57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

PROPOSTA DE UMA HEURÍSTICA BASEADA NA DIVERGÊNCIA DE KULLBACK-LEIBLER PARA IDENTIFICAÇÃO DE EMPATES PROBABILÍSTICOS EM ORDENAMENTO MULTICRITÉRIO

Renata Pelissari
Universidade Presbiteriana Mackenzie
R. da Consolação, 930 - Consolação, São Paulo - SP, 01302-907
renata.infante@mackenzie.br

Betania Silva Carneiro Campello
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
R. Pedro Zaccaria, 1300, Limeira - SP, 13484-350
betaniac@unicamp.br

Guilherme Dean Pelegrina
Universidade Presbiteriana Mackenzie
R. da Consolação, 930 - Consolação, São Paulo - SP, 01302-907
guilherme.pelegrina@mackenzie.br

Leonardo Tomazelli Duarte
Universidade Estadual de Campinas (Unicamp)
R. Pedro Zaccaria, 1300, Limeira - SP, 13484-350
leonardo.duarte@fca.unicamp.br

RESUMO

Este artigo propõe uma heurística para derivar ordenamentos com empates a partir da matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento gerada pelo método *Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis* (SMAA). A abordagem baseia-se na divergência de Kullback-Leibler (KL) como medida de dissimilaridade entre distribuições de probabilidade associadas a cada alternativa. A heurística avalia, para cada posição no ordenamento, quais alternativas possuem distribuições suficientemente semelhantes–tanto em termos locais quanto globais–para serem consideradas empatadas. O método é aplicado ao Global AI Index, buscando rever o ordenamento de países derivado desse índice, propondo um novo ordenamento de países que permita empates. A expectativa é que esse novo ordenamento permita decisões políticas mais embasadas e justas. De forma geral, os resultados mostram que a metodologia proposta é eficaz em refletir a incerteza do processo decisório, evitando ordenamentos forçados quando há sobreposição significativa nas distribuições de posição.

PALAVRAS CHAVE. Índice de aceitabilidade de ordenamento. Divergência de Kullback-Leibler. Empates Probabilísticos. ADM

ABSTRACT

This paper proposes a heuristic to derive rankings with ties from the ranking acceptability index matrix generated by the *Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis* (SMAA) method. The

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

approach is based on the Kullback-Leibler (KL) divergence as a measure of dissimilarity between probability distributions associated with each alternative. The heuristic evaluates, for each position in the ranking, which alternatives have sufficiently similar distributions—both locally and globally—to be considered tied. The method is applied to the Global AI Index, aiming to revisit the country ranking derived from this index, proposing a new country ranking that allows ties. It is expected that this new ranking will support more informed and fairer policy decisions. Overall, the results demonstrate that the proposed methodology effectively reflects the uncertainty inherent in decision-making processes, avoiding forced rankings when there is significant overlap in positional distributions.

KEYWORDS. Ranking acceptability index. Kullback-Leibler Divergence. Probabilistic ties.

MCDM

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

1. Introdução

Nos últimos anos, observamos um crescente interesse na elaboração de ındices compostos [Greco et al., 2019] para comparar países, organizações e territórios em diversas áreas, como sustentabilidade [Kandakoglu et al., 2019], densevolvimento social [Pelissari et al., 2024] e inteligência artificial (IA) [Campello et al., 2024]. Frequentemente, tais ındices são formulados por meio de modelos multicritério com pesos fixos e ordenamentos determinísticos. No entanto, esses procedimentos muitas vezes desconsideram aspectos essenciais como interações entre critérios, incertezas nas avaliações ou nos pesos e a existência de empates entre alternativas [Greco et al., 2019; Campello et al., 2024] .

A análise estocástica de decisão multicritério, notadamente por meio do método SMAA busca lidar com esses desafios ao modelar incertezas via simulação de Monte Carlo [Lahdelma e Salminen, 2001; Pelissari et al., 2020]. Uma das saídas centrais do SMAA é a matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento, que indica, para cada alternativa, a probabilidade de ocupar determinada posição. No entanto, a obtenção de um ordenamento a partir dessa matriz nem sempre é trivial.

