57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

Limites para o número de Carathéodory em Grafos de Hamming

Braully Rocha da Silva
Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
DTI-Reitoria – Intituto Federal Goiano (IFGoiano)
Trindade - Universidade Estadual de Goiás (UEG)
braully@discente.ufg.br
braully.silva@{ifgoiano.edu.br,ueg.br}

Erika Morais Martins Coelho
Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Campus Samambaia – Goiânia – GO, 74690-900
erikamorais@inf.ufg.br

Hebert Coelho da Silva
Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)
Campus Samambaia – Goiânia – GO, 74690-900
hebert@inf.ufg.br

Simone Dantas
Universidade Federal Fluminense
Niterói – RJ, 24210-346
sdantas@id.uff.br

RESUMO

Do teorema de Carathéodory surge a definição do número de Carathéodory para grafos. Determinar se um grafo G admite um conjunto de Carathéodory de cardinalidade k na convexidade P_3 é um problema NP-completo. No entanto, para determinadas classes de grafos, é possível obter algoritmos polinomiais e estabelecer limites justos. Motivados por esses avanços, neste trabalho estabelecemos um limite inferior para o número de Carathéodory na classe dos grafos de Hamming de dimensão n, provando que esse valor é no mínimo n.

PALAVRAS CHAVE. Grafos de Hamming, P_3-Convexidade, número de Caratheódory.

ABSTRACT

From Carathéodory's theorem arises the definition of the Carathéodory number for graphs. Determining whether a graph G admits a Carathéodory set of cardinality k in the P_3 convexity is an NP-complete problem. However, for certain classes of graphs, polynomial-time algorithms and tight bounds can be obtained. Motivated by these results, in this work we establish a lower bound for the Carathéodory number in the class of Hamming graphs of dimension n, proving that this value is at least n.

KEYWORDS. Graph Hamming, P_3-Convexity, Carathéodory number.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

1. Introdução

Neste trabalho, consideramos grafos finitos, simples e não direcionados. Grafos são estruturas combinatoriais amplamente estudadas na atualidade e representam uma importante ferramenta para modelar inúmeros problemas reais. São fundamentais para a análise e solução de problemas em redes sociais, pois permitem representar de forma precisa as interações entre indivíduos ou entidades.

Considere uma equipe de pesquisadores estudando a disseminação de informações em uma rede social com R indivíduos. Cada vértice de um grafo representa um indivíduo, e as arestas representam conexões de comunicação entre eles. Suponha que o objetivo seja espalhar uma informação (por exemplo, uma campanha de conscientização) a partir de um subconjunto inicial S de indivíduos escolhidos da rede.

A informação se propaga por influência — isto é, um indivíduo pode adotar a informação se um número suficiente de seus contatos diretos já o fez. Após a propagação, o conjunto T representa todos os indivíduos que receberam a informação. Agora, suponha que os pesquisadores queiram garantir que um indivíduo específico $u \in T$, considerado altamente influente ou estratégico, seja alcançado pela campanha. Como há custos envolvidos em convencer inicialmente as pessoas de S, deseja-se minimizar o tamanho desse conjunto inicial, sem deixar de atingir u.

Determinar o número mínimo de indivíduos que precisam ser inicialmente convencidos para que a propagação da informação leve inevitavelmente à inclusão de u no grupo final, considerando todas as possíveis escolhas de subconjuntos $S \subseteq R$ e vértices $u \in T$, equivale a calcular o número de Carathéodory do grafo que modela a rede social.

Para um grafo G, $V(G)$ e $E(G)$ denotam, respectivamente, seus conjuntos de vértices e arestas. Uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $V(G)$ é uma *convexidade* se $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}$ for fechada sob interseção. Cada elemento de $\mathcal{C}$ é um *conjunto convexo*, e o menor conjunto convexo que contém $S \subseteq V(G)$ é o *fecho convexo* $H_{\mathcal{C}}(S)$. Se $H_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$, então S é chamado *conjunto envoltório* de G. Um parâmetro bastante estudado da convexidade é o *número de envoltória*, que é determinar a menor cardinalidade de um conjunto envoltório.

As convexidades mais usuais são definidas através de um conjunto $\mathcal{P}$ de caminhos em grafos. Neste caso, um subconjunto $C \subseteq V(G)$ é convexo precisamente quando C contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de $\mathcal{P}$ cujos vértices extremos estão também em C. Quando $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os caminhos mínimos em G então C é a *convexidade geodética*, [Harary e Nieminen, 1981; Chandran S.V. et al., 2022]. Quando $\mathcal{P}$ é a coleção de todos os caminhos induzidos de G, então C é a *convexidade monofônica*, [Duchet, 1988; Dourado et al., 2020]. Quando $\mathcal{P}$ é o conjunto de todos os caminhos de comprimento dois entre dois vértices, então C é a *convexidade* P_3, [Barbosa et al., 2012; Coelho et al., 2019, 2023, 2014, 2015].

