57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

GRASP com *Path-Relinking* Exterior aplicado à solução do Problema de Sequenciamento em Projetos com Restrição em Recursos e Múltiplos Modos de Execução

Warley Ribeiro de Freitas[1], Jardell Fillipe da Silva[1,2], Maria Amélia Lopes Silva[2], Sérgio Ricardo de Souza [1], Elisangela Martins de Sá[1]

[1] Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Av. Amazonas, 7675, CEP: 30510-000, Belo Horizonte, MG, Brasil
[2] Universidade Federal de Viçosa, Campus Florestal
Rodovia LMG 818, km 06, CEP: 35.690-000, Florestal, MG, Brasil
warley.rbf@gmail.com, jardell.silva@ufv.br, mamelia@ufv.br,
sergio@cefetmg.br, elisangelamartins@cefetmg.br

RESUMO

Este artigo propõe a utilização da meta-heurística GRASP combinada ao algoritmo *exterior Path Relinking* (ePR) para resolver o *Multi-mode Resource-Constrained Project Scheduling Problem* (MRCPSP). Este problema consiste em sequenciar todas as atividades de um projeto, respeitando as relações de precedência entre elas. Cada atividade do projeto possui um conjunto de modos de execução, com tempo de processamento e demanda de recursos renováveis e não renováveis particulares, resultando em diferentes combinações para a execução do projeto. O MRCPSP tem por objetivo minimizar o *makespan* total do projeto, encontrando tempo de término para cada atividade. O GRASP realiza a amostragem das melhores soluções encontradas, enquanto o ePR explora regiões promissoras adjacentes a essas soluções, aplicando busca local nas soluções intermediárias. Os testes computacionais foram executados usando um conjunto de instâncias da literatura das bibliotecas PSLIB e MMLIB e comparados com as melhores soluções encontradas.

PALAVRAS CHAVE. Problema de Sequenciamento em Projetos com Restrição em Recursos e Múltiplos Modos de Execução, GRASP, *Exterior Path Relinking*.

Tópicos: MH- Meta-heurística, OC- Otimização Combinatória

ABSTRACT

This paper proposes an implementation of the GRASP metaheuristic combined with the exterior Path Relinking (ePR) algorithm to solve the Multi-mode Resource-Constrained Project Scheduling Problem (MRCPSP). This problem consists of sequencing all project activities, respecting their precedence relations. Each activity of the project has a set of execution modes, with particular processing time and demand for renewable and non-renewable resources, resulting in different combinations for the execution of the project. MRCPSP aims to minimize the total makespan of the project by providing the completion time for each activity. GRASP samples the best solutions found, while ePR explores promising regions adjacent to these solutions, applying local search in the intermediate solutions. The computational tests were performed using a set of instances from the literature of the PSLIB and MMLIB libraries and compared with the best found solutions.

KEYWORDS. Multi-mode Resource-Constrained Project Scheduling Problem, GRASP, Exterior Path Relinking.

Paper topics: MH- Metaheuristics, OC- Combinatorial Optimization

https://proceedings.science/p/212281?lang=pt-br

1. Introdução

O *Multi-Mode Resource-Constrained Project Scheduling Problem* (MRCPSP) é uma extensão do clássico *Resource-Constrained Project Scheduling Problem* (RCPSP). Enquanto o RCPSP considera apenas um modo de execução por atividade, o MRCPSP permite que cada atividade seja realizada em diferentes modos, cada um dos quais com características específicas, como duração, consumo de recursos e custos. Essa generalização aumenta a complexidade do problema, classificado como NP-difícil, mas também amplia suas possibilidades de aplicação a cenários reais, nos quais decisões sobre a sequência e o modo de execução das atividades impactam diretamente o tempo total de conclusão (*makespan*) e a utilização de recursos limitados. Assim, o objetivo central do MRCPSP consiste em determinar um cronograma que minimize o *makespan* do projeto, atribuindo a cada atividade um único modo de execução, respeitando tanto as relações de precedência quanto as restrições de disponibilidade de recursos renováveis e não renováveis.

A resolução exata do MRCPSP é viável apenas para instâncias de pequenas dimensões, o que justifica o uso de heurísticas e meta-heurísticas para sua solução. Com base em estudos que combinam a meta-heurística *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure* (GRASP) e a heurística *Path Relinking* (PR) com bons resultados [Laguna et al., 2025], este artigo propõe uma abordagem híbrida, que integra GRASP e uma variação do PR, o *Exterior Path Relinking* (ePR), para a solução do MRCPSP. A meta-heurística GRASP se destaca pelo bom desempenho e ampla aplicação a diversos problemas de otimização combinatória, enquanto PR permite intensificar e diversificar a busca, evitando a convergência prematura. O procedimento híbrido proposta mantém um conjunto elite das melhores soluções do GRASP e aplica o ePR para explorar regiões promissoras do espaço de busca, buscando soluções de maior qualidade.