Diversas metodologias vêm sendo propostas na literatura para derivar um ranking a partir da matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento gerada pelo SMAA. Conforme discutido por Vetschera [2017], essas abordagens podem ser agrupadas em dois grandes grupos: os métodos baseados em parâmetros e os métodos baseados em inferência probabilística. No primeiro caso, um vetor de pesos (por exemplo, o *central weight vector*) é selecionado e o modelo de agregação é aplicado diretamente para gerar um ordenamento determinístico. Já os métodos probabilísticos utilizam as informações da matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento para inferir um ordenamento. Entre eles, destaca-se o índice de vitória par a par (pairwise winning index), que estima a probabilidade de uma alternativa superar outra e gera um ordenamento a partir de regras do tipo Condorcet [Lahdelma e Salminen, 2010]. Apesar dessas contribuições, a maioria dessas abordagens assume que todas as alternativas podem e devem ser ordenadas de forma estrita, sem considerar a possibilidade de empates probabilísticos.

Neste artigo, propomos uma heurística baseada na divergência de Kullback-Leibler (KL) [Kullback e Leibler, 1951] para derivar ordenamentos a partir da matriz de índices de aceitabilidade do SMAA e identificar empates probabilísticos entre alternativas com base em suas distribuições de aceitabilidade. A ideia central é que, ao comparar essas distribuições via KL simétrica, é possível identificar grupos de alternativas com comportamentos estatísticos semelhantes e que, portanto, poderiam ser considerados empatados estatisticamente. Essa abordagem amplia as formas de interpretação dos resultados do SMAA e contribui para uma representação mais justa e realista do ordenamento final.

Cabe destacar que o termo empates probabilísticos é aqui introduzido para denominar situações em que as distribuições de aceitabilidade de posição das alternativas, obtidas via SMAA, apresentam grande similaridade estatística, não sendo razoável impor um ordenamento estrito. Esse conceito difere da noção clássica de indiferença em apoio à decisão multicritério, entendida como uma relação de preferência em que duas alternativas não podem ser distinguidas em termos determinísticos.

O artigo está organizado da seguinte forma. Na Seção 2, descrevemos os fundamentos teóricos do método SMAA e da divergência KL. Na Seção 3, apresentamos a metodologia introduzida nesse trabalho, detalhando a heurística proposta. Apresentamos então, na Seção 4, a aplicação da metodologia proposta a um estudo de caso que busca ordenar países quanto à sua capacidade em IA, utilizando os dados do *Global AI Index*. Por fim, discutimos os resultados, limitações e direções futuras na Seção 5.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

2. Fundamentação Teórica

2.1. Método SMAA para problemas de ordenamento

Considere $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ um conjunto finito de m alternativas e $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ um conjunto de n critérios, onde cada critério c_j possui uma função de avaliação $g_j : A \to \mathbb{R}$ que atribui um valor de desempenho a cada alternativa de A. Um problema de ordenamento multicritério consiste em estabelecer uma relação de preferência R sobre o conjunto de alternativas, de modo que se determine uma ordem $a_i \succ a_k$ com base em uma função de agregação u, definida como:

$$u : \mathbb{R}^n \times W \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

onde W representa o espaço dos pesos $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, refletindo a importância relativa dos critérios, e $u(a_i, w)$ é a pontuação agregada da alternativa a_i, considerando suas avaliações em relação ao conjunto de critérios $g_j(a_i)$. O ordenamento final π é dado por:

$$\pi : A \to \{1, 2, \ldots, m\} \quad \text{tal que} \quad f(a_i, w) \geq f(a_k, w) \Rightarrow \pi(a_i) \leq \pi(a_k). \tag{2}$$

Problemas de decisão, incluindo os de ordenamento, frequentemente envolvem incerteza, preferências imprecisas ou falta de informação completa [Pelissari et al., 2021]. O método Stochastic Multicriteria Acceptability Analysis (SMAA) é uma família de métodos desenvolvidos para lidar com problemas de decisão nos quais parâmetros de entrada, como pesos dos critérios são incertos ou parcialmente definidos [Lahdelma e Salminen, 2001]. Esses métodos baseiam-se em simulações estocásticas para explorar o espaço de pesos possíveis, gerando resultados probabilísticos. Dependendo do procedimento de agregação utilizado, diferentes medidas probabilísticas são obtidas [Pelissari et al., 2020].

O SMAA-2 [Lahdelma e Salminen, 2001] calcula três medidas descritivas principais: o índice de aceitabilidade de ordenamento, o vetor central de pesos e o fator de confiança. O índice de aceitabilidade de ordenamento, denotado por b_i^s, descreve a probabilidade de a alternativa a_i ser aceitável para uma posição s no ordenamento. Ele varia no intervalo $[0, 1]$ e quanto mais próximo de 1, maior a probabilidade de a_i ocupar a posição s.

A matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento B para um problema de ordenamento com m alternativas e m posições é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \cdots & b_m^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_m^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^m & b_2^m & \cdots & b_m^m \end{bmatrix} \tag{3}$$

O vetor central de pesos w_i^c representa os valores médios dos pesos dos critérios que levam a alternativa a_i ocupar o primeiro lugar no ordenamento. Já o fator de confiança p_i^c é definido como a probabilidade de uma alternativa ser a preferida quando se utiliza seu vetor central de pesos como referência.

3. A Divergência de Kullback-Leibler

A divergência de Kullback-Leibler (KL) é uma medida utilizada para quantificar a diferença entre duas distribuições de probabilidade [Kullback e Leibler, 1951]. Originada na teoria da informação, a KL mede a entropia relativa entre distribuições [Burnham e Anderson, 2002].

Para distribuições discretas de probabilidade $P = \{p_i\}$ e $Q = \{q_i\}$, onde p_i e q_i são funções de massa de probabilidade sobre um conjunto finito X, a divergência KL é definida como:

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \sum_i p_i \log \frac{p_i}{q_i} \tag{4}$$

desde que $q_i > 0$ sempre que $p_i > 0$; caso contrário, a divergência não está definida. Para distribuições contínuas com densidades de probabilidade $p(x)$ e $q(x)$, a divergência KL é dada por:

$$D_{KL}(P \parallel Q) = \int_X p(x) \log \frac{p(x)}{q(x)} dx \tag{5}$$

Em ambos os casos, a divergência KL quantifica a quantidade de informação perdida ao se usar Q para aproximar P. Um valor menor indica que Q é uma boa aproximação de P.

A divergência KL é assimétrica e não satisfaz a desigualdade triangular. Contudo, quando é necessário garantir simetria, a divergência KL pode ser simetrizada [Jeffreys, 1946]:

$$D_{KL}^{sym}(P, Q) = \frac{1}{2} \left(D_{KL}(P \parallel Q) + D_{KL}(Q \parallel P) \right) \tag{6}$$

4. Proposta da heurística baseada na divergência de KL

Neste trabalho, propomos uma heurística para construir ordenamentos com empates a partir da matriz de índices aceitabilidade de ordenamento do SMAA. A ideia central é utilizar a divergência de Kullback-Leibler (KL) simetrizada para identificar quando duas alternativas têm distribuições de ordenamento suficientemente similares para serem consideradas empatadas. A abordagem está dividida em duas etapas principais: (1) cálculo das divergências e (2) aplicação da heurística de construção do ranking.

4.1. Etapa 1: Cálculo das divergências

Nesta etapa, utilizamos a divergência de Kullback-Leibler (KL) simetrizada para comparar os vetores de aceitabilidade entre pares de alternativas. Propomos a análise de dois tipos específicos de divergência: divergência local e divergência global, definidas a seguir.

- **Divergência local:** dada uma posição específica r no ordenamento, comparamos as probabilidades b_{ir} e b_{jr} das alternativas a_i e a_j ocuparem essa posição, utilizando a divergência KL simetrizada. Para isso, consideramos as distribuições binárias $P_i^r = [b_{ir}, 1 - b_{ir}]$ e $P_j^r = [b_{jr}, 1 - b_{jr}]$. A divergência local é dada por:

$$DL_{KL}^{sym}(b_{ir}, b_{jr}) = \frac{1}{2} \left[D_{KL}(P_i^r \parallel P_j^r) + D_{KL}(P_j^r \parallel P_i^r) \right]. \tag{7}$$

- **Divergência global:** compara-se o vetor completo de aceitabilidade das alternativas a_i e a_j, isto é, as distribuições $B_i = [b_{i1}, \ldots, b_{im}]$ e $B_j = [b_{j1}, \ldots, b_{jm}]$. Utilizamos novamente a divergência KL simetrizada:

$$DG_{KL}^{sym}(B_i, B_j) = \frac{1}{2} \left[D_{KL}(B_i \parallel B_j) + D_{KL}(B_j \parallel B_i) \right]. \tag{8}$$

Para implementar a heurística proposta, dois limiares precisam ser definidos: ε_1, referente à divergência local, e ε_2, referente à divergência global. Esses limiares são utilizados na definição formal a seguir:

Definição 1. [Empate probabilístico baseado na KL] Considere um problema decisório com alternativas a_i, a_j e uma matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento B, definida conforme a equação (3). Diz-se que há empate probabilístico entre as alternativas a_i e a_j se, e somente se,

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

$$DL_{KL}^{sym}(b_{ir}, b_{jr}) < \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad DG_{KL}^{sym}(B_i, B_j) < \varepsilon_2$$

onde ε_1 e ε_2 são parâmetros previamente estabelecidos pelo decisor.

Cabe ressaltar que o cálculo das divergências local e global é válido porque, em ambos os casos, temos distribuições de probabilidade bem definidas.

No caso da divergência local, comparamos diretamente a probabilidade de duas alternativas distintas (a_i e a_j) ocuparem uma mesma posição específica r no ranking. Assim, associamos a cada alternativa uma distribuição de probabilidade binária válida que representa a ocorrência ou não da alternativa naquela posição específica:

$$P_i^r = b_{ir}, 1 - b_{ir}, \tag{9}$$

sendo b_{ir} a probabilidade de a_i ocupar a posição r, e $1 - b_{ir}$ a probabilidade complementar. Analogamente, define-se $P_j^r = b_{jr}, 1 - b_{jr}$ para a alternativa a_j.

Da mesma forma, o cálculo da divergência global também se baseia em distribuições de probabilidade válidas, pois cada vetor de índices de aceitabilidade de ordenamento é uma distribuição discreta sobre todas as posições possíveis. Para uma dada alternativa a_i, temos:

$$B_i = b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{im}, \tag{10}$$

em que cada b_{ir} representa a probabilidade da alternativa a_i ocupar a posição r no ranking. Este vetor satisfaz naturalmente as propriedades fundamentais de uma distribuição de probabilidade:

$$b_{ir} \geq 0, \quad \forall r \in 1, \ldots, m, \tag{11}$$

e

$$\sum_{r=1}^{m} b_{ir} = 1. \tag{12}$$

4.2. Etapa 2: Heurística de construção do ordenamento

A heurística proposta utiliza a matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento obtida via SMAA como entrada e permite construir um ordenamento das alternativas com possíveis empates, segundo definição de empate probabilístico baseado na KL (Definição 1). O procedimento segue os seguintes passos:

1. **Seleção da alternativa de referência:** Para cada posição k, a partir da primeira, verifica-se se alguma alternativa possui probabilidade igual a 1 de ocupá-la ($\max_i b_{ik} = 1$). Tais alternativas são diretamente atribuídas à posição correspondente. Após essa verificação, a alternativa não atribuída com maior valor de b_{ik}, sendo k a melhor posição ainda disponível no ordenamento, é selecionada como referência para a etapa de comparação.

2. **Comparação com demais alternativas:** todas as alternativas não atribuídas são comparadas par a par com a alternativa de referência utilizando as divergências locais e globais.

3. **Empates:** as alternativas que satisfazem simultaneamente os limiares de divergência local e global ($DL_{KL}^{sym} < \varepsilon_1$ e $DG_{KL}^{sym} < \varepsilon_2$) são consideradas empatadas com a alternativa referência na posição atual k.

4. **Atualização da posição:** define-se a próxima posição de análise

$$k = (\text{número de alternativas já atribuídas}) + 1.$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

5. **Nova alternativa referência:** entre as alternativas não atribuídas, escolhe-se como nova referência aquela com maior soma cumulativa de probabilidades até a posição k ($\sum_{j=1}^{k} b_{ij}$). Se uma alternativa tiver probabilidade igual a 1, ela é automaticamente atribuída à posição.

6. **Repetição:** os passos 2 a 5 são repetidos até que todas as alternativas estejam atribuídas ao ranking.

5. Estudo de caso: *Global AI Index* da Tortoise

O estudo de caso que fundamenta a aplicação da heurística proposta baseia-se na análise do *Global AI Index* (GAII), desenvolvido pela Tortoise Media [Tortoise Media, 2024]. Este índice visa classificar países de acordo com sua capacidade de desenvolvimento em Inteligência Artificial, utilizando uma agregação por soma ponderada de sete critérios distribuídos em três pilares principais: implementação, inovação e investimento. A Tortoise atribui pesos fixos a cada critério com base na completude das fontes de dados, e as pontuações finais são utilizadas para gerar um ordenamento determinístico de 62 países. No entanto, a adoção de pesos determinísticos e a não consideração de interações entre critérios – como redundância e sinergia – levantam preocupações metodológicas em relação à robustez e imparcialidade do índice.

