LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

Problema da Quase-Bipartição em grafos com conjuntos dominantes pequenos

Discente: Maria Luíza López da Cruz
Orientadores: Uéverton dos Santos Souza, Raquel de Souza Francisco Bravo
Universidade Federal Fluminense - UFF
Niterói - RJ
marialopez@id.uff.br
{raquel, ueverton}@ic.uff.br

RESUMO

O problema de particionar o conjunto de vértices de um grafo em um conjunto independente e uma floresta conhecido como o problema da Quase-Bipartição, é NP-completo mesmo em grafos com diâmetro três. Estudamos o comportamento deste problema e suas variantes em grafos com uma aresta dominante ou conjuntos dominantes pequenos. Para a primeira classe de grafos, apresentamos: (i) um algoritmo polinomial para a Quase-Bipartição; (ii) a NP-completude da Quase-Bipartição Conexa; (iii) a NP-dificuldade de Independente Feedback Vertex Set e Cobertura de Vértices Acíclico, os quais são versões de otimização naturais para Quase-Bipartição. Ao expandir nossa abordagem para grafos com conjuntos dominantes limitados, obtemos um algoritmo de tempo polinomial sempre que o grafo de entrada possui um conjunto dominate de tamanho limitado por uma constante. Como subproduto, melhoramos significativamente o estado da arte da Quase-Bipartição em grafos livre de P_5, alcançando um algoritmo de tempo $O(n^2 \cdot m)$ superando o atual $O(n^{16})$.

PALAVRAS CHAVE. Quase-Bipartição, Independente Feedback Vertex Set, Grafos livre de P_5.

Tópicos. Teoria e Algoritmos em Grafos, Otimização Combinatória

ABSTRACT

The problem of partitioning the vertex set of a graph into an independent set and a forest known as the Near-Bipartiteness problem, is NP-complete even on graphs with diameter three. We study the behavior of this problem and its variants on graphs with a dominating edge or small dominating sets. For the first class of graphs, we present (i) a polynomial-time algorithm for Near-Bipartiteness; (ii) the NP-Completeness of the Connected Near-Bipartiteness; (iii) the NP-hardness of the Independent Feedback Vertex Set and Acyclic Vertex Cover, which are natural optimization versions of Near-Bipartiteness. By expanding our approach to graphs with bounded dominating sets, we obtain a polynomial-time algorithm whenever the input graph has a dominating set bounded by a constant. As a by-product, we significantly improve the state-of-the-art for Near-Bipartiteness on P_5-free graphs, achieving an $O(n^2 \cdot m)$-time algorithm for it and surpassing the current $O(n^{16})$-time upper bound to solve the problem on P_5-free graphs.

KEYWORDS. Near-Bipartiteness. Independent Feedback Vertex Set. P_5-free graphs.

Paper topics. Graph Theory and Algorithms. Combinatorial Optimization

https://proceedings.science/p/194159?lang=pt-br

1. Introdução

Em 1972, Richard Karp demonstrou a NP-completude de 21 problemas fundamentais na Ciência da Computação, entre eles FEEDBACK VERTEX SET, CONJUNTO INDEPENDENTE e COBERTURA POR VÉRTICES [Karp, 1972]. O primeiro, consiste em encontrar um conjunto mínimo de vértices cuja remoção elimina todos os ciclos do grafo. O segundo, visa determinar um conjunto máximo de vértices não adjacentes, e o último, busca um conjunto mínimo de vértices que intersecta todas as arestas do grafo. Note que se $\mathcal{S}$ é um conjunto independente de $G = (V, E)$, então $\mathcal{F} = V(G) \setminus \mathcal{S}$ é uma cobertura por vértices de G.

Um INDEPENDENTE FEEDBACK VERTEX SET (IFVS) de um grafo é simultaneamente um conjunto de vértices de feedback e um conjunto independente. Um grafo $G = (V, E)$ admite uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ se $\mathcal{S} \subseteq V$ e $\mathcal{F} = V \setminus \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S}$ é um conjunto independente e $\mathcal{F}$ induz uma floresta [Yang e Yuan, 2006]. Esses grafos são chamados de quase-bipartidos. Os grafos quase-bipartidos são aqueles que possuem conjuntos de vértices de feedback independentes. Um grafo G possui um IFVS $\mathcal{S}$ se, e somente se, possui uma cobertura de vértices acíclico $\mathcal{F}$ onde $G[\mathcal{F}]$ é acíclico (induz uma floresta).