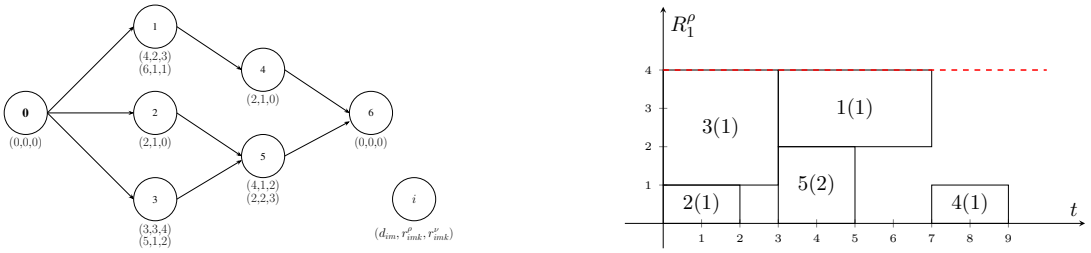
2. Descrição do problema

O MRCPSP consiste em determinar a programação de um conjunto de n tarefas, executadas sem interrupção e respeitando-se as relações de precedência, de modo que cada tarefa só inicie após a conclusão de suas predecessoras. As tarefas inicial e final são fictícias, com duração e consumo de recursos nulos. Cada tarefa $j \in \{1, \cdots, n\}$ pode ser executada em diferentes modos $m \in M_j$, definidos por duração d_{jm} e consumo de recursos renováveis r^{ρ}_{jmk} e não renováveis r^{ν}_{jmk}. Os recursos renováveis têm capacidade fixa por período R^{ρ}_k, enquanto os não renováveis possuem disponibilidade total R^{ν}_k ao longo do horizonte T. O objetivo é determinar o sequenciamento e o modo de execução de cada tarefa que minimize o *makespan*, respeitando precedência e limites de recursos.

A Figura 1 apresenta um exemplo ilustrativo. O grafo (a) mostra um projeto com cinco atividades, evidenciando suas relações de precedência imediata por meio das arestas. Cada nó exibe a atividade juntamente com os modos de execução disponíveis no formato $(d_{jm}, r^{\rho}_{jmk}, r^{\nu}_{jmk})$. O gráfico de Gantt (b) ilustra uma solução viável com *makespan* igual a 9, considerando um recurso renovável ($R^{\rho}_1 = 4$) e um recurso não renovável ($R^{\nu}_1 = 9$). A largura de cada barra indica a duração da atividade, enquanto a altura representa o consumo de recurso renovável, limitado pela linha vermelha.

3. Metodologia

A abordagem proposta combina a meta-heurística GRASP com o método ePR como etapa de pós-otimização. O processo é dividido em três fases principais: (i) construção de uma solução inicial viável de forma gulosa e aleatória, (ii) busca local (BL) e (iii) pós-otimização por meio do ePR aplicado sobre um conjunto elite de soluções de alta qualidade. O caráter guloso e de aleatoriedade na fase construtiva são controlados pelo parâmetro $\alpha \in [0,1]$, enquanto o número máximo de iterações é definido por `maxIter`.



(a) (b)

Figura 1: (a) Representação do grafo do problema MRCPSP com demandas de recursos e ordem de precedência; (b) Exemplo de uma solução viável para o problema apresentado.

Fase Construtiva (GRASP): A construção da solução ocorre em duas etapas: (i) atribuição aleatória de modos de execução viáveis às atividades e (ii) sequenciamento pelo método *forward/ backward improvement* [Li e Willis, 1992]. Em cada iteração, uma atividade é escolhida a partir de uma *Restricted Candidate List* (RCL), parametrizada por α, formada com base nas regras de prioridade *Slack* (SLK) e *Latest Finish Time* (LFT), apresentadas em [Fernandes e de Souza, 2021], selecionadas aleatoriamente a cada passo. O resultado é a tupla $S = (E, \Theta)$, em que E contém os modos atribuídos e Θ os respectivos tempos de término, de modo que $(e_j, \theta_j)|e_j \in E$,$\theta_j \in \Theta$ define o modo e o instante final da atividade j.

Busca Local (GRASP): A solução construída é submetida a uma rotina de BL baseada na estratégia *Mode Intensive Behaviour* [Muritiba et al., 2018], visando intensificar a exploração da vizinhança. São considerados três tipos de movimentos: (a) troca do modo de execução de uma única atividade; (b) troca simultânea dos modos de duas atividades; e (c) reordenação de atividades críticas [Kolish e DrexlL, 1997], ajustando a sequência dentro do caminho crítico.

Pós-otimização (ePR): O ePR atua sobre um conjunto elite (ES) contendo soluções diversas e de alta qualidade, com tamanho fixo `maxElite`. Após cada iteração do GRASP, a solução obtida pode ser incluída em ES caso o conjunto não esteja completo ou atenda a critérios de qualidade e diversidade, substituindo a pior solução, se necessário. O procedimento $ePR(S_i, S_j)$ gera soluções intermediárias entre uma solução inicial S_i e uma solução guia S_j por meio da alteração iterativa de atributos comuns, modos de execução compartilhados. Cada solução intermediária é refinada pela busca local, e o processo prossegue até que se obtenha uma solução totalmente distinta da guia. Ao final, é retornada a melhor solução encontrada.

4. Resultados e Discussão

Os experimentos foram realizados utilizando 30 instâncias das bibliotecas PSLIB (conjuntos J20 e J30) e MMLIB (conjunto J50), contendo de 20 a 50 atividades, três modos de execução por atividade, dois recursos renováveis e dois não renováveis. Cada instância foi executada dez vezes, registrando-se o desvio percentual médio (*gap*) em relação ao ótimo conhecido obtido da fase de construção, do GRASP e do ePR, respectivamente, além do tempo médio de execução. A Tabela 1 mostra os resultados parciais obtidos para o conjunto de parâmetros $\alpha = 0{,}4$, `graspMax` $= 30$ e `maxElite` $= 5$.

A análise mostra que a fase construtiva apresentou desempenho limitado, especialmente para J30, com gap inicial de 28,33%. A BL reduziu significativamente os desvios, com destaque para J20 e J50, mas mostrou limitações em instâncias mais complexas. A aplicação do ePR resultou em pequenas melhorias adicionais e contribuiu para diversificar a busca, embora seus ganhos tenham sido modestos. A Figura 2 ilustra a distribuição dos *gaps*. Observa-se que J50 apresentou mediana próxima de zero, com metade das instâncias resolvidas de forma ótima; J20 teve baixa

https://proceedings.science/p/212281?lang=pt-br

Tabela 1: Comparação dos gaps e tempo médio para cada instância

Instância	**#opt**	$\%gap_{opt}$(const)	$\%gap_{opt}$(Grasp)	$\%gap_{opt}$(ePR)	**Tempo (s)**
J20	12	16,22%	2,50%	2,37%	2,5652
J30	10	28,33%	3,99%	3,82%	4,8442
J50	15	13,34%	2,68%	2,44%	13,923

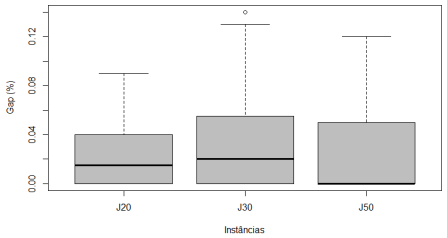


Figura 2: *Boxplot* para a distribuição dos *gaps* para cada classe de instâncias.

dispersão de resultados; e J30 apresentou maior variabilidade e presença de *outliers*, evidenciando instâncias mais difíceis.

A estratégia de BL demonstrou ser eficiente na maioria dos casos, mas limitada ao lidar com instâncias mais complexas. Já ePR se mostrou promissor para evitar a parada prematura em ótimos locais, embora seus ganhos tenham sido modestos. Os resultados indicam que a fase de construção pode ser aprimorada, ao integrar melhor o sequenciamento e a escolha de modos.

5. Conclusão

A abordagem proposta é capaz de gerar soluções de boa qualidade, especialmente para instâncias de menor e média complexidade. Contudo, para instâncias mais desafiadoras, melhorias na integração entre a escolha de modos e o sequenciamento, bem como estratégias adicionais de intensificação e diversificação, podem aumentar a eficiência do método. Este trabalho, portanto, contribui com uma aplicação inédita na literatura, segundo o nosso conhecimento, da combinação GRASP+ePR aplicado à solução do MRCPSP.

Agradecimentos

Os autores agradecem à CAPES, ao CNPq, à FAPEMIG, ao CEFET-MG) e à Universidade Federal de Viçosa pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

Referências

Fernandes, G. A. e de Souza, S. R. (2021). A matheuristic approach to the multi-mode resource constrained project scheduling problem. *Computers & Industrial Engineering*, 162:107592.

Kolish, R. e DrexlL, A. (1997). Local search for nonpreemptive multi-mode resource-constrained project scheduling. *IIE Transactions*, 29:987–999.

Laguna, M., Martí, R., Martínez-Gavara, A., Pérez-Peló, S., e Resende, M. G. (2025). Greedy randomized adaptive search procedures with path relinking. an analytical review of designs and implementations. *European Journal of Operational Research*, p. 1–18.

Li, K. Y. e Willis, R. J. (1992). An iterative scheduling technique for resource-constrained project scheduling. *European Journal of Operational Research*, 56(3):370–379.

Muritiba, A. E. F., Rodrigues, C. D., e da Costa, F. A. (2018). A path-relinking algorithm for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem. *Computers & Operations Research*, 92:145–154.