57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

LIMITAÇÕES DA LÓGICA *LINEMSOL* NA MODELAGEM DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM GRAFOS

Simone I. M. Gama
Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)
Depart. de Engenharia de Sistemas e Computação (DESC)
Rua São Francisco Xavier, 524, Maracanã, Rio de Janeiro, RJ, Cep 20550-900
simone@eng.uerj.br

RESUMO

Este trabalho investiga a lógica monádica de segunda ordem com funções objetivo lineares (LinEMSOL) aplicada à modelagem de problemas de otimização em grafos. São analisadas suas capacidades expressivas, classes de problemas tratáveis e a relação com parâmetros estruturais como largura de árvore e de clique. Propõe-se uma hierarquia conceitual das limitações da LinEMSOL, dividida em níveis conforme a complexidade da função objetivo: cardinalidade, aritmética com pesos e restrições modulares ou de ordem global. Também são discutidas as extensões lógicas necessárias para superar essas limitações.

PALAVRAS CHAVE. Lógica Monádica, Otimização em Grafos, LinEMSOL.
TAG – Teoria dos Grafos e Algoritmos Relacionados; OD – Otimização Discreta

ABSTRACT

This work investigates monadic second-order logic with linear objective functions (LinEMSOL) in modeling optimization problems on graphs. We analyze its expressive power, the problems it can capture, and its relation to structural parameters like treewidth and clique-width. A conceptual hierarchy of LinEMSOL's limitations is proposed, organized by increasing objective function complexity: cardinality, arithmetic with weights, and modular or global ordering constraints. Logical extensions required to overcome these limits are also discussed.

KEYWORDS. Monadic Logic. Graph Optimization. LinEMSOL.
TAG – Graph Theory and Related Algorithms; OD – Discrete Optimization

1. Introdução

A **Lógica de Segunda Ordem Monádica** (MSOL, do inglês *Monadic Second-Order Logic*) é uma extensão da **Lógica de Primeira Ordem** (FO) que permite quantificar não apenas sobre elementos individuais de um domínio, mas também sobre conjuntos de elementos, com a restrição de que os predicados de segunda ordem sejam monádicos, ou seja, unários (referem-se a subconjuntos, não a pares, trios etc.). A MSOL foi introduzida por Julius Richard Büchi em 1960, ao demonstrar que ela possui o mesmo poder expressivo que os autômatos de Büchi sobre palavras infinitas, estabelecendo uma ponte fundamental entre lógica e autômatos [Büchi, 1966; Elgot, 1961].

Courcelle [1990] foi um dos pioneiros na aplicação da lógica monádica de segunda ordem à teoria algorítmica de grafos. Em seu trabalho seminal, demonstrou que todo problema de decisão expressável em MSOL pode ser resolvido em tempo linear para grafos com largura de árvore limitada, estabelecendo assim o chamado Teorema de Courcelle. Esse resultado criou uma ponte entre lógica e algoritmos parametrizados, permitindo resolver uma ampla gama de problemas de forma unificada e eficiente.

https://proceedings.science/p/212215?lang=pt-br

2. A Lógica *LinEMSOL*

A lógica **LinEMSOL** (*Linear Extended Monadic Second-Order Logic*) é uma extensão da lógica monádica de segunda ordem (MSOL) que permite a formulação de *problemas de otimização combinatória* em grafos. Enquanto a MSOL tradicional é capaz de expressar propriedades estruturais e resolver problemas de *decisão* (isto é, verificar se uma dada condição lógica é satisfeita), a LinEMSOL avança ao incorporar uma *função objetivo linear* sobre os conjuntos quantificados, permitindo a formulação de problemas do tipo "encontre a melhor solução que satisfaz determinada propriedade". Formalmente, uma instância de LinEMSOL consiste em:

- Uma fórmula MSOL $\phi(X_1, \ldots, X_k)$ que define o espaço de soluções admissíveis, onde X_i são conjuntos de vértices ou arestas;
- Uma função objetivo da forma $f(X_1, \ldots, X_k) = c_1|X_1| + \cdots + c_k|X_k|$;
- Um critério de otimização: minimizar ou maximizar f, sujeito à satisfação de ϕ.