O problema de reconhecer grafos quase-bipartidos é NP-completo, mesmo em classes de grafos específicas como os de grau máximo quatro, diâmetro três, grafos de linhas, e grafos planares [Bonamy et al., 2018, 2019, 2017; Dross et al., 2017]. Entretanto, alguns casos específicos são solucionáveis em tempo polinomial, como em cografos [Brandstädt et al., 2013] e em grafos de diâmetro no máximo dois [Yang e Yuan, 2006]. Yang e Yuan também provaram que todo grafo conexo de grau máximo três é quase-bipartido (exceto K_4). Em [Bonamy et al., 2019] provou-se que em grafos livres de P_5 o problema da QUASE-BIPARTIÇÃO pode ser resolvido em tempo $O(n^{16})$. Existem também algoritmos FPT parametrizados pela variável k para encontrar um IFVS de tamanho no máximo k [Agrawal et al., 2017; Li e Pilipczuk, 2020; Misra et al., 2012].

Um grafo G é *k-colorível* se puder ser colorido com, no máximo, k cores. Uma condição necessária para um grafo ser quase-bipartido é que ele seja 3-colorível. Dessa forma, observa-se que K_4 é um subgrafo proibido para grafos quase-bipartidos. A complexidade de 3-COLORAÇÃO e QUASE-BIPARTIÇÃO varia conforme a classe de grafo. Em grafos perfeitos, COLORAÇÃO é resolvido em tempo polinomial [Grötschel et al., 1984], mas QUASE-BIPARTIÇÃO permanece NP-completo [Brandstädt et al., 2013]. Esse problema também pode ser visto como uma variante de 2-COLORAÇÃO, onde uma classe de cor é um conjunto independente e a outra induz uma floresta.

Outras variantes de 2-COLORAÇÃO foram exploradas na literatura. Em [Achlioptas, 1997] investigou-se a existência de uma bipartição de $V(G)$ onde cada parte é H-livre para algum grafo fixo H, demonstrando a NP-completude do problema. Em [Schaefer, 1978] abordou-se a existência de uma 2-coloração dos vértices de um grafo G onde cada vértice tem exatamente um vizinho com a mesma cor, provando ser NP-completo, mesmo para grafos cúbicos planares. Este é um caso particular de coloração defeituosa denominada coloração $(2, 1)$, onde uma coloração (k, d) de um grafo G é uma coloração k de $V(G)$ tal que cada vértice tem no máximo d vizinhos com a mesma cor [Borodin et al., 2013; Cowen et al., 1997; Lima et al., 2021].

2. Problemas Estudados: Problema da Quase-Bipartição e suas variantes

Na dissertação de Mestrado, exploramos o problema da QUASE-BIPARTIÇÃO e algumas de suas variações, motivados por estudos sobre variantes de 2-coloração e pela relevância natural dos conjuntos independentes de vértices de feedback. Segue a definição de cada problema estudado:

QUASE-BIPARTIÇÃO

Instância: Um grafo simples e não direcionado $G = (V, E)$.
Questão: O grafo G possui uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$?

https://proceedings.science/p/194159?lang=pt-br

INDEPENDENTE FEEDBACK VERTEX SET

Instância: Um grafo simples e não direcionado $G = (V, E)$.
Questão: Buscar (se houver) um conjunto mínimo de vértices de feedback independente em G, ou seja, uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ que minimize $|\mathcal{S}|$.

COBERTURA DE VÉRTICES ACÍCLICO

Instância: Um grafo simples e não direcionado $G = (V, E)$.
Questão: Encontrar (se houver) uma cobertura mínima de vértices acíclico de G, ou seja, uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ que minimize o tamanho de $\mathcal{F}$.

Considerando que o complemento de uma cobertura de vértices acíclico corresponde a um conjunto independente de vértices de feedback, é possível inferir que estamos abordando a versão de maximização de ambos os problemas. Além disso, exploramos o problema da QUASE-BIPARTIÇÃO CONEXA. Este problema foi demonstrado ser NP-completo, mesmo em grafos bipartidos com grau máximo quatro [Brandstädt et al., 1998].

QUASE-BIPARTIÇÃO CONEXA

Instância: Um grafo simples e não direcionado $G = (V, E)$.
Questão: G possui uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ tal que $G[\mathcal{F}]$ é conexo?

