57º SBPO
SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
Gramado • RS
DE 5 A 9 DE OUTUBRO DE 2025

ENCONTRANDO TODAS AS SOLUÇÕES DE SISTEMAS NÃO LINEARES ATRAVÉS DE UM ALGORITMO BIOINSPIRADO

Raphael Andrade da Silva Nogueira
UFF-INFES
Santo Antônio de Pádua
andraderaphael@id.uff.br

Joviana Sartori de Souza
UFF-INFES
Santo Antônio de Pádua
jovianasartori@id.uff.br

RESUMO

Este trabalho propõe resolver sistemas de equações não lineares formulando-os como problemas de otimização e utilizando a técnica de polarização para encontrar todas as soluções. A abordagem combina o método global de busca Evolução Diferencial (ED) com os métodos locais Hooke-Jeeves (HJ) e Quase-Newton BFGS, criando métodos híbridos (ED/HJ e ED/BFGS) para aumentar a robustez e eficiência do método ED. A técnica de polarização é integrada aos métodos para garantir a determinação completa das soluções. Após testes numéricos, será feita uma análise dos benefícios da combinação das buscas locais com o método global ED.

PALAVRAS CHAVE. Otimização, Evolução Diferencial, Sistemas Não Lineares, Hooke-Jeeves, BFGS.

ABSTRACT

This work proposes solving systems of nonlinear equations by formulating them as optimization problems and using the polarization technique to find all solutions. The approach combines the global search method Differential Evolution (DE) with the local methods Hooke-Jeeves (HJ) and Quasi-Newton BFGS, creating hybrid methods (DE/HJ and DE/BFGS) to increase the robustness and efficiency of the DE method. The polarization technique is integrated into the methods to ensure the complete determination of the solutions. After numerical tests, an analysis will be carried out on the benefits of combining local searches with the global DE method.

KEYWORDS. Optimization, Differential Evolution, Nonlinear Systems, Hooke-Jeeves. BFGS.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

1. Introdução

A busca por soluções eficientes para problemas de otimização tem despertado crescente interesse em diversas áreas do conhecimento, especialmente na Matemática Aplicada e nas Engenharias, devido à sua ampla aplicabilidade em contextos científicos, tecnológicos e industriais. Dentre esses problemas, destaca-se a resolução de sistemas de equações não lineares, cuja complexidade frequentemente exige abordagens computacionais robustas.

Neste trabalho, propõe-se a resolução desses sistemas por meio de sua reformulação como problemas de otimização. Para isso, será empregado o método de Evolução Diferencial, reconhecido por sua eficácia em buscas globais, aliado à técnica de polarização, que será utilizada para aprimorar a capacidade exploratória do algoritmo. A integração dessas estratégias visa explorar de forma mais abrangente o espaço de busca, permitindo a identificação de múltiplas soluções ótimas para os sistemas analisados.

Serão apresentados e resolvidos exemplos retirados da literatura com o objetivo de ilustrar a aplicação prática da abordagem proposta. A pesquisa se concentrará na análise dos resultados obtidos, buscando avaliar a eficiência do método e a contribuição da técnica de polarização para o desempenho da Evolução Diferencial na resolução de sistemas não lineares.

2. Método Evolução Diferencial

A eficácia do algoritmo de Evolução Diferencial(ED) depende diretamente da configuração adequada de seus parâmetros. Entre os principais estão o número de rodadas, tamanho da população, tolerância ao erro, taxa de cruzamento (CR), fator de mutação (F), erro mínimo permitido, número máximo de iterações e o intervalo de inicialização da população. Esses parâmetros controlam o processo evolutivo e são fundamentais para a busca eficiente de soluções ótimas no espaço de busca.

