema de cobertura de *hubs* não capacitado multimodal com alocação única (MMSANCpHCP). Através dos experimentos computacionais, foi possível observar que a formulação desagregada mostrou-se computacionalmente mais eficiente, resolvendo as instâncias em tempos significativamente menores que a formulação agregada. Destaca-se ainda que a abordagem multimodal permitiu soluções que balancearam adequadamente custos e tempos de transporte, com o modo ferroviário sendo preferencial quando possível. Por fim, verificou-se que as características das instâncias tiveram impacto significativo na estrutura das soluções ótimas encontradas.

Os resultados obtidos abrem perspectivas interessantes para aplicações práticas em logística multimodal. Particularmente, o problema pode ser aplicado em sistemas de distribuição nos quais a combinação de diferentes modos de transporte pode levar a economias significativas sem comprometer os níveis de serviço exigidos.

Por fim, sugere-se as seguintes abordagens para trabalhos futuros: (i) desenvolvimento de meta-heurísticas para lidar com instâncias de maior porte; (ii) incorporação de aspectos estocásticos na modelagem dos tempos e custos de transporte; (iii) análise de sensibilidade mais aprofundada dos parâmetros do problema ( $\alpha^m$ ,  $\beta$ ) em diferentes cenários.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

#### Referências

- Alumur, S. e Kara, B. Y. (2008). Network hub location problems: The state of the art. *European journal of operational research*, 190(1):1–21.
- Alumur, S. A., Nickel, S., Rohrbeck, B., e Saldanha-da Gama, F. (2018). Modeling congestion and service time in hub location problems. *Applied Mathematical Modelling*, 55:13–32.
- Alumur, S. A., Yaman, H., e Kara, B. Y. (2012). Hierarchical multimodal hub location problem with time-definite deliveries. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 48(6):1107–1120.
- Aykin, T. (1994). Lagrangian relaxation based approaches to capacitated hub-and-spoke network design problem. *European Journal of Operational Research*, 79(3):501–523.
- Campbell, J. F. (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems. *European journal of operational research*, 72(2):387–405.
- Ebery, J., Krishnamoorthy, M., Ernst, A., e Boland, N. (2000). The capacitated multiple allocation hub location problem: Formulations and algorithms. *European journal of operational research*, 120(3):614–631.
- Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-hub median problem. *Location science*, 4(3):139–154.
- Ernst, A. T. e Krishnamoorthy, M. (1999). Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem. *Annals of operations Research*, 86(0):141–159.

- Ghaffarinasab, N. (2020). A highly efficient exact algorithm for the uncapacitated multiple allocation p-hub center problem. Decision Science Letters, 9(2):181–192.
- Ghaffarinasab, N., Motallebzadeh, A., Jabarzadeh, Y., e Kara, B. Y. (2018). Efficient simulated annealing based solution approaches to the competitive single and multiple allocation hub location problems. Computers & Operations Research, 90:173–192.
- Ishfaq, R. e Sox, C. R. (2011). Hub location–allocation in intermodal logistic networks. European Journal of Operational Research, 210(2):213–230.
- Kara, B. Y. e Tansel, B. C. (2000). On the single-assignment p-hub center problem. European Journal of Operational Research, 125(3):648–655.
- Klincewicz, J. G. (1998). Hub location in backbone/tributary network design: a review. Location Science, 6(1-4):307–335.
- Marianov, V., Serra, D., e ReVelle, C. (1999). Location of hubs in a competitive environment. European journal of operational research, 114(2):363–371.
- Nickel, S., Karimi, H., e Bashiri, M. (2016). Capacitated single allocation p-hub covering problem in multi-modal network using tabu search. International Journal of Engineering, 29(6):797–808.
- O’kelly, M. E. (1986). The location of interacting hub facilities. Transportation science, 20(2): 92–106.
- O’kelly, M. E. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. European journal of operational research, 32(3):393–404.
- O’Kelly, M. E. e Bryan, D. (1998). Hub location with flow economies of scale. Transportation research part B: Methodological, 32(8):605–616.