Um dos resultados no estudo de conjuntos convexos em $\mathbb{R}^d$ é o *Teorema de Carathéodory* Carathéodory [1911]. Ele afirma que se um ponto u pertence ao fecho convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$, então existe um subconjunto $F \subseteq S$ contendo no máximo $d+1$ elementos tal que u também pertence ao fecho convexo de F.

O *número de Carathéodory* é o menor valor c tal que, para qualquer $S \subseteq V(G)$ e qualquer $u \in H_{\mathcal{C}}(S)$, exista $F \subseteq S$ com $|F| \leq c$ e $u \in H_{\mathcal{C}}(F)$. Um *conjunto de Carathéodory* S satisfaz $\partial H_{\mathcal{C}}(S) \neq \emptyset$, onde $\partial H_{\mathcal{C}}(S) = H_{\mathcal{C}}(S) \setminus \bigcup_{u \in S} H_{\mathcal{C}}(S \setminus \{u\})$. Alternativamente, o *número de Carathéodory*, $c_{\mathcal{C}}(G)$, pode ser definido como a cardinalidade máxima de um conjunto de Carathéodory de $\mathcal{C}$.

O número de Carathéodory recebeu destaque nos últimos anos, sendo estudado em algumas convexidades. Na convexidade monofônica, $c(G) = 1$ para grafos completos e 2 para outros grafos Duchet [1988]. Considerando a convexidade geodésica, é NP-completo decidir quando $c(G)$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

é pelo menos k, mesmo quando restrito a grafos bipartidos e $c(G)$ é no máximo 3 para grafos split Coelho et al. [2014]. Em Anand et al. [2020] foi apresentada caracterizações para algumas classes, como grafos de intervalo unitário e potência de ciclos, que possibilitou determinar o número de Carathéodory em tempo polinomial.

Nosso trabalho terá seu enfoque considerando $\mathcal{C}$ a convexidade P_3, assim omitiremos o subscrito $\mathcal{C}$ da notação. Nesta convexidade a determinação do número de Carathéodory é um problema NP-completo, mesmo para grafos bipartidos Barbosa et al. [2012]. Porém para algumas classes é possível determinar resultados polinomiais e limites justos para árvores, grafos blocos Barbosa et al. [2012], cordais Coelho et al. [2014], P_4-redutíveis e co-árvores Hon et al. [2016], alguns produtos de grafos Cappelle et al. [2017], e grafos de diâmetro 2 Coelho et al. [2023]. Para grafos circulantes foi estabelecido um limite inferior Silva et al. [2024]. Estudos recentes exploraram modelos de influência dinâmica e seleção de conjunto-alvo utilizando parâmetros de convexidade, destacando a relevância do número de Carathéodory Frasca e Rossi [2022]; Keiler et al. [2021]; Araújo e Sampaio [2023]

Inspirados nos resultados do número de Carathéodory na convexidade P_3, exploramos limites para a classe dos grafos de Hamming, que são uma subclasse dos produtos Cartesianos.

Os grafos de Hamming são obtidos a partir do produto cartesiano de grafos completos. Formalmente, o *grafo de Hamming* $\mathcal{H} = K_{r_1}\Box K_{r_2}\Box \cdots \Box K_{r_n}$ é definido como o produto cartesiano entre os grafos K_{r_i} em que cada K_{r_i} é um grafo completo de ordem r_i, com $n > 1$ e $r_i > 1$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Alternativamente, seja S um conjunto com r elementos e n um inteiro positivo.O *grafo de Hamming* $\mathcal{H}(n, r)$ tem como conjunto de vértices o conjunto de n-tuplas ordenadas de elementos S ou sequências S de tamanho n. Dois vértices são adjacentes se eles diferem em exatamente uma coordenada, isto é, se sua distância de Hamming é um. Dizemos que um grafo de Hamming $\mathcal{H}(n, r)$ possui dimensão n.

Podemos ver na Figura 1 um exemplo de grafo de Hamming $\mathcal{H} = K_3\Box K_3$, que é o produto cartesiano entre K_3 por K_3. Observe que $V(K_3) = \{1, 2, 3\}$ e cada vértice de $\mathcal{H}$ é representado por uma tupla de tamanho dois, onde cada elemento da tupla representa um vértice do grafo completo correspondente. Assim, o conjunto de vértices é $V(\mathcal{H}) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ e o conjunto de arestas é formado por pares de vértices que diferem em exatamente um elemento da tupla. Por exemplo, $(1, 1)$ e $(1, 2)$ estão conectados por uma aresta, enquanto $(1, 1)$ e $(2, 2)$ não estão.

Os grafos de Hamming são interessantes por sua relação com os códigos de correção de erros (Barta e Montemanni [2017]; El-Shanawany et al. [2022]). Mais especificamente, os vértices de um grafo de Hamming representam sequências (ou palavras) de comprimento fixo formadas por símbolos de um alfabeto e a distância de Hamming entre palavras é usada para detectar e corrigir erros em transmissões de dados. Dessa forma, os grafos de Hamming ajudam a visualizar e analisar a estrutura dos códigos de correção de erros, tornando-se uma ferramenta importante na teoria da codificação.

Em 2020 Brešar e Valencia-Pabon [2020] provaram que o número de envoltória na convexidade P_3 de um grafo de Hamming $\mathcal{H}(n, r)$ é $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1$. Motivados por esse trabalho, nosso objetivo é determinar limites para o número de Carathéodory para a classe dos Grafos de Hamming, exibindo conjuntos de Carathéodory de cardinalidade n para grafos de Hamming $\mathcal{H}(n, r)$. Na Seção 2 apresentaremos alguns conceitos básicos de grafos e resultados preliminares. Na Seção

2. Preliminares

Esta seção contém mais algumas definições e terminologias fundamentais utilizadas ao longo do artigo.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

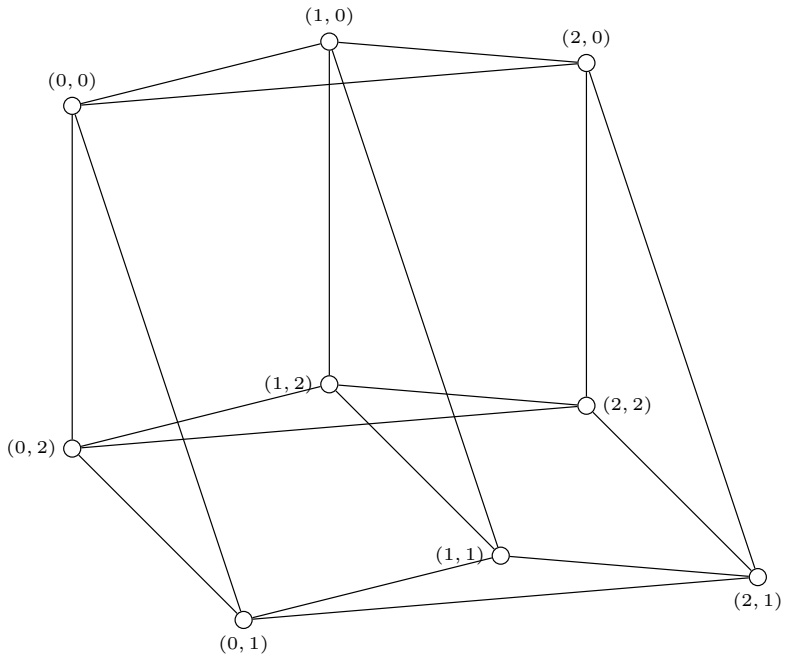


Figura 1: Exemplo de um grafo de Hamming $K_3 \square K_3$

Seja G um grafo, $v \in V(G)$ e S um subconjunto de $V(G)$. A *vizinhança aberta* de um vértice v é dada por $N(v) = \{w \in V(G) | vw \in E(G)\}$. Um *subgrafo* H de um grafo G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Seja S um subconjunto de vértices de G, o *subgrafo induzido* por S, denotado por $G[S]$, ou $\langle S \rangle$, possui S como conjunto de vértices, e o subconjunto de arestas de G que tenham as duas extremidades em S. Um *caminho* entre dois vértices u e v é uma sequência de vértices $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tal que $u_1 = u$, $u_k = v$ e $u_i u_{i+1} \in E(G)$ para todo $1 \leq i < k$.

Os primeiros resultados conhecidos sobre o número de Carathéodory na convexidade foram exibidos por P_3 Barbosa et al. [2012]. Além de demonstrarem que é que decidir se um grafo bipartido possui um conjunto de Carathéodory de cardinalidade k é NP-difícil e apresentaram um limite superior para o número de Carathéodory para grafos gerais, eles provaram diversas propriedades fundamentais dos conjuntos de Carathéodory.

Proposição 1. *Barbosa et al. [2012] Seja G um grafo e S um conjunto Carathéodory de G.*

(a) Se G tem ordem pelo menos 2 e é um grafo completo, um caminho ou um ciclo, então $c(G) = 2$.

(b) Se S tem pelo menos dois elementos, então para todo vértice $u \in S$, existe um caminho uvw de comprimento 2 tal que $v \in V(G) \setminus H_G(S \setminus \{u\})$ e $w \in H_G(S \setminus \{u\})$.

(c) Nenhum subconjunto próprio $S' \subset S$ satisfaz $H_G(S') = V(G)$.

(d) O envoltório convexo $H_G(S)$ induz um subgrafo conexo de G.

Observe que uma das propriedades elencadas no resultado anterior afirma que a envoltória convexa de todo conjunto de Carathéodory de um grafo G é um subgrafo conexo de G. Seja $\mathcal{X} = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_n$, com $n \geq 1$. Brešar e Valencia-Pabon [2020], mostraram que todo conjunto convexo e conexo de $\mathcal{X}$ é formado pelo produto cartesiano entre conjuntos convexos de cada grafo G_i, com $1 \leq i \leq n$.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

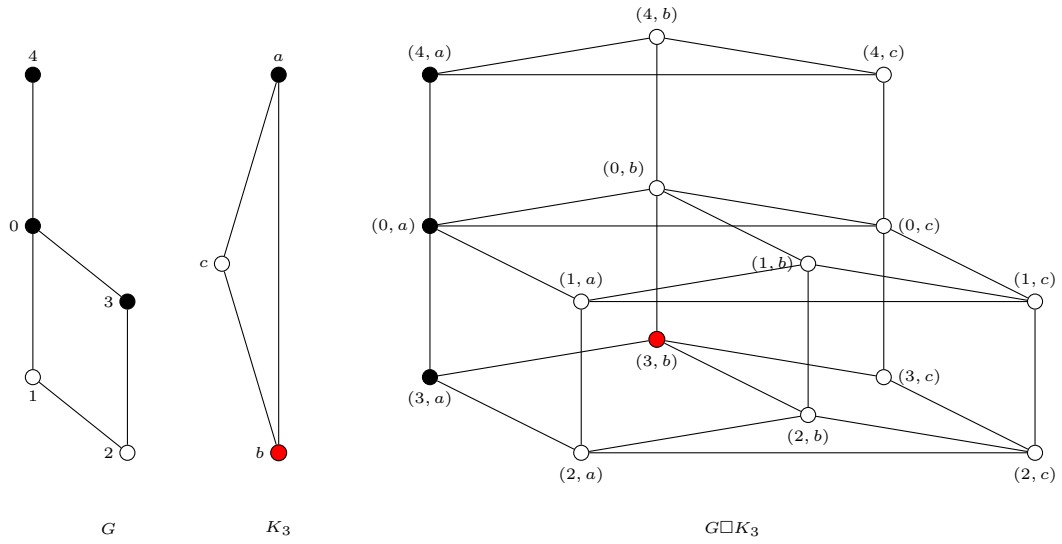


Figura 2: Grafo de exemplo para o Teorema 2

Teorema 2. *Brešar e Valencia-Pabon [2020] Seja $\mathcal{X} = G_1 \square G_2 \square \cdots \square G_n$, com $n \geq 1$. Se S é um conjunto convexo de $\mathcal{X}$ e o subgrafo induzido $\langle S \rangle$ é conexo, então $S = Z_1 \times \cdots \times Z_n$, onde cada Z_i é um conjunto convexo no grafo G_i.*

Para ilustrar o resultado do Teorema 2, considere a Figura 2, onde o grafo $\mathcal{X}$ é um grafo produto cartesiano entre G e K_3. O conjunto $S = \{(4, a), (0, a), (3, a)\}$ é um conjunto convexo de $\mathcal{X}$, e o subgrafo induzido $\langle S \rangle$ é conexo, então pelo Teorema 2, S é o produto cartesiano de um conjunto convexo de G e outro conjunto convexo de K_3, neste caso $S = \{4, 0, 3\} \times \{a\}$, onde $S_1 = \{4, 0, 3\}$ é um conjunto convexo de G e $S_2 = \{a\}$ é um conjunto convexo de K_3. Assim, o conjunto S é o produto cartesiano entre os conjuntos convexos S_1 e S_2.

De forma contrária também podemos concluir que $S = \{(4, a), (0, a), (3, a), (3, b)\}$ apesar de induzir um subgrafo conexo de $\mathcal{X}$, não é um conjunto convexo, pois não é o produto cartesiano entre conjuntos convexos de G e K_3, $S = \{4, 0, 3\} \times \{a, b\}$, onde $S_1 = \{4, 0, 3\}$ é um conjunto convexo de G e $S_2 = \{a, b\}$ não é um conjunto convexo de K_3. Portanto, o Teorema 2 nos fornece uma caracterização dos conjuntos convexos em produtos de grafos e também em particular em grafos de Hamming.

Em Cappelle et al. [2017] foi demonstrado o número de Caratheódory para o produto de dois grafos completos não triviais conforme o teorema a seguir.

Teorema 3. *Cappelle et al. [2017] Considere $n_1, n_2 \geq 2$ e $G = K_{n_1} \square K_{n_2}$. Então $c(G) = 2$.*

Esse resultado é particularmente interessante, pois estabelece que o número de Carathéodory para grafos de Hamming de dimensão 2 é igual a 2. No entanto, para dimensões superiores, o número de Carathéodory, até onde sabemos, ainda não tinha sido investigado. Motivados para investigar essa questão, na próxima seção apresentamos um limite inferior para o número de Carathéodory para grafos de Hamming de dimensão $n > 2$.

3. Resultados

A seguir vamos apresentar uma série de resultados que nos permitem estabelecer um limite inferior para o número de Carathéodory para grafos de Hamming.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

Em particular, focamos no grafo de Hamming $\mathcal{H}$ com dimensão $n > 2$, pois o número de Carathéodory para grafos de Hamming de dimensão 2 já foi estabelecido em trabalho anterior Cappelle et al. [2017].

Considere o grafo $\mathcal{H} = G\square K_n$, formado pelo produto cartesiano de um grafo qualquer G e um grafo completo com n vértices. Iniciaremos mostrando como obter um conjunto de envoltória em $\mathcal{H}$ a partir de um conjunto de envoltória no grafo G.

Lema 4. *Seja G um grafo conexo, K_n um grafo completo e $\mathcal{H} = G\square K_n$. Se S é um conjunto envoltória de G, $u, v \in V(K_n)$ e $w \in V(G)$, então $S' = S \times \{u\} \cup (w, v)$ é um conjunto envoltória de $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Considere S um conjunto envoltória de G. De acordo com a definição do produto cartesiano, o conjunto $H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\})$ induz um subgrafo de $\mathcal{H}$ isomorfo a G.

$S_1 = H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\})$ e $S_2 = V(\mathcal{H}) - S_1$. Como G é conexo, existe em $\mathcal{H}[S_2]$ um caminho entre (w, v) e qualquer outro vértice (x, y), tal que $x \in G$ e $y \in K_n$ com $y \neq v$. Como K_n é um grafo completo, todo vértice de $\mathcal{H}[S_2]$ tem um vizinho em S_1. Além disso, $(w, v) \in S'$, então temos que $(x, y) \in H_{\mathcal{H}}(S')$, para todo $x \in G$ com $x \neq w$ e para todo $y \in K_n$ com $y \neq v$.

□

Considere o grafo G ilustrado na Figura 3 e tomemos o conjunto $S = \{1, 2, 4\}$ como um subconjunto de vértices de G. É possível verificar que S é um conjunto de envoltória de G, uma vez que a envoltória convexa abrange todos os vértices de G. Agora, consideremos o produto cartesiano $\mathcal{H} = G\square K_2$, que é formado a partir de G e o grafo completo K_2. Nesse grafo, é possível verificar que há duas cópias do grafo G unidas por arestas entre seus pares equivalentes. Observa-se que $S' = \{1, 2, 4\} \times \{0\} \cup \{(0, 1)\}$ é um conjunto de envoltória de $\mathcal{H}$.

Nosso próximo resultado estabelece que um vértice p pertence à envoltória convexa de um subconjunto de vértices de um grafo G sempre que o vértice (p, v) pertence à envoltória convexa de um subconjunto S'' de vértices do produto cartesiano $\mathcal{H} = G\square K_n$, sendo S'' formado por vértices selecionados de G e K_n. Em outras palavras, a inclusão de (p, v) na envoltória convexa de $\mathcal{H}$ implica a inclusão de p na envoltória convexa correspondente em G.

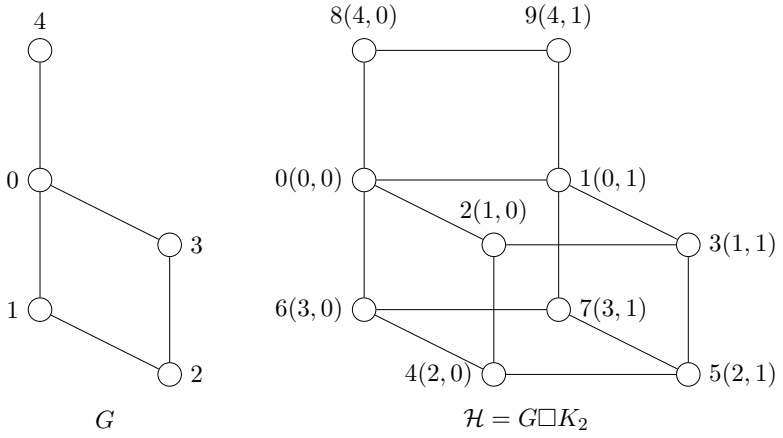


Figura 3: Exemplo do Lema 4

Lema 5. *Seja $\mathcal{H} = G\square K_n$, $S \subset V(G)$, $w \in H_G(S)$ e $u, v \in V(K_n)$. Se $p \notin H_G(S)$ então $(p, x) \notin H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\} \cup \{(w, v)\})$, para todo $x \in V(K_n)$.*

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

Demonstração. Considere $S' = S \times \{u\}$ e $S'' = S' \cup \{(w, v)\}$. Suponha que $p \notin H_G(S)$ e, por contradição que $(p, x) \in H_{\mathcal{H}}(S'')$, para algum $x \in V(K_n)$. Vamos analisar dois casos distintos:

Caso 1: $H_{\mathcal{H}}(S'')$ induz um subgrafo conexo em $\mathcal{H}$. Pelo Teorema 2 temos que $H_{\mathcal{H}}(S'') = H_G(S) \times H_{K_n}(\{u, v\})$. Seja $x \in V(K_n))$. Se $(p, x) \in H_{\mathcal{H}}(S'')$ então $p \in H_G(S)$. Uma contradição.

Caso 2: $H_{\mathcal{H}}(S'')$ induz um subgrafo não conexo em $\mathcal{H}$. Sejam $G_1, G_2, \cdots, G_k$ as componentes conexas de $H_{\mathcal{H}}(S'')$. Suponha, por contradição, que $(p, x) \in H(S'')$, para algum $x \in V(K_n)$. Se (p, x) e (w, v) pertencem a mesma componente conexa G_j de $H_{\mathcal{H}}(S'')$, então, ao considerarmos $H_{\mathcal{H}}(S'') = G_j$ concluímos, pelo Caso 1, que $p \in H_G(S)$. Uma contradição.

Então a única possibilidade é (p, x) e (w, v) estarem em componentes distintas de $H(S'')$. Isso implica em não haver um caminho entre eles no subgrafo induzido por $H_{\mathcal{H}}(S'')$. Logo, $(p, x) \in H(S')$. Portanto, $p \in H_G(S)$. Uma contradição.

Portanto, a única possibilidade é que (p, x) e (w, v) pertençam a componentes conexas distintas de $H(S'')$. Isso implica que não existe um caminho entre esses dois vértices no subgrafo induzido por $H_{\mathcal{H}}(S'')$. Assim, concluímos que $(p, x) \in H_{\mathcal{H}}(S')$ o que, por definição do produto cartesiano, implica que $p \in H_G(S)$. Chegamos, portanto, a uma contradição.

Portanto, Se $p \notin H_G(S)$ então $(p, x) \notin H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\} \cup \{(w, v)\})$, para todo $x \in V(K_n)$. □

A seguir apresentamos a demonstração do Lema 6 que constitui o principal resultado utilizado na prova do limite inferior para o número de Carathéodory de um grafo de Hamming. Esse lema estabelece as condições sob as quais é possível construir um conjunto de Carathéodory no produto cartesiano $\mathcal{H} = G \square K_n$ a partir de um conjunto de Carathéodory de G.

Lema 6. *Seja $\mathcal{H} = G \square K_n$, onde G é um grafo conexo, $S \subset V(G)$ e $u, v \in V(K_n)$, com $u \neq v$. Suponha que S seja um conjunto envoltória e Carathéodory em G, e exista um vértice $w \in V(G)$ tal que $w \in H_G(S - \{x\})$ para todo $x \in S$. Então, o conjunto $S'' = S \times \{u\} \cup (w, v)$ é um conjunto envoltória e Carathéodory em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. É fácil ver que S'' é um conjunto envoltória de $\mathcal{H}$, já que S e (w, v) satisfazem as condições do Lema 4. Agora, vamos provar que S'' é um conjunto Carathéodory de $\mathcal{H}$.

Considere $u \in K_n$ e $S' = S \times \{u\}$. Como S é um conjunto envoltória de G, então o subgrafo de $\mathcal{H} = G \square K_n$ induzido por $H(S')$ induz um subgrafo em $\mathcal{H}$ que é isomorfo a G.

Seja $p \in \partial H_G(S)$. Observe que $H_{\mathcal{H}}(S')$ é um conjunto Carathéodory de $\mathcal{H}$ e que $(p, u) \in \partial H_{\mathcal{H}}(S')$. Como todo vértice $(z, v) \in \mathcal{H}$ satisfaz $|N((z, v)) \cap H_{\mathcal{H}}(S')| = 1$, onde $z \in V(G)$, segue-se que tanto (p, v) quanto (w, v) não estão em $H_{\mathcal{H}}(S') = H_{\mathcal{H}}(S'' - (w, v))$.

Mostraremos que $(p, v) \in \partial H(S'')$. Agora considere $(x, u) \in S''$ e $S''' = S'' - \{(x, u)\}$. Como S é um conjunto Carathéodory de G e $N((w, v)) \cap \{(y, u) | y \in V(G)\} = \{(w, u)\}$, temos que $(x, u) \notin H_{\mathcal{H}}(S \times \{u\})$. Além disso, como S é um conjunto Carathéodory de G, $(p, u) \notin H(S \times \{u\})$. Portanto, pelo Lema 5 $(p, v) \notin H(S \times \{u\} \cup (w, v))$. Portanto, $(p, v) \in \partial H(S'')$. □

Utilizando o Lema 6 podemos estabelecer um limite inferior para o número de Carathéodory de um grafo de Hamming. A estratégia da demonstração consiste em apresentar um procedimento construtivo que permite obter um conjunto de Carathéodory para o grafo $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2}, \cdots \square K_{r_n}$ a partir de um conjunto de Carathéodory previamente conhecido para o subproduto $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2}, \cdots \square K_{r_{n-1}}$.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

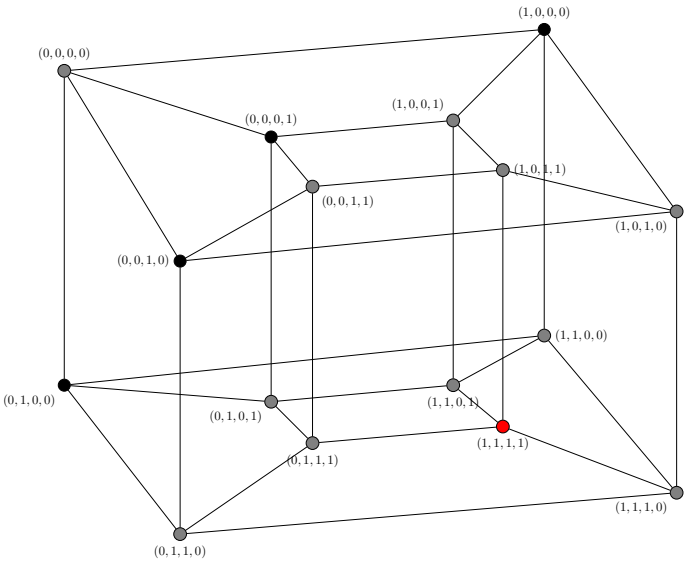


Figura 4: Grafo tesserato $\mathcal{H} = K_2 \square K_2 \square K_2 \square K_2$

Teorema 7. *Seja $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2}, \cdots \square K_{r_n}$ um grafo de Hamming não trivial de dimensão n, com $n \geq 3$. Então $c(\mathcal{H}) \geq n$.*

Demonstração. Considere $S = \{(0, 0, \cdots, 0, 1), (0, 0, \cdots, 1, 0), \cdots, (1, 0, \cdots, 0, 0)\}$ um subconjunto com n vértices do grafo de Hamming $\mathcal{H}$. Vamos provar por indução em n que S é um conjunto de Carathéodory do grafo $\mathcal{H}$.

Para $n = 3$, considere o conjunto $S = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ um conjunto do grafo $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2} \square K_{r_3}$. Observe que $(1, 1, 1) \in \partial\mathcal{H}$ e temos $w = (0, 0, 0) \in H(S - x)$ para todo $x \in S$. Portanto $c(\mathcal{H}) \geq 3$.

Agora, suponha que para um grafo de Hamming $\mathcal{H}' = K_{r_1} \square K_{r_2}, \cdots \square K_{r_{n-1}}$, com $n > 2$, que S seja um conjunto de Carathéodory. Seja K_m, com $m \geq 2$, um grafo completo com conjunto de vértices $V(K_m) = \{0, 1, \cdots, m - 1\}$. Considere ainda, $w = (0, 0, \cdots, 0, 0) \in V(\mathcal{H})$, $u = 0$ e $v = 1$. Desde que w é vizinho de todo vértice em S, temos que $w \in H_{\mathcal{H}'}(S - \{x\})$ para todo $x \in S$. Logo pelo Lema 6 o conjunto $S'' = S \times \{u\} \cup (w, v)$ é um conjunto de Carathéodory, da forma descrita, para o grafo $\mathcal{H} = K_{r_1} \square K_{r_2}, \cdots \square K_{r_n}$. Portanto, como mostramos que o conjunto S com cardinalidade n, é um conjunto de Carathéodory do grafo $\mathcal{H}$, concluímos que $c(\mathcal{H}) \geq n$.

□

Vejamos um exemplo do Teorema 7. Para tal vamos estabelecer o grafo tesserato, que é um grafo de Hamming obtido através do produto cartesiano de quatro grafos completos com 2 vértices. Pelo Teorema 2 sabemos que o grafo tem um conjunto de Carathéodory de tamanho 4. Podemos verificar que o conjunto $S = \{(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ é um conjunto de Carathéodory do grafo tesserato, com $(1, 1, 1, 1) \in \partial H(S)$.

4. Conclusões

Além de suas diversas aplicações, o número de Carathéodory é conhecido por ser um problema NP-difícil, mesmo quando restrito a grafos bipartidos. Essa complexidade torna o parâmetro especialmente relevante e objeto de amplo interesse na literatura, tanto na tentativa de verificar se sua dificuldade se mantém em classes mais restritas de grafos quanto na busca por algoritmos de tempo polinomial aplicáveis a essas classes específicas.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

Neste artigo, estabelecemos um limite inferior para o número de Carathéodory para a classe dos grafos de Hamming. Nosso principal resultado demonstra que, para um grafo de Hamming $\mathcal{H}$, esse número é sempre maior ou igual a n, sendo n a dimensão do grafo. É importante ressaltar que esse limite inferior é definido exclusivamente em função da dimensão, não dependendo do número total de vértices do grafo.

Como direções para trabalhos futuros, propomos a investigação de um limite superior para o número de Carathéodory em grafos de Hamming. Vale destacar que, caso se comprove que o limite superior também é n, o número de Carathéodory poderá ser computado em tempo polinomial para essa classe específica de grafos.

Referências

Anand, B. S., Chandran S.V., U., Changat, M., Dourado, M. C., Hossein Nezhad, F., e Narasimha-Shenoi, P. G. (2020). On the carathéodory and exchange numbers of geodetic convexity in graphs. *Theoretical Computer Science*, 804:46–57. ISSN 0304-3975. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397519306917.

Araújo, R. e Sampaio, R. (2023). Domination and convexity problems in the target set selection model. *Discrete Applied Mathematics*, 330:14–23. ISSN 0166-218X. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X2200484X.

Barbosa, R. M., Coelho, E. M., Dourado, M. C., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2012). On the Carathéodory Number for the Convexity of Paths of Order Three. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(3):929–939. ISSN 0895-4801. URL http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/110828678.

Barta, J. e Montemanni, R. (2017). Hamming graphs and permutation codes. In *2017 Fourth International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry (MCSI)*, p. 154–158.

Brešar, B. e Valencia-Pabon, M. (2020). On the p3-hull number of hamming graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 282:48–52. ISSN 0166-218X.

Cappelle, M. R., Coelho, H., e Coelho, E. M. M. (2017). The carathéodory number of the p 3 convexity of cartesian product of graphs. *Anais do XLIX - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 3350–3358. URL http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2017/pdf/169426.pdf.

Carathéodory, C. (1911). Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. *Rend. del Circ. Mat. Palermo*, 32(1):193–217. ISSN 0009-725X.

Chandran S.V., U., Dourado, M. C., e Thankachy, M. G. (2022). Computational and structural aspects of the geodetic and the hull numbers of shadow graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 307:50–61. ISSN 0166-218X. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X21004236.

Coelho, E. M. M., Dourado, M. C., e Sampaio, R. M. (2015). Inapproximability results for graph convexity parameters. *Theoretical Computer Science*, 600:49 – 58. ISSN 0304-3975. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397515005794.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br

Coelho, E. M., Coelho, H., Nascimento, J. R., e Szwarcfiter, J. L. (2019). On the p3-hull number of some products of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 253:2–13. ISSN 0166-218X. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X18302440. 14th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization (CTW 2016).

Coelho, E. M., Coelho, H., e Rocha, B. (2023). P3-carathéodory number on graphs with diameter two (brief announcement). *Procedia Computer Science*, 223:388–390. ISSN 1877-0509. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050923010293. XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2023).

Coelho, E. M., Dourado, M. C., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2014). The Carathéodory number of the convexity of chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 172:104–108. ISSN 0166218X. URL http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0166218X14001279.

Dourado, M. C., Ponciano, V. S., e da Silva, R. L. O. (2020). On the monophonic rank of a graph. *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, 24. URL https://api.semanticscholar.org/CorpusID:222134192.

Duchet, P. (1988). Convex sets in graphs, ii. minimal path convexity. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44(3):307–316. ISSN 0095-8956. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895688900391.

El-Shanawany, R., El-Sheikh, S. A., El-Sheikh, S. A., Halawa, S. R., e Shabana, H. (2022). Graph based approach for error-detecting and correcting codes. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 16(6):995–1003. ISSN 2325-0399. URL http://dx.doi.org/10.18576/amis/160616.

Frasca, P. e Rossi, F. (2022). Caratheodory solutions and their associated graphs in opinion dynamics with topological interactions*. *IFAC-PapersOnLine*, 55(30):436–441. ISSN 2405-8963. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896322027252. 25th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS 2022.

Harary, F. e Nieminen, J. (1981). Convexity in graphs. *Journal of Differential Geometry*, 16(2):185 – 190. URL https://doi.org/10.4310/jdg/1214436096.

Hon, W.-K., Kloks, T., e Liu, H.-H. (2016). On the $p3$-convexity of some classes of graphs with few p4s and permutation graphs. In *Proceedings of the Australasian Computer Science Week Multiconference*, ACSW '16, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery. ISBN 9781450340427. URL https://doi.org/10.1145/2843043.2843055.

Keiler, L., Lima, C. V., Maia, A. K., Sampaio, R., e Sau, I. (2021). Target set selection with maximum activation time. *Procedia Computer Science*, 195:86–96. ISSN 18770509. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050921021530.

Silva, B. R. d., Coelho, E. M. M., e Silva, H. C. d. (2024). P3-carathéodory em grafos circulantes. In *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, volume Vol 56, 2024 of *SBPO 2024*. Galoa. URL http://dx.doi.org/10.59254/sbpo-2024-193668.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212182
https://proceedings.science/p/212182?lang=pt-br