A seguir é apresentado o algoritmo do método Evolução Diferencial:

Algoritmo 1 : Evolução Diferencial

Entrada: Número de variáveis: n; Número de indivíduos: N; Fator de mutação: F; Coeficiente de cruzamento: Cr; Máximo de Iterações: nmax, Tolerância: toll; Intervalo de inicialização da população: InterInic.
Saída: Melhor indivíduo gerado: X; Valor para o melhor individuo: f(X)
Para $i = 1, .., N$ faça
    Para $j = 1, ..., n$ faça
        $pinicial_{ij} = InterInic(1) + rand[0, 1](InterInic(2) - InterInic(1))$
    fim Para
fim Para
$iter = 1, ..., nmax$
Enquanto $b = 0$ faça
    Para $i = 1, ..., N$ faça
        $\rho_1 = rand(pinicial); \rho_2 = rand(pinicial); \rho_3 = rand(pinicial);$
    fim Para
    Se $\rho_1 \neq \rho_2$ então e $\rho_2 \neq \rho_3$ e $\rho_1 \neq \rho_3$
        $b = 1;$
    fim Se
fim Enquanto
Para $j = 1, ..., n$ faça
    $pmul = \rho_1 + F(\rho_2 - \rho_3);$
fim Para
Para $i = 1, ..., n$
$k = randi(1, ..., N);$
Para $j = 1, ..., N$
$rend_j = rend();$
Se $rend_j <= CR$ então ou $i = k$
    $pcr(i, j) = pmul(i, j);$
fim Se
senão
$pcr(i, j) = pinicial(i, j);$
fim

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

30: fim Para
31: fim Para
32: Para $i = 1, ..., n$ faça
33: $erro1(i) = f(pinicial(i)); erro2(i) = f(pcr(i));$
34: Se $(erro1 < erro2)$ então
35: $pinicial(i) = pinicial(i);$
36: fim Se
37: senão
38: $pinicial(i) = pcr(i);$
39: fim
40: fim Para
41: $X_{k+} = f(pinicial(1));$
42: Para $i = 2, ..., n$ faça
43: $aux = f(pinicial(i));$
44: Se $(aux < X_{k+1})$ então
45: $X_{k+1} = aux; j = i;$
46: fim Se
47: fim Para
48: $X_{k+1} = pinicial(j);$
49: fim Para
50: retorna $X_{k+1}, f(X_{k+1});$

3. Métode Hooke-Jeeves

O método de Hooke-Jeeves, proposto em 1961, é uma técnica de otimização determinística baseada em busca local, que visa encontrar o valor ótimo de uma função objetivo sem utilizar derivadas. Ele opera em duas etapas principais: exploração, onde se avalia a vizinhança de um ponto inicial para encontrar uma direção promissora, e progressão, que avança nessa direção para acelerar a convergência. O processo é repetido até que se atinja um critério de parada. Devido à sua simplicidade e eficácia, especialmente em problemas onde as derivadas não são facilmente computáveis, o método é amplamente utilizado como uma abordagem robusta de otimização sem gradiente.

4. Método BFGS

O método quase-Newton, especialmente o BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno), é um algoritmo de otimização local eficiente que supera o método de Newton ao evitar o cálculo direto da matriz Hessiana, o que o torna mais viável para problemas complexos. Em vez disso, o BFGS atualiza iterativamente uma aproximação dessa matriz com base nas variações do gradiente. A cada iteração, determina-se uma direção de descida e um passo que minimiza a função. O processo se repete até que o gradiente seja suficientemente pequeno, indicando a convergência. O método equilibra precisão e eficiência computacional, sendo ideal para funções diferenciáveis.

Escolhe-se um ponto inicial x_0 e uma matriz inicial B_0(geralmente a identidade). O sistema $B_k p_k = -\nabla f(x_k)$ para encontrar a direção p_k. Encontra-se um passo α_k que minimiza a função, $f(x_k + \alpha_k p_k)$. Define-se $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, $s_k = x_{k+1} - x_k$ (variação do ponto), $y_k = \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$(variação do gradiente).

$$B_{k+1} = B_k + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}$$

Continua-se o processo até que um critério de parada seja satisfeito (por exemplo, quando $\nabla f(x_k)$ for menor que a tolerância dada.