3. Resultados Obtidos

Nesta seção, apresentamos as provas matemáticas desenvolvidas. Devido a limitação de espaço, apenas a prova do Teorema 1 é detalhada; as demais são brevemente descritas com suas estratégias de prova.

3.1. Problema da Quase-Bipartição em grafos com aresta domintante

Motivados pelo fato de que o problema da QUASE-BIPARTIÇÃO continua sendo NP-completo em grafos com diâmetro três [Bonamy et al., 2018], investigamos inicialmente o problema em grafos com uma aresta dominante, uma subclasse natural dos grafos com diâmetro 3.

Teorema 1. QUASE-BIPARTIÇÃO CONEXA *é NP-completo mesmo quando restrito a grafos com uma aresta dominante.*

Demonstração. Dada uma instância F de 1-IN-3SAT ([Garey e Johnson, 1979]), construímos um grafo G de forma que F tenha uma atribuição verdade tal que cada cláusula tenha exatamente um literal definido como *true* se, e somente se, G é particionável em um conjunto independente e uma árvore. A partir de F construímos G da seguinte forma:

1. primeiro, considere $G = (\{u, v\}, \{uv\})$;
2. adicione um ciclo C de tamanho 4 em G induzido por $\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$, e adicione arestas de u para todos os vértices em C;
3. adicione um ciclo $C' = l_1, m, l_2, n_1, n_2$;
4. adicione as arestas ul_1, ul_2, vm, vn_1 e vn_2; Neste ponto, observe que para cada quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ de G temos que $v \in \mathcal{S}$ e $u \in \mathcal{T}$.
5. para cada variável x_i de F crie vértices v_{x_i} e $v_{\overline{x}_i}$ e adicione as arestas $v_{x_i}v_{\overline{x}_i}$, uv_{x_i} e $uv_{\overline{x}_i}$;

https://proceedings.science/p/194159?lang=pt-br

6. para cada cláusula C_j de F crie um vértice c_j em G e adicione a aresta vc_j;

7. Por fim, adicione uma aresta $c_j v_{x_i}$ se a cláusula C_j contiver o literal x_i, e adicione uma aresta $c_j v_{\overline{x}_i}$ se a cláusula C_j contiver o literal $\overline{x_i}$.

Se F é uma fórmula 3-CNF com uma atribuição verdade A tal que cada cláusula tem exatamente um literal definido como *true*, então podemos construir uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ de G configurando $\mathcal{S} = \{k_1, k_3, l_1, v\} \cup \{v_{x_i} : x_i = false \in A\} \cup \{v_{\overline{x}_i} : x_i = true \in A\}$ (claramente $\mathcal{S}$ é um conjunto independente). Como A define uma atribuição verdade 1-in-3, então cada vértice c_j tem exatamente um vizinho em $G[V \setminus S]$, então $\mathcal{T} = V \setminus \mathcal{S}$ induz uma árvore. Por outro lado, se G admite uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ então, por construção, ele mantém $v \in \mathcal{S}$ e $u \in \mathcal{T}$. Isso implica que todo vértice c_j pertence a $\mathcal{T}$, e que para cada par v_{x_i}, $v_{\overline{x}_i}$ exatamente um desses vértices pertence a $\mathcal{T}$. Além disso, como $\mathcal{T}$ é conexo, cada c_j possui pelo menos um vizinho em $\mathcal{T}$. E, como $\mathcal{T}$ é acíclico, cada vértice c_j tem exatamente um vizinho em $\mathcal{T}$, ou seja, cada c_j deve ser uma folha em $\mathcal{T}$. Portanto, podemos construir uma atribuição verdade 1-in-3 definindo $x_i = true$ se, e somente se, $v_{x_i} \in \mathcal{T}$. □

Em contraste ao Teorema 1, demonstramos que ao remover a restrição de conectividade (buscar por uma floresta em vez de uma árvore) o problema é resolvível em tempo polinomial.