A fim de mitigar essas limitações relacionadas, Campello et al. [2024] propõe uma nova versão do GAII utilizam a Integral de Choquet como método de agregação, permitindo modelar interação entre critérios, e o o método SMAA-2 para análise de robustez em relação aos pesos. Nessa proposta, os autores aplicam o método de Condorcet para derivar um ordenamento dos países a partir da matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento. No entanto, um problema que permanece é a impossibilidade de identificar empates probabilísticos entre os países. Esse problema foi levantado pela prórpia Tortoise, que considera que um ordenamento completo é obtido para os países mesmo quando os valores das pontuações são próximos, podendo ser diferentes simplesmente por questões de incerteza nos pesos.

Para superar essa limitação, neste estudo, utilizamos a matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento resultante da metodologia aplicada em Campello et al. [2024], e aplicamos a heurística baseada na divergência de Kullback-Leibler proposta aqui para identificar empates probabilísticos e propor um novo ordenamento dos países que respeite as incertezas subjacentes ao processo decisório original.

A Figura 1 apresenta um recorte dessa matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento com os 8 países mais bem posicionados, utilizada aqui para ilustrar o funcionamento da heurística.

$$
\begin{array}{c}
\text{Position} \\
\text{EUA} \\
\text{CHN} \\
\text{SGP} \\
\text{GBR} \\
\text{CHE} \\
\text{ISR} \\
\text{CAN} \\
\text{DEU}
\end{array}
=
\begin{bmatrix}
r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 & r_6 & r_7 & r_8 & r_9 & r_{10} \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.82 & 0.15 & 0.01 & 0.02 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.28 & 0.24 & 0.13 & 0.14 & 0.13 & 0.02 \\
0 & 0 & 0 & 0.06 & 0.23 & 0.14 & 0.17 & 0.17 & 0.16 & 0.03 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.24 & 0.41 & 0.31 & 0.04 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0.14 & 0.25 & 0.45 & 0.13 & 0
\end{bmatrix}
$$

Figura 1: Matriz de índices de aceitabilidade de ordenamento com os 8 países mais bem posicionados segundo a metodologia proposta em Campello et al. [2024].

Nela, observa-se que os três primeiros países (EUA, China e Singapura) apresentam probabilidade igual a 1 de ocuparem, respectivamente, as três primeiras posições. A heurística é aplicada então de forma iterativa a partir da posição 4, uma vez que as três primeiras posições são

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

ocupadas com probabilidade 1 por EUA, China e Singapura. Na quarta posição, o país com maior probabilidade é o Reino Unido (GBR), com $b_{4,\text{GBR}} = 0.82$. Calcula-se então as divergências globais e locais par a par do Reino Unido com todas as demais alternativas ainda não alocadas em uma posição (ou seja, com 59 alternativas). Ao realizar essa comparação, verificamos que nenhuma outra alternativa satisfaz simultaneamente as condições de divergência local e global em relação a GBR, e por isso o país é alocado sozinho na quarta posição.

Na etapa seguinte, referente à 5ª posição, a Suíça (CHE) é escolhida como ponto de referência por apresentar a maior soma acumulada de probabilidade até essa posição. Após o cálculo das divergências par a par com as demais alternativas, observa-se que Israel (ISR) satisfaz a Condição 1, sendo, portanto, considerado empatado com CHE na 5ª posição. Esse empate probabilístico reflete a semelhança entre as distribuições de aceitabilidade dessas duas alternativas, conforme ilustrado na Figura 2.

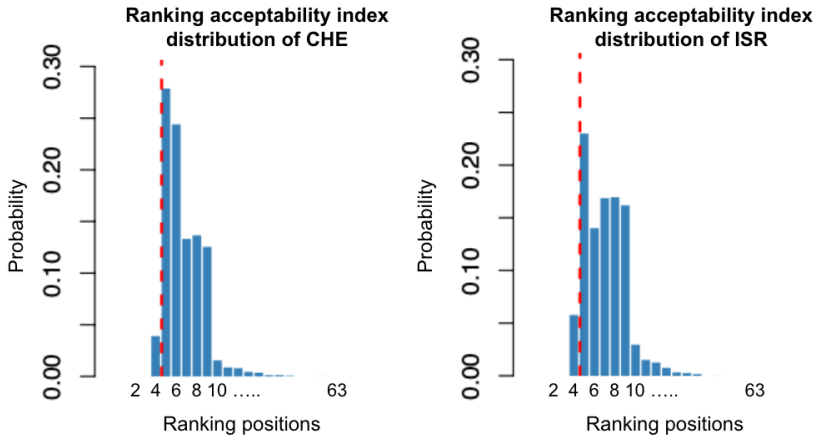


Figura 2: Comparação das distribuições de probabilidade de Israel (ISR) e Suíça (CHE).



Figura 3: Ordenamento dos nove primeiros países. O ordenamento da esquerda é o proposto por Campello et al. [2024]. O ordenamento da direita é resultante da heurística aqui proposta que permite empates entre os países.

O resultado dos nove primeiros países é ilustrado na Figura 3. A heurística segue o mesmo

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

procedimento para as demais posições até que todas as alternativas estejam alocadas.

6. Conclusão

A heurística proposta neste trabalho introduz uma nova perspectiva para a construção de rankings com empates em problemas de decisão multicritério sob incerteza. A aplicação desta heurística permite derivar um ordenamento com empates fundamentado em similaridades estatísticas, ao invés de impor uma ordem completa baseada em diferenças marginais de probabilidade. Essa abordagem se mostrou relevante em contextos como o do Global AI Index, em que os dados de entrada e as preferências dos tomadores de decisão são incertas ou parcialmente definidos.

Como trabalho futuro, pretende-se explorar abordagens alternativas de definição dos limiares de divergência, realizar análises de sensibilidade e aplicar a heurística a conjuntos de dados maiores e em diferentes contextos decisórios. Espera-se que essa contribuição incentive o uso de métodos baseados em medidas probabilísticas para representar melhor a robustez e as limitações dos ordenamentos gerados em problemas complexos. Pretendemos aprofundar a revisão da literatura sobre a relação entre empates probabilísticos, indiferença e o conceito de *lack of discrimination* em análise de decisão multicritério, de modo a alinhar melhor a terminologia utilizada e fortalecer o enquadramento teórico da abordagem proposta.

Referências

Burnham, K. P. e Anderson, D. R. (2002). *Model Selection and Multimodel Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. Springer, New York, 2nd edition. ISBN 9780387953649.

Campello, B. S. C., Pelegrina, G. D., Pelissari, R., Suyama, R., e Duarte, L. T. (2024). Mitigating subjectivity and bias in AI development indices: A robust approach to redefining country rankings. *Expert Systems with Applications*, 255:124803.

Greco, S., Ishizaka, A., Tasiou, M., e Torrisi, G. (2019). On the methodological framework of composite indices: A review of the issues of weighting, aggregation, and robustness. *Social Indicators Research*, 141(1):61–94.

Jeffreys, H. (1946). An invariant form for the prior probability in estimation problems. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 186(1007):453–461.

Kandakoglu, A., Frini, A., e Ben Amor, S. (2019). Multicriteria decision making for sustainable development: A systematic review. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 26(5-6):202–251.

Kullback, S. e Leibler, R. A. (1951). On information and sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79–86. URL `https://projecteuclid.org/euclid.aoms/1177729694`.

Lahdelma, R. e Salminen, P. (2001). Smaa-2: Stochastic multicriteria acceptability analysis for group decision making. *Operations Research*, 49(3):444–454.

Lahdelma, R. e Salminen, P. (2010). Stochastic multicriteria acceptability analysis (smaa). In Ehrgott, M., Figueira, J. R., e Greco, S., editors, *Trends in Multiple Criteria Decision Analysis*, p. 285–315. Springer, Boston, MA.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br

Pelissari, R., Ben Amor, S., D'Antona, d. O., Marandola Júnior, E. J., e Duarte, L. T. (2024). A semi-supervised multi-criteria sorting approach to constructing social vulnerability composite indicators. *Annals of Operations Research*, 337(1):235–260.

Pelissari, R., Oliveira, M. C., Ben Amor, S., Kandakoglu, A., e Helleno, A. L. (2020). Smaa methods and their applications: a literature review and future research directions. *Annals of Operations Research*, 293(2):433–493.

Pelissari, R., Oliveira, M. C., Abackerli, A. J., Ben-Amor, S., e Assumpção, M. R. P. (2021). Techniques to model uncertain input data of multi-criteria decision-making problems: a literature review. *International Transactions in Operational Research*, 28(2):523–559.

Tortoise Media (2024). The global ai index 2024. `https://www.tortoisemedia.com/data/global-ai`. Acesso em: 9 de maio de 2025.

Vetschera, R. (2017). Deriving rankings from incomplete preference information: A comparison of different approaches. *European Journal of Operational Research*, 258(1):244–253.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212291
https://proceedings.science/p/212291?lang=pt-br