5. Hibridização dos Métodos Hooke-Jeeves e BFGS com Evolução Diferencial

5.1. Método Evolução Diferencial/Hooke-Jeeves

Na primeira proposta de hibridização do Método Evolução Diferencial com o Hooke-Jeeves (ED/HJ), após a etapa de seleção, em que a nova população é formada pela escolha do melhor indivíduo entre a população inicial e a população cruzada, insere-se um laço adicional. Nesse laço,

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

seleciona-se o melhor indivíduo da nova geração e aplica-se o método Hooke-Jeeves para refiná-lo. Esse procedimento está ilustrado no algoritmo a seguir.

Algoritmo 2 : Evolução Diferencial/Hooke-Jeeves

Entrada: Número de variáveis: n; Número de indivíduos: N; Fator de mutação: F; Coeficiente de cruzamento: Cr; Máximo de Iterações: nmax, Tolerância: toll; Intervalo de inicialização da população: InterInic.
Saída: Melhor indivíduo gerado: X; Valor para o melhor indivíduo: f(X)

Para $i = 1, .., N$ faça
  Para $j = 1, ..., n$ faça
    $pinicial_{ij} = InterInic(1) + rand[0, 1](InterInic(2) - InterInic(1))$
  fim Para
fim Para
Para $iter = 1, ..., nmax$ faça
  Enquanto $b = 0$ faça
    Para $i = 1, ..., N$ faça
      $\rho_1 = rand(pinicial); \rho_2 = rand(pinicial); \rho_3 = rand(pinicial);$
    fim Para
    Se $\rho_1 \neq \rho_2$ então e $\rho_2 \neq \rho_3$ e $\rho_1 \neq \rho_3$
      $b = 1;$
    fim Se
  fim Enquanto
  Para $j = 1, ..., n$ faça
    $pmul = \rho_1 + F(\rho_2 - \rho_3);$
  fim Para
  Para $i = 1, ..., n$ faça
    $k = randi(1, ..., N);$
    Para $j = 1, ..., N$ faça
      $rend_j = rend();$
      Se $rend_j <= CR$ então ou $i = k$
        $pcr(i, j) = pmul(i, j);$
      fim Se
      senão
      $pcr(i, j) = pinicial(i, j);$
      fim
    fim Para
  fim Para
  Para $i = 1, ..., n$ faça
    $erro1(i) = f(pinicial(i)); erro2(i) = f(pcr(i));$
    Se $(erro1 < erro2)$ então
      $pinicial(i) = pinicial(i);$
    fim Se
    senão
    $pinicial(i) = pcr(i);$
    fim
  fim Para
  $X_{k+1} = f(pinicial(1));$
  Para $i = 2, ..., n$ faça
    $aux = f(pinicial(i));$
    Se $(aux < X_{k+1})$ então
      $X_{k+1} = aux; j = i;$
    fim Se
  fim Para
  $pinicial(j) = hooke - jeeves(X_{k+1});$
  $X_{k+1} = pinicial(j)$
fim Para
retorna $X_{k+1}, f(X_{k+1});$

5.2. Método Evolução Diferencial/BFGS

Nessa proposta de hibridização do Método Evolução Diferencial com o BFGS (ED/BFGS), o método BFGS é chamado para refinar o melhor indivíduo da nova geração, ou seja, após a etapa da seleção onde a nova população é gerada ao se escolher o melhor indivíduo entre a população inicial e a população cruzada, se insere um laço para escolher o melhor indivíduo da nova geração e

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

então esse indivíduo é melhorado com o método BFGS. Este processo é exemplificado no algoritmo a seguir.

Algoritmo 3 : Evolução Diferencial/BFGS

Entrada: Número de variáveis: n; Número de indivíduos: N; Fator de mutação: F; Coeficiente de cruzamento: Cr; Máximo de Iterações: nmax, Tolerância: toll; Intervalo de inicialização da população: InterInic.
Saída: Melhor indivíduo gerado: X; Valor para o melhor indivíduo: f(X)

Para $i = 1, .., N$ faça
    Para $j = 1, ..., n$ faça
        $pinicial_{ij} = InterInic(1) + rand[0, 1](InterInic(2) - InterInic(1))$
    fim Para
fim Para
Para $iter = 1, ..., nmax$ faça
    Enquanto $b = 0$ faça
        Para $i = 1, ..., N$ faça
            $\rho_1 = rand(pinicial); \rho_2 = rand(pinicial); \rho_3 = rand(pinicial);$
        fim Para
        Se $\rho_1 \neq \rho_2$ então e $\rho_2 \neq \rho_3$ e $\rho_1 \neq \rho_3$
            $b = 1;$
        fim Se
    fim Enquanto
    Para $j = 1, ..., n$ faça
        $pmul = \rho_1 + F(\rho_2 - \rho_3);$
    fim Para
    Para $i = 1, ..., n$ faça
        $k = randi(1, ..., N);$
        Para $j = 1, ..., N$ faça
            $rend_j = rend();$
            Se $rend_j <= CR$ então ou $i = k$
                $pcr(i, j) = pmul(i, j);$
            fim Se
            senão
            $pcr(i, j) = pinicial(i, j);$
            fim
        fim Para
    fim Para
    Para $i = 1, ..., n$ faça
        $erro1(i) = f(pinicial(i)); erro2(i) = f(pcr(i));$
        Se $(erro1 < erro2)$ então
            $pinicial(i) = pinicial(i);$
        fim Se
        senão
        $pinicial(i) = pcr(i);$
        fim
    fim Para
    $X_{k+1} = f(pinicial(1));$
    Para $i = 2, ..., n$ faça
        $aux = f(pinicial(i));$
        Se $(aux < X_{k+1})$ então
            $X_{k+1} = aux; j = i;$
        fim Se
    fim Para
    $pinicial(j) = bfgs(X_{k+1});$
    $X_{k+1} = pinicial(j)$
fim Para
retorna $X_{k+1}, f(X_{k+1});$

6. Técnica da Polarização

A técnica de polarização é eficaz na otimização de algoritmos complexos, pois direciona a busca para regiões promissoras com base no desempenho anterior, acelerando a convergência e aumentando a precisão. Além disso, permite identificar múltiplas soluções ao reaplicar o processo, sendo útil em problemas com múltiplos ótimos.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

$$\begin{cases} \text{Minimizar} f(y) = \frac{f(y)+\beta}{arctg\|y-y^1\|} \\ y \in \Re^r, \text{com } \beta \geq 0. \end{cases}$$

Busca-se a (n + 1)-ésima solução resolvendo o problema a seguir:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} f_n(y) = \frac{f_{n-1}(y)}{arctg\|y-y^n\|} \\ y \in \Re^r \end{cases}$$

7. Técnica de repulsão

A técnica de repulsão, proposta por Parsopoulos e Vrahatis (2004), é utilizada para minimizar funções de mérito polarizadas, sendo incorporada ao método ED neste trabalho para identificar todos os pontos estacionários de sistemas não lineares. Aplicada após as atualizações do método, ela impede que partículas convirjam a soluções já encontradas, por meio da repulsão em direção a esses pontos.

Algoritmo 4 : Técnica de Repulsão

Dados X^*, S, r_{ij}, p_{ij}, com $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, m$, onde $X^* = \{x_j^* \mid j = 1, \ldots, m\}$ é o conjunto de pontos encontrados, $S = \{x_i \mid i = 1, \ldots, s\}$ é o enxame para a dada iteração, r_{ij} é o raio da região de repulsão e p_{ij} é o fator de repulsão.

```
Para i = 1, ..., s faça
    Se X* ≠ 0 então
        d_ij = || x_i − x*_j ||, j = 1, ... m
        Para j = 1, ..., m faça
            Se (d_ij ≤ r_ij) então
                Z_ij = (x_i − x*_j) / d_ij
                X_i = x_i + p_ij Z_ij
            fim Se
        fim Para
    fim Se
fim Para
```

8. Sistemas

Nesta seção são apresentados os sistemas de equações não lineares utilizados neste trabalho bem como sua formulação como um problema de otimização e os gráficos correspondentes.

8.1. SISTEMA 1

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2, \\ f_2(x) = x_1^2 - \frac{x_2^2}{9} - 1. \end{cases}$$

Representação do sistema 1 como um problema de otimização:

$$\text{Minimizar } f(x) = \sum_{i=1}^{2} f_i(x)^2$$
$$\text{Minimizar } f_1^2 + f_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 - 2)^2 + (x_1^2 - \frac{x_2^2}{9} - 1)^2$$

A seguir é apresentado o gráfico com as soluções do sistema 1

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

Soluções do Sistema	
1	(1.0488,-0.9486)
2	(-1.0488,-0.9486)
3	(1.0488,0.9486)
4	(-1.0488,-0.9486)

Tabela 1: Soluções do Sistema 1

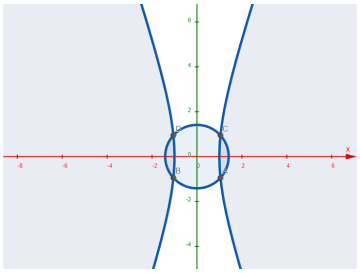

Figura 1: Gráfico referente ao sistema 1.

As figuras 2 e 3 mostram respectivamente os gráficos da superfície que representa a função objetivo do problema de otimização equivalente ao sistema 1 e as curvas de nível desta superfície.

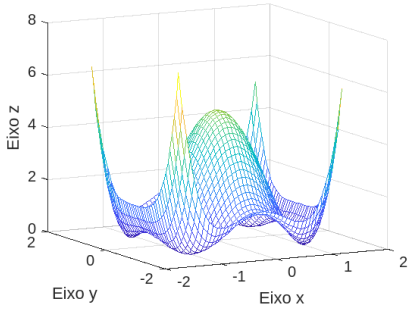

Figura 2: Gráfico da superfície que representa a função objetivo do problema de otimização referente ao sistema 1

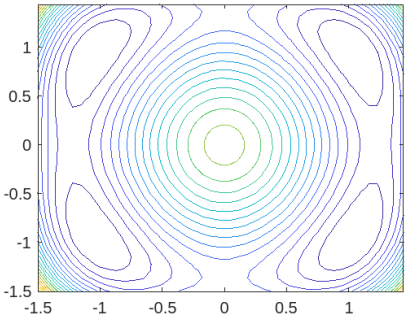

Figura 3: Gráfico de contorno que representa a função objetivo do problema de otimização referente ao sistema 1

8.2. SISTEMA 2

$$\begin{cases} f_1(x) = 4x_1 - x_1^3 + x_2, \\ f_2(x) = \frac{-x_1^2}{9} + \frac{4x_2 - x_2^2}{4} + 1. \end{cases}$$

Representação do sistema 2 como um problema de otimização:

$$\text{Minimizar } f(x) = \sum_{i=1}^{2} f_i(x)^2$$
$$\text{Minimizar } f_1^2 + f_2^2 = (4x_1 - x_1^3 + x_2)^2 + (\frac{-x_1^2}{9} + \frac{4x_2 - x_2^2}{4} + 1)^2$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

Soluções do Sistema	
1	(-2.0568,-0.4738)
2	(0.2085,-0.825)
3	(1.9318,-0.5182)
4	(2.4079,4.3288)

Tabela 2: Soluções do Sistema 2

A seguir, a figura 4 apresenta o gráfico com as soluções do sistema 2

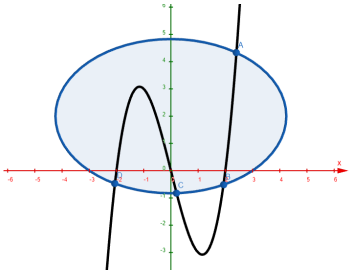

Figura 4: Gráfico referente ao sistema 2.

As figuras 5 e 6 mostram respectivamente os gráficos da superfície que representa a função objetivo do problema de otimização equivalente ao sistema 2 e as curvas de nível desta superfície.

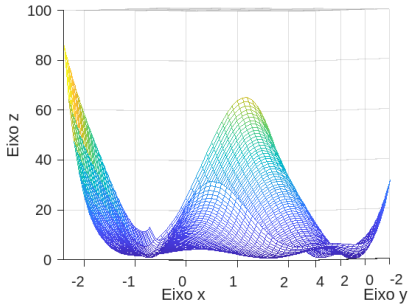

Figura 5: Gráfico da superfície que representa a função objetivo do problema de otimização referente ao sistema 2

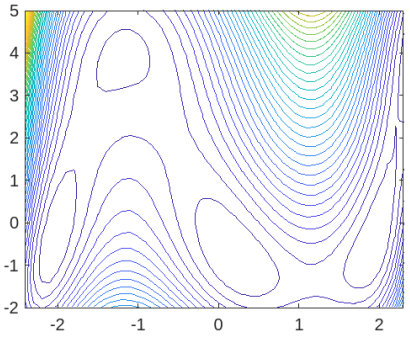

Figura 6: Gráfico de contorno que representa a função objetivo do problema de otimização referente ao sistema 2

8.3. SISTEMA 3

$$\begin{cases} f_1(x) = x_1^3 - 3x_1^2 - x_2 + 2, \\ f_2(x) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4. \end{cases}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

Representação do sistema 3 como um problema de otimização:

$$\text{Minimizar } f(x) = \sum_{i=1}^{2} f_i(x)^2$$
$$\text{Minimizar } f_1^2 + f_2^2 = (x_1^3 - 3x_1^2 - x_2 + 2)^2 + ((x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 4)^2$$

	Soluções do Sistema
1	(0.2346,1.8477)
2	(-0.4142,1.4142)
3	(2.8477,0.7653)
4	(-0.8477,-0.7653)
5	(1.7653,-1.8477)
6	(2.4142,-1.4142)

Tabela 3: Soluções do Sistema 3

A figura 7 apresenta o gráfico com as soluções do sistema 3

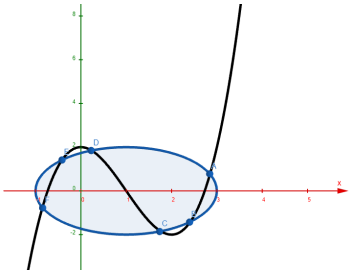

Figura 7: Gráfico referente ao sistema 3.

As figuras 8 e 9 mostram respectivamente os gráficos da superfície que representa a função objetivo do problema de otimização equivalente ao sistema 3 e as curvas de nível desta superfície.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

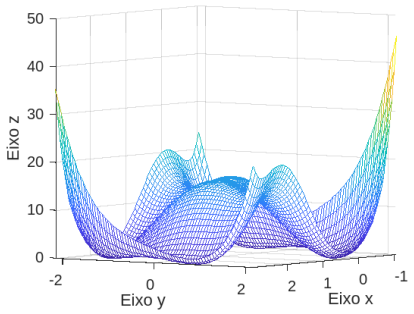

Figura 8: Gráfico da superfície que representa a função objetivo do problema de otimização referente ao sistema 3

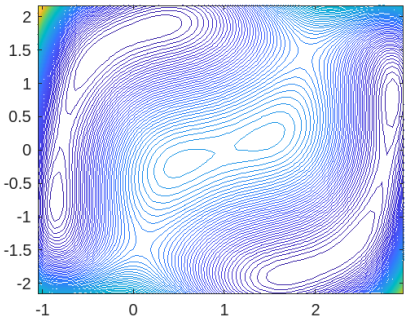

Figura 9: Gráfico de contorno que representa a função objetivo do problema de otimização referente ao sistema 3

9. Resultados Numéricos

Neste seção, são apresentados os resultados numéricos obtidos pela aplicação do Método de Evolução Diferencial (ED) e dos métodos híbridos propostos, combinados com a técnica de polarização, visando encontrar todas as soluções ótimas dos sistemas analisados. Os testes foram realizados em um notebook Lenovo Ideapad 330 com processador Core i3-7020U, 4 GB de RAM e sistema operacional Windows 10. A escolha adequada dos parâmetros de entrada do algoritmo ED foi essencial para garantir o controle do processo evolutivo e a eficiência na busca pelas soluções ótimas.

- Rodadas: 20
- População inicial máxima utilizada: 500
- Tolerância: 10^{-8}
- Taxa de cruzamento: 0.85
- Fator de mutação: 0.5+0.3rand(0,1)
- Número máximo de iterações: 10.000
- Intervalo de inicialização da população: [0,1]

Os parâmetros definidos para o algoritmo de ED garantem o equilíbrio entre exploração e convergência. A taxa de cruzamento de 0,85 favorece a recombinação, enquanto o fator de mutação introduz variabilidade. O critério de erro mínimo permite a interrupção antecipada do processo, com média de 20 execuções por teste.

RESULTADOS OBTIDOS COM O MÉTODO ED E SUAS HIBRIDIZAÇÕES ED/HJ e ED/BFGS.

Métodos	ED	ED/HJ	ED/BFGS
Melhor indivíduo (Sistema 1)	(1.0488,0.9485) (1.0489,-0.9486) (-1.0488,0.9488) (-1.0487,-0.9488)	(1.0487,0.9488) (1.0488,-0.9486) (-1.0487,-0.9487) (-1.0488,0.9488)	(1.0488,0.9487) (1.0488,-0.9487 (-1.0488,0.9487) (-1.0488,-0.9487)
Melhor indivíduo (Sistema 2)	(0.2085,-0.8250) (1.9317,-0.5181)	(0.2085,-0.8248) (1.9318,-0.5182)	(0.2085,-0.8250) (1.9318,-0.5182)

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

	(2.4078,4.3285) (-2.0568,-0.4742)	(-2.0568,-0.4742) (2.4078,4.3286)	(2.4079,4.3288) (-2.0568,-0.4738)
Melhor indivíduo (Sistema 3)	(-0.4142,1.4141) (0.2347,1.8478) (-0.8478,-0.7653) (1.7654,-1.8478) (2.4140,-1.4146) (2.8477,0.7652)	(-0.4143,1.4138) (0.2349,1.8478) (2.8474,0.7652) (-0.8478,-0.7654) (1.7657,-1.8477) (2.4142,-1.4143)	(-0.4142,1.4142) (0.2346,1.8478) (-0.8478,-0.7654) (1.7654,-1.8478) (2.4142,-1.4142) (2.8478,0.7654)
Valor ótimo (Sistema 1)	$5.5629x10^{-15}$ $2.0442x10^{-16}$ $1.9501x10^{-14}$ $5.3082x10^{-14}$	$4.9988x10^{-8}$ $2.4450x10^{-8}$ $1.5078x10^{-8}$ $4.7692x10^{-8}$	$5.5629x10^{-15}$ $2.0442x10^{-16}$ $1.9501x10^{-14}$ $5.3082x10^{-14}$
Valor ótimo (Sistema 2)	$6.0364x10^{-9}$ $8.1482x10^{-8}$ $8.2421x10^{-8}$ $1.7156x10^{-7}$	$9.8410x10^{-8}$ $4.0613x10^{-11}$ $1.7156x10^{-7}$ $6.3480x10^{-8}$	$6.5378x10^{-15}$ $6.8355x10^{-15}$ $2.0084x10^{-13}$ $9.9080x10^{-12}$
Valor ótimo (Sistema 3)	$5.0974x10^{-8}$ $1.4737x10^{-8}$ $1.9838x10^{-8}$ $1.2536x10^{-9}$ $8.9038x10^{-8}$ $7.1348x10^{-8}$	$5.2938x10^{-7}$ $2.3096x10^{-7}$ $4.8614x10^{-6}$ $3.8915x10^{-8}$ $9.7722x10^{-8}$ $1.6655x10^{-8}$	$5.0025x10^{-16}$ $5.2781x10^{-14}$ $2.9846x10^{-15}$ 3.961610^{-15} $3.6789x10^{-13}$ $3.3322x10^{-13}$
media de itetrações (Sistema 1)	27 132 51 56	7 7 4 28	1 1 1 1
media de itetrações (Sistema 2)	36 59 2 1045	2516 3042 1045 1552	1 1 3 3
media de itetrações (Sistema 3)	48 46 38 78 67 48	24 3522 1525 1027 1051 1072	1 1 1 9 2 2
tempo médio (Sistema 1)	0.0414 0.2055 0.0756 0.1117	0.0011 0.0012 0.0030 0.4694	0.0053 0.0039 0.0041 0.0073
tempo médio (Sistema 2)	5.1870 7.8002 3.1520 9.3036	0.0005 9.9503 9.3036 17.9061	0.0308 0.0095 0.0340 0.0214
tempo médio (Sistema 3)	0.0744 0.0702 0.0595 0.1253 0.1036 0.1495	2.9954 10.4330 3.5435 2.4337 2.3619 4.9762	0.0321 0.0055 0.0034 0.0054 0.0206 0.0198
População Inicial (Sistema 1)	50 50 50 50	50 50 50 50	50 50 50 100
População Inicial (Sistema 2)	50 50 50 250	50 50 250 350	50 50 200 50
População Inicial (Sistema 3)	50 50 50 50 50 100	50 50 50 50 50 100	50 50 50 50 200 200

A tabela apresenta os resultados obtidos pelo método Evolução Diferencial e pelos métodos híbridos ED/HJ e ED/BFGS.. Verifica-se que todos os sistemas propostos foram resolvidos com êxito, obtendo-se, na maioria dos casos, valores ótimos satisfatórios e número adequado de iterações.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br

Contudo, observam-se variações significativas no tempo médio de execução, com alguns casos apresentando desempenho elevado e outros, custo computacional acentuado. No Sistema 3, a utilização da técnica de repulsão foi necessária para a obtenção de todas as soluções viáveis.

Entre os métodos avaliados, o ED/BFGS apresentou o desempenho mais consistente, alcançando valores próximos do ótimo, com mínimo de iterações e tempos de execução reduzidos, mesmo sob variações de população inicial. O ED manteve alta precisão, porém com maior custo computacional, enquanto o ED/HJ apresentou desempenho instável, alternando entre execuções rápidas e lentas, com precisão inferior. Esses resultados indicam que o ED/BFGS oferece melhor equilíbrio entre rapidez e exatidão, enquanto o ED puro se destaca pela confiabilidade, e o ED/HJ mostra maior dependência das condições iniciais.

10. Conclusões

Os testes realizados com diferentes sistemas não lineares indicam a eficiência da técnica de polarização, que se mostrou essencial para a identificação de múltiplas soluções. Dos três métodos propostos o método híbrido ED/BFGS apresentou contribuições relevantes para a melhoria do desempenho do algoritmo ED, demonstrando superioridade na precisão das soluções e na redução do tempo de execução, beneficiando-se da utilização de informações do gradiente aproximado para acelerar a convergência. Esses resultados evidenciam o potencial das abordagens híbridas na resolução de sistemas não lineares complexos. Estudos futuros podem aprofundar a aplicação dessas técnicas em problemas de maior dimensão e complexidade, bem como investigar novas combinações de métodos para ampliar ainda mais a eficiência e robustez das soluções.

Referências

Bazaraa, M. S. (2006). *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. John Wiley & Sons, Inc., [S.l.], 3 edition.

Hooke, R. e Jeeves, T. A. (1961). ”direct search”solution of numerical and statistical problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 8(2):212–229.

Izmailov, A. e Solodov, M. (2014). *Otimização, volume 1*. IMPA, [S.l.].

Parsopoulos, K. E. e Vrahatis, M. N. (2004). On the computation of all global minimizers through particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 8(3):211–224.

Ruggiero, M. A. G. e Lopes, V. L. d. R. (1996). *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Makron Books, [S.l.], 2 edition.

Silva, A. A. M. d. (2012). Um estudo do método enxame de partículas para se determinar mínimos globais de funções não lineares. In *XIX Encontro Nacional de Inteligência Artificial*, Curitiba, PR.

Storn, R. (2001). Xix encontro nacional de inteligência artificial - 2012 - curitiba, pr. optimal approximation of linear systems by a differential evolution algorithm.

Storn, R. e Cheng, S. L. (2001). Optimal approximation of linear systems by a differential evolution algorithm. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*.

DOI: 10.59254/sbpo-2025-212114
https://proceedings.science/p/212114?lang=pt-br