Teorema 2. *Dado um grafo G e uma aresta dominante de G, pode-se determinar em tempo $O(n^2)$ se G é um grafo quase-bipartido.*

Considere dois vértices adjacentes, u e v em G pela aresta dominante. Supondo que G admita uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$, são analisados dois casos: **1.** $\{u, v\} \in \mathcal{F}$. Neste cenário, verifica-se se $N(u) \cap N(v)$ é um conjunto independente e realiza-se a classificação de cada vértice como pertencente a $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{F}$ através de uma Busca em Largura em $N(u) \cap N(v)$. Assim, conclui-se em tempo polinomial se tal quase-bipartição com $u, v \in \mathcal{F}$ não existe, ou constrói-se uma partição (S', F', U) de $V(G)$ tal que S' é um conjunto independente, $F' \supseteq \{u, v\}$ induz uma floresta, e U é o conjunto de vértices não classificados. G tem uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ com $\{u, v\} \subseteq \mathcal{F}$ se, e somente se, $G[U]$ induzir um grafo bipartido. **2.** $\{u\} \in \mathcal{S}$**,** $\{v\} \in \mathcal{F}$. Nesse caso, $N(u)$ deve induzir uma floresta e $N(u) \cap N(v)$ deve ser um conjunto independente. Os vértices não classificados são analisados para encontrar uma bipartição que satisfaça determinadas condições. Esta busca é reduzida ao problema 2SAT. Portanto, uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ de G pode ser encontrado em tempo $O(n^2)$ (se houver) em grafos com uma aresta dominante.

Teorema 3. INDEPENDENTE FEEDBACK VERTEX SET *é NP-difícil quando restrito a grafos com uma aresta dominante.*

O problema POSITIVE MIN-ONES-2SAT é equivalente ao problema COBERTURA MÍNIMA DE VÉRTICES [Karp, 1972], um problema conhecido como NP-completo. Dado uma instância φ de POSITIVE MIN-ONES-2SAT, pode-se construir um grafo G usando uma construção similar ao do Teorema 1 (desconsiderando literais negativos). Nesse ponto, as variáveis x_i definidas como verdadeiras são equivalentes aos vértices v_{x_i} atribuídos a S. Assim, φ tem uma atribuição de valores às suas variáveis com no máximo k variáveis definidas como verdadeiras tal que φ é satisfeita se, e somente se, G é particionável em um conjunto independente $\mathcal{S}$ e uma floresta $\mathcal{F}$ tal que $|\mathcal{S}| \leq k+4$.

Teorema 4. PROBLEMA DE COBERTURA DE VÉRTICES ACÍCLICO *é NP-difícil quando restrito a grafos com uma aresta dominante.*

https://proceedings.science/p/194159?lang=pt-br

É feita uma redução do problema POSITIVE MIN-ONES-2SAT, que é NP-completo, para o PROBLEMA DE COBERTURA DE VÉRTICES ACÍCLICO. Define-se um algoritmo de construção que recebe como entrada uma fórmula CNF φ e constrói um grafo com uma aresta dominante, similar ao utilizado no Teorema 1 com ajustes para atender aos requisitos da COBERTURA DE VÉRTICES ACÍCLICO (adição de arestas entre vértices que representam cláusulas e variáveis com base nos literais presentes em φ). A prova estabelece a equivalência entre atribuições que satisfazem a fórmula φ e quase-bipartições admitidas pelo grafo, onde literais verdadeiros formam o subconjunto $\mathcal{F}$ e literais falsos formam o subconjunto $\mathcal{S}$. Por outro lado, dada uma quase-bipartição do grafo, mostra-se como construir uma atribuição satisfatória para φ, selecionando variáveis como verdadeiras ou falsas com base em sua presença nos conjuntos $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{S}$, respectivamente. Por fim, é garantida a natureza acíclica do grafo construído e validada a transformação entre a atribuições satisfatórias e quase-bipartições, afirmando a NP-dificuldade do problema em grafos com uma aresta dominante.

3.2. Problema da Quase-Bipartição em grafos livres de P_5

Em 2019, Bonamy, Dabrowski, Feghali, Johnson e Paulusma mostraram que os problemas QUASE-BIPARTIÇÃO e INDEPENDENTE FEEDBACK VERTEX SET podem ser resolvidos em tempo $O(n^{16})$. Em [Bacsó e Tuza, 1990], mostraram que qualquer grafo conexo livre de P_5 tem uma clique dominante ou um P_3 dominante. Em 2016, Camby e Schaudt generalizaram este resultado e mostraram que tal conjunto dominante pode ser computado em tempo polinomial.