A lógica LinEMSOL, formalizada por Courcelle et al. [2000], estende o Teorema de Courcelle ao domínio da otimização, permitindo resolver em tempo linear, sobre grafos de clique-width limitada, todos os problemas que possam ser expressos nela, desde que uma decomposição estrutural (k-expressão) seja fornecida. Ela é eficaz para modelar problemas como clique máxima, conjunto independente máximo e cobertura mínima de vértices. No entanto, sua expressividade está restrita a funções lineares sobre cardinalidades e às limitações da MSOL padrão, o que a torna inadequada para problemas com pesos reais, otimização sobre caminhos ou propriedades que exigem aritmética modular.

3. Resultados iniciais

A Tabela 1 apresenta um conjunto de problemas clássicos de otimização sobre grafos, analisando se são expressáveis em lógica monádica de segunda ordem (MSOL) e se podem ser otimizados dentro do modelo estendido *LinEMSOL*. Esse modelo permite não apenas especificar propriedades estruturais de grafos, como na MSOL tradicional, mas também incorporar uma função objetivo linear que pode ser minimizada ou maximizada. A análise desses problemas evidencia não apenas o alcance da expressividade da lógica, mas também suas limitações fundamentais.

Tabela 1: Problemas de otimização otimizáveis (ou parcialmente tratáveis) via *LinEMSOL*, com base em suas limitações lógicas.

Problema	**Características LinEMSOL**	**Referências**
k-Coloração	Sim (min. cores)	Arnborg et al. [1991]; Courcelle et al. [2000]
Caminho Hamiltoniano	Limitado (classe do grafo)	Courcelle [1990]; Courcelle e Engelfriet [2012]
Árvore Geradora Mínima	Parcial (requer pesos)	Courcelle e Mosbah [1993]; Kolaitis e Vardi [2000]

O problema da *k-coloração* é expressável em MSOL para decisão, e em LinEMSOL pode ser formulado como a minimização do número de cores, tornando-o logicamente otimizável.

O *caminho hamiltoniano* também é expressável em MSOL, mas sua otimização via LinEMSOL é limitada a certas classes de grafos com estrutura restrita, como clique-width ou treewidth limitados.

Já a *árvore geradora mínima* exige somas de pesos nas arestas, o que ultrapassa a capacidade da MSOL pura. Sua resolução declarativa requer extensões como MSOL com aritmética.

3.1. Formalização Matemática da Hierarquia de Limitações da LinEMSOL

A hierarquia conceitual das limitações da lógica LinEMSOL pode ser descrita matematicamente com base no tipo de função objetivo e nas capacidades lógicas requeridas para expressar o problema. A seguir, na Figura 1, formalizamos os três níveis identificados.

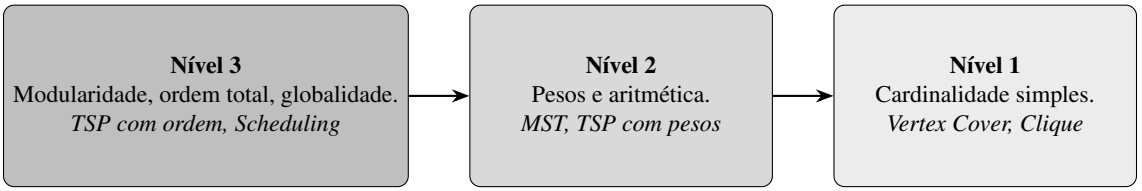


Figura 1: Hierarquia compacta das limitações da lógica LinEMSOL.

A hierarquia proposta baseia-se no grau de expressividade lógica necessário para formular a função objetivo e as restrições do problema de otimização. No primeiro nível, LinEMSOL é suficiente, pois a função objetivo depende apenas da cardinalidade de conjuntos MSOL-definíveis. No segundo nível, surgem problemas que requerem o acúmulo e a comparação de valores numéricos associados aos elementos da estrutura, exigindo operações aritméticas fora do escopo da LinEMSOL. Já no terceiro nível, os problemas impõem propriedades globais mais sofisticadas, como contagem modular, ordens totais ou precedência, que demandam lógicas estendidas como CMSOL ou MSOL com operadores de ordem.

3.1.1. Nível 1: Cardinalidade (tratável por LinEMSOL)

São os problemas baseados exclusivamente na cardinalidade de conjuntos. A função objetivo depende apenas do tamanho do conjunto que satisfaz uma propriedade MSOL-definível:

$$\min_{X \subseteq V} \quad f(X) = |X| \quad \text{sujeito a} \quad \phi(X) \tag{1}$$

onde:

- $\phi(X)$ é uma fórmula em MSOL que impõe a estrutura (ex: independência, clique, cobertura).
- $f(X) = |X|$ representa a minimização da cardinalidade.

Exemplos: Vertex Cover, Independent Set, Clique Máxima.

3.1.2. Nível 2: Pesos e Aritmética (exige MSOL+Arith)

São os problemas em que vértices ou arestas possuem pesos e a otimização requer operações aritméticas (como soma e comparação):

$$\min_{X \subseteq V} \quad f(X) = \sum_{v \in X} w(v) \quad \text{sujeito a} \quad \phi(X) \tag{2}$$

ou, para problemas definidos em arestas:

$$\min_{E' \subseteq E} \quad f(E') = \sum_{e \in E'} w(e) \quad \text{tal que} \quad G' = (V, E') \text{ satisfaz } \phi(E') \tag{3}$$

Exemplos: Árvore Geradora Mínima (MST), Caminho Mínimo, TSP com pesos.

3.1.3. Nível 3: Modularidade, Ordem Total e Globalidade (exige CMSOL ou MSO+Order)

São os problemas que exigem contagem modular, ordenações totais ou propriedades globais que extrapolam a lógica monádica pura:

$$\min_{X \subseteq V} \quad f(X) = |X| \quad \text{sujeito a} \quad \phi(X) \wedge \psi(|X| \bmod k = 0) \tag{4}$$

ou, em problemas com ordem total:

$$\text{Encontrar ordenação } \prec \text{ sobre } V \text{ tal que } \phi(V, \prec) \text{ e } f(\prec) \text{ seja minimizado} \tag{5}$$

Exemplos: Subconjuntos pares, TSP com ordem total, Scheduling com precedência.

Essas formulações demonstram que a expressividade da LinEMSOL é restrita ao primeiro nível, enquanto os demais requerem extensões como MSOL com aritmética, CMSOL [Courcelle e Engelfriet, 2012] ou lógicas com ordem total. Isso reforça a estrutura hierárquica apresentada anteriormente, na qual cada nível representa um salto qualitativo na complexidade lógica necessária para modelar e resolver o problema de otimização.

4. Conclusão

A análise desses casos reforça que, embora a LinEMSOL seja uma ferramenta poderosa para formular e resolver diversos problemas combinatórios em grafos com estrutura controlada, ela possui limitações claras frente a problemas que envolvem pesos, caminhos mínimos ou requisitos aritméticos. Reconhecer essas fronteiras é fundamental para compreender quando a modelagem lógica é apropriada e quando abordagens algorítmicas alternativas devem ser consideradas.

Referências

Arnborg, S., Lagergren, J., e Seese, D. (1991). Easy problems for tree-decomposable graphs. *Journal of Algorithms*, 12(2):308–340.

Büchi, J. R. (1966). Symposium on decision problems: On a decision method in restricted second order arithmetic. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 44, p. 1–11. Elsevier.

Courcelle, B. (1990). The monadic second-order logic of graphs. i. recognizable sets of finite graphs. *Information and computation*, 85(1):12–75.

Courcelle, B. e Engelfriet, J. (2012). *Graph structure and monadic second-order logic: a language-theoretic approach*, volume 138. Cambridge University Press.

Courcelle, B., Makowsky, J. A., e Rotics, U. (2000). Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width. *Theory of Computing Systems*, 33(2):125–150.

Courcelle, B. e Mosbah, M. (1993). Monadic second-order evaluations on tree-decomposable graphs. *Theoretical Computer Science*, 109(1-2):49–82.

Elgot, C. C. (1961). Decision problems of finite automata design and related arithmetics. *Transactions of the American Mathematical Society*, 98(1):21–51.

Kolaitis, P. G. e Vardi, M. Y. (2000). Logical aspects of xml data management. In *Proceedings of the International Conference on Logic in Computer Science (LICS)*, p. 1–11. IEEE.

https://proceedings.science/p/212215?lang=pt-br