

NÚMERO MÁXIMO DE RANKINGS DISTINTOS EM PROBLEMAS DE MCDA: UMA COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS LINEARES E NÃO LINEARES

Glaucia Jardim Pissinelli

Faculdade de Tecnologia (FT)- Unicamp
R. Paschoal Marmo, 1888 - Jardim Nova Italia, Limeira - SP, 13484-332
g049933@dac.unicamp.br

Leonardo Tomazeli Duarte

Faculdade de Ciências Aplicadas (FCA) - Unicamp
R. Pedro Zaccaria, 1300, Limeira - SP, 13484-350
leonardo.duarte@fca.unicamp.br

Yannick Deville

Institut de Recherche en Astrophysique et Planetologie (IRAP), Universite Paul Sabatier Toulouse
3, Toulouse-FR
9, avenue du Colonel Roche, 31028 Toulouse-FR
Yannick.Deville@irap.omp.eu

RESUMO

Este trabalho investiga a capacidade de diferentes modelos de agregação em gerar rankings distintos em problemas de decisão multicritério. São comparados quatro métodos: modelo linear, integral de Choquet (completa e 2-aditiva) e redes neurais monótonas. Por meio de simulações de Monte Carlo, com matrizes de decisão fixas e variação dos parâmetros dos modelos, estima-se o número de ordenamentos distintos atingíveis em diferentes configurações de critérios e alternativas. Os resultados indicam que os modelos não lineares produzem maior diversidade de rankings, com destaque para as redes neurais monótonas. A abordagem proposta contribui para compreender o comportamento dos modelos e apoiar a escolha de métodos de agregação em contextos específicos.

PALAVRAS CHAVE. Apoio à Decisão Multicritério (MCDA). Métodos de Agregação. Exploração de Rankings.

Tópicos (ADM – Métodos Multicritério para Ajuda de Tomada de Decisão)

ABSTRACT

This study investigates the ability of different aggregation models to generate distinct rankings in multi-criteria decision-making (MCDA) problems. Four methods are compared: the linear model, the Choquet integral (complete and 2-additive), and monotonic neural networks. Using Monte Carlo simulations with fixed decision matrices and varying model parameters, the number of attainable distinct rankings is estimated under different configurations of criteria and alternatives. The results indicate that nonlinear models generate a greater diversity of rankings, with emphasis on monotonic neural networks. The approach adopted in this article provides a complementary perspective on the behavior of the models and may contribute to the selection of aggregation methods in specific contexts.

KEYWORDS. Multicriteria Decision Aiding (MCDA). Aggregation Methods. Ranking Exploration.

Paper topics (ADM - Multi-Criteria Decision Aiding Methods)

1. Introdução

A geração de rankings distintos é um desafio em problemas de decisão multicritério (MCDA), nos quais é necessário classificar alternativas com base em múltiplos critérios possivelmente conflitantes Keeney [1993]. Diversos métodos de agregação foram propostos para representar diferentes estruturas de preferência. No entanto, embora essa diversidade ofereça maior adaptabilidade, ela também torna mais complexa a escolha do método mais apropriado Roy [2013].

A capacidade dos modelos de agregação em produzir rankings distintos está diretamente relacionada à sua flexibilidade para capturar diferentes estruturas de preferência. Métodos lineares, como a soma ponderada simples, assumem independência entre os critérios, o que limita o conjunto de ordenações possíveis. Por outro lado, métodos não lineares, como a integral de Choquet (completa e 2-aditiva) [Grabisch et al., 2000] e redes neurais monótonas [Daniels e Velikova, 2010; Lang, 2005], permitem modelar interações entre critérios, ampliando a capacidade de representação das preferências.

É importante também compreender como os métodos de agregação exploram o espaço de soluções viáveis, em particular sua capacidade de gerar diferentes rankings a partir de uma mesma matriz de decisão, por meio da variação de seus parâmetros. Esse aspecto ainda é pouco abordado na literatura, em parte devido à complexidade combinatória envolvida, conforme discutido em [Triantaphyllou e Shu, 2001].

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo realizar uma análise comparativa, por meio de simulações de Monte Carlo, para estimar o número de rankings distintos gerados por diferentes modelos de agregação. São considerados o modelo linear, a integral de Choquet (completa e 2-aditiva) e redes neurais monótonas. O estudo busca compreender como a variação dos parâmetros influencia a diversidade de ordenações geradas, mantendo a matriz de decisão fixa. A seguir, são descritos os modelos avaliados, a metodologia empregada nas simulações de Monte Carlo, os resultados obtidos e, por fim, as principais conclusões do estudo.

2. Definição do problema

Em um problema de decisão multicritério, há um conjunto de m alternativas $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ deve ser avaliado segundo um conjunto de n critérios $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Cada alternativa a_i é associada a um vetor de desempenho $\mathbf{d}_i = [d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}]$, no qual d_{ij} representa a avaliação da alternativa a_i em relação ao critério c_j . O conjunto de todos os vetores $\mathbf{d}_i, \forall i = 1, \dots, m$ formam a matriz de decisão $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Um método de agregação é uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que atribui a cada alternativa um valor escalar $v_i = f(\mathbf{d}_i)$, refletindo sua avaliação agregada. A partir dos valores agregados $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, define-se um ranking das alternativas. Formalmente, o ranking r é uma permutação $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ dos índices das alternativas tal que $v_{\pi_1} > v_{\pi_2} > \dots > v_{\pi_m}$, ou seja, a alternativa a_{π_1} ocupa a primeira posição, seguida por a_{π_2} e assim por diante, até a_{π_m} .

Dado um modelo de agregação e uma matriz de decisão D fixa, um ranking r é dito *atingível* se existe um conjunto de parâmetros do modelo para o qual esse ranking é gerado. O número máximo teórico de rankings distintos possíveis é $m!$. Este trabalho tem por objetivo investigar, a partir de uma matriz de decisão fixa, o número de rankings distintos que podem ser atingidos por diferentes modelos de agregação multicritério, considerando a variação de seus respectivos parâmetros.

3. Modelos de agregação

3.1. Modelo linear

No modelo linear, o valor agregado da alternativa a_i é calculado por $v_i = \sum_{j=1}^n w_j d_{ij}$, onde $w_j \geq 0$ são os pesos dos critérios e satisfazem $\sum_{j=1}^n w_j = 1$. O modelo assume independência entre critérios e gera rankings que dependem exclusivamente da variação dos pesos.

3.2. Integral de Choquet

A integral de Choquet modela interações entre critérios por meio de uma capacidade $\mu : 2^C \rightarrow [0, 1]$, com $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(C) = 1$ e $\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subseteq B$. Dado o vetor ordenado de desempenhos, calcula-se $v_i = \sum_{t=1}^n (d_{i(t)} - d_{i(t-1)})\mu(T_t)$, onde T_t representa subconjuntos associados às maiores avaliações. A versão completa requer $2^n - 2$ parâmetros. Já a versão 2-aditiva representa a capacidade por meio dos índices de Shapley I_j e de interação I_{jk} , totalizando $n + \binom{n}{2}$ parâmetros, conforme apresentado em [Grabisch et al., 2000].

3.3. Redes neurais monótonas

Redes neurais monótonas são modelos de redes neurais que garantem, por construção, uma relação monótona entre as entradas (avaliações em nosso caso) e a saída (valor agregado). Utilizamos uma rede do tipo Perceptron Multicamadas (MLP) com duas camadas ocultas, pesos não negativos e função de ativação ReLU, assegurando monotonicidade em relação aos critérios.

Dado $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^n$, a saída da rede é $v_i = \sigma \left(\sum_k q_k \sigma \left(\sum_j w_{kj} d_{ij} + \theta_k \right) + \theta_0 \right)$, em que σ é a ReLU, $w_{kj} \geq 0$ e $q_k \geq 0$ são os pesos, e θ_k, θ_0 os termos de bias. A não negatividade dos pesos garante que $\partial v_i / \partial d_{ij} \geq 0$. A arquitetura permite capturar interações não lineares mantendo a coerência com preferências crescentes.

4. Metodologia

A análise baseia-se em simulações de Monte Carlo para estimar o número de rankings distintos gerados por diferentes modelos de agregação. Para cada simulação, uma matriz de decisão $D \in [0, 1]^{m \times n}$ é gerada aleatoriamente (distribuição uniforme) e mantida fixa, permitindo avaliar o impacto exclusivo da variação dos parâmetros de cada modelo.

São sorteados: pesos normalizados (modelo linear), capacidades ou índices de interação (integrais de Choquet) e pesos/bias com restrição de monotonicidade (redes neurais). Calculam-se os valores agregados e os rankings resultantes. O processo é repetido para G matrizes distintas, e os rankings distintos são analisados conforme a configuração (m, n) e o modelo utilizado.

5. Resultados

Foram avaliadas diferentes combinações de alternativas (m) e critérios (n), com matrizes de decisão geradas aleatoriamente. Para cada par (m, n) , estimou-se, via N_{mc} simulações de Monte Carlo, o número de rankings distintos produzidos por cada modelo.

A Figura 1 mostra a proporção média de rankings distintos alcançada, considerando a média de 50 matrizes por configuração. As redes neurais monótonas apresentaram maior diversidade de rankings, seguidas pelas integrais de Choquet (completa e 2-aditiva), enquanto o modelo linear teve desempenho mais restrito. Observa-se ainda que a diversidade tende a aumentar quando $n \geq m$, indicando maior variabilidade com o aumento do número de critérios.

6. Considerações finais

Este trabalho comparou a capacidade de diferentes modelos de agregação em gerar rankings distintos em problemas de decisão multicritério. Por meio de simulações de Monte Carlo, analisamos o comportamento de modelos lineares, integrais de Choquet (completa e 2-aditiva) e redes neurais monótonas, considerando uma matriz de decisão fixa e variação de parâmetros. A análise do número de rankings atingíveis fornece uma visão complementar sobre a flexibilidade dos modelos, podendo auxiliar na escolha do método de agregação em contextos nos quais a diversidade de ordenações seja um critério a ser considerado.

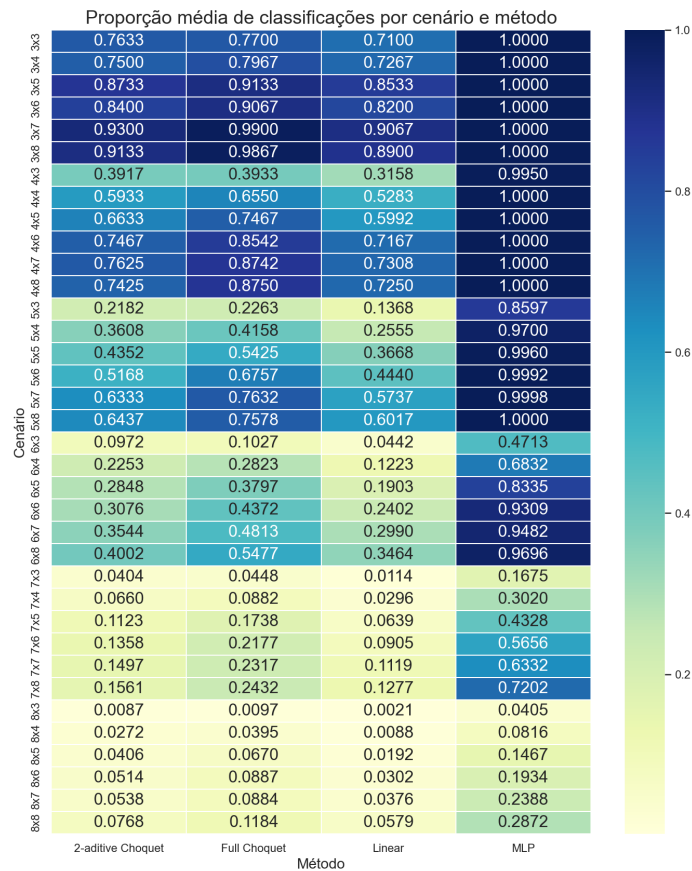


Figura 1: Proporção média de rankings distintos por cenário e método.

Referências

- Daniels, H. e Velikova, M. (2010). Monotone and partially monotone neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 21(6):906–917.
- Grabisch, M. et al. (2000). Fuzzy integral for classification and feature extraction. *Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications*, 1:415–434.
- Keeney, R. L. (1993). *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*. Cambridge university press.
- Lang, B. (2005). Monotonic multi-layer perceptron networks as universal approximators. In *Artificial Neural Networks: Formal Models and Their Applications–ICANN 2005: 15th International Conference, Warsaw, Poland, September 11–15, 2005. Proceedings, Part II* 15, p. 31–37. Springer.
- Roy, B. (2013). *Multicriteria methodology for decision aiding*, volume 12. Springer Science & Business Media.
- Triantaphyllou, E. e Shu, B. (2001). On the maximum number of feasible ranking sequences in multi-criteria decision making problems. *European Journal of Operational Research*, 130(3): 665–678.