Teorema 5. *Dado um grafo G e um triângulo dominante de G, pode-se determinar em tempo $O(n^2)$ se G é um grafo quase-bipartido.*

Seja $\{u, v, z\} \subseteq V(G)$ um conjunto dominante que induz um triângulo. Assume-se que $\{z\} \in \mathcal{S}$ e $\{u, v\} \in \mathcal{F}$. Logo, $N(z)$ deve formar uma floresta dentro de $\mathcal{F}$, pois z pertence a $\mathcal{S}$. Além disso, os vizinhos comuns de u e v não podem estar em $N(z)$ para evitar a formação de um K_4. A análise prossegue focando nos vértices não classificados, denotados como $B = N(v) \cup N(u) \setminus u, v, z$. Como $G[B]$ deve ser bipartido, o objetivo é particionar seus vértices em dois subconjuntos (B_1, B_2), com $B_1 \subseteq \mathcal{S}$ e $B_2 \subseteq \mathcal{F}$, que satisfaçam condições específicas. Essas condições garantem que G mantenha sua estrutura quase-bipartida. Qualquer bipartição (B_1, B_2) que atenda aos critérios especificados é suficiente para formar uma quase-bipartição, onde $B_1 \cup z = \mathcal{S}$. O problema de encontrar tal bipartição é então reduzido ao problema 2SAT.

Teorema 6. *Dado um grafo G e um P_3 dominante induzido de G, pode-se determinar em tempo $O(n^4)$ se G é um grafo quase-bipartido.*

Esta prova envolve a análise de quatro casos. Cada um deles considera diferentes configurações do conjunto dominante u, v, z e as relações entre os vértices.
Caso 1: $\{u, v\} \in \mathcal{F}$, $\{z\} \in \mathcal{S}$. Observa-se que $N(z)$ forma uma floresta, e $N(u) \cap N(v) \cap N(z) = \emptyset$ para prevenir ciclos. Os vértices não classificados (B) são particionados em conjuntos B_1 e B_2, respeitando certas condições, e o problema é reduzido a um problema 2SAT para encontrar uma bipartição de B. A prova é similar à do Teorema 5. O mesmo vale se $\{v, z\} \in \mathcal{F}$ e $\{u\} \in \mathcal{S}$.
Caso 2:$\{v\} \in \mathcal{F}$,$\{u, z\} \in \mathcal{S}$. Para manter a independência de $\mathcal{S}$, a vizinhança de u e z, $N(u) \cup N(z)$, deve pertencer inteiramente a $\mathcal{F}$, garantindo que $\mathcal{S}$ permaneça livre de arestas. Consequentemente, $N(u) \cup N(z)$ deve formar uma floresta, e $G[N(u) \cup N(z)]$ não deve conter nenhum caminho entre vértices de $N(v) \cap (N(u) \cup N(z))$ para prevenir ciclos em $\mathcal{F}$. Além disso, os vértices em $N(v) \setminus (N(u) \cup N(z))$ devem induzir um grafo bipartido. Para um vértice w neste conjunto, se ele tiver um vizinho $p \neq v$ que alcance v em $G[N(u) \cup N(z)]$, então p deve estar em $\mathcal{S}$. Neste ponto, de forma similar ao Teorema 2, uma fórmula 2SAT pode ser usada para decidir quais vértices não classificados de $N(v) \setminus (N(u) \cup N(z))$ devem estar em $\mathcal{F}$ e $\mathcal{S}$, em tempo $O(n^2)$.

https://proceedings.science/p/194159?lang=pt-br

Caso 3:$\{u, v, z\} \in \mathcal{F}$. Qualquer vértice com pelo menos dois vizinhos em $\{u, v, z\}$ deve pertencer a $\mathcal{S}$. Observa-se que o conjunto $(N(v) \setminus (N(u) \cup N(z))) \cup (N(z) \setminus (N(u) \cup N(v))) \cup (N(u) \setminus (N(v) \cup N(z)))$ forma um grafo bipartido B. Aplicando iterativamente um processo de 2-coloração a partir de $(N(v) \cap N(z)) \cup (N(u) \cap N(v)) \cup (N(u) \cap N(z))$, determinamos se existe uma quase-bipartição de G com $\{u, v, z\} \in \mathcal{F}$. Se sim, constrói-se uma partição (S', F', U) de $V(G)$, onde S' é independente, $F' \supseteq \{v, u, z\}$ induz uma floresta, e U representa vértices não classificados. G admite uma quase-bipartição $(\mathcal{S}, \mathcal{F})$ com $\{v, u, z\} \subseteq \mathcal{F}$ se, e somente se, $G[U]$ é um grafo bipartido, verificável em tempo linear.
Caso 4: $\{u, z\} \in \mathcal{F}$,$\{v\} \in \mathcal{S}$. A análise é dividida em dois subcasos. No caso A, investiga-se se u e z estão na mesma árvore de $\mathcal{F}$. É explorado os pares de vértices (a_u, a_z) onde a_u e a_z são vizinhos de u e z, respectivamente. São $O(n^2)$ pares (a_u, a_z), e em $O(m)$ tempo pode-se verificar se $\{a_u, a_z\} \cup N(v)$ induz uma floresta contendo uma árvore com u e z. Para cada par, verifica-se se $(N(u) \cup N(z)) \setminus (\{a_u, a_z\} \cup N[v])$ forma um grafo bipartido B. O tempo total de execução nesse caso é $O(n^4)$. No caso B, considera-se o cenário em que u e z estão desconectados em $\mathcal{F}$. Examina-se se $N(u) \cap N(z)$ é um conjunto independente e se $G[N(u) \cup N(z)]$ é bipartido. Se sim, o método 2SAT é usado para classificar os vértices de $N(z) \cup N(u)$ em $\mathcal{S}$ e $\mathcal{F}$. Em ambos os casos, técnicas de grafos bipartidos e 2SAT são utilizadas para encontrar uma quase-bipartição de G. O tempo total para examinar todos os casos é $O(n^4)$, onde n é o número de vértices em G.

Em seguida, melhoramos o resultado de Bonamy, Dabrowski, Feghali, Johnson e Paulusma [Bonamy et al., 2019] sobre o problema da QUASE-BIPARTIÇÃO em grafos livres de P_5.

Corolário 1. QUASE-BIPARTIÇÃO *em grafos livres de P_5 pode ser resolvida em tempo $O(n^2 \cdot m)$.*

Grafos quase-bipartidos são livres de K_4 e K_4's podem ser encontrados em tempo $O(m^2)$. Além disso, grafos livres de P_5 quase-bipartidos têm um K_3 ou P_3 dominante segundo [Bacsó e Tuza, 1990]. Portanto, é suficiente aplicar o Teorema 5 e o Teorema 6. Como G é livre de P_5, o Caso 4A do Teorema 6 pode ser executado em tempo $O(n^2 \cdot m)$, já que ou $a_u = a_z$ ou $a_u a_z$ é uma aresta de G.

4. Publicações resultantes do trabalho

Nesta seção, citaremos as conferências e o artigo de revista resultantes das descobertas principais da dissertação de mestrado [da Cruz, 2023].

Artigos de Conferência:

Essas publicações encapsulam as principais contribuições da dissertação.

1. [da Cruz et al., 2023] - *Particionamento de grafos em um conjunto independente e uma floresta: Características estruturais e algoritmos.* Em Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO), 2023, São José dos Campos. 55° Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO 2023) nos dias 06 a 09 de Novembro de 2023 em São José dos Campos/SP.

2. [da Cruz et al., 2024] - *Near-Bipartiteness, Connected Near-Bipartiteness, Independent Feedback Vertex Set and, Acyclic Vertex Cover on Graphs Having Small Dominating Sets*. Em Wu, W., Guo, J. (eds) Otimização Combinatória e Aplicações. COCOA 2023.

Artigos de Revista:

No início de 2024, fomos notificados de que nosso trabalho apresentado na conferência COCOA 2023 foi selecionado para inclusão na prestigiada edição especial do Journal of Combinatorial Optimization (JOCO). Esse reconhecimento enfatiza a importância e relevância de nosso trabalho no campo da otimização combinatória. Enviamos o manuscrito em abril e, no momento, aguardamos as etapas subsequentes do processo de publicação na revista.

Prêmios e Títulos:

A dissertação foi submetida ao CTD - 37° Concurso de Teses e Dissertações do CSBC 2024. Esse evento tem por objetivo, premiar as melhores teses de doutorado e dissertações de mestrado da área de Computação no Brasil, concluídas em 2023. Após ser apresentada no evento, a dissertação foi premiada com o 2° lugar, consolidando-se como um dos trabalhos acadêmicos de maior destaque no país.

5. Conclusão

A dissertação explorou o problema da QUASE-BIPARTIÇÃO e suas variantes em grafos com arestas dominantes e grafos livres de P_5. Foram propostos algoritmos polinomiais para QUASE-BIPARTIÇÃO e investigada a NP-completude da QUASE-BIPARTIÇÃO CONEXA. Além disso, estendeu-se a análise para grafos com conjuntos dominantes limitados, apresentando um algoritmo com complexidade $O(n^2 \cdot m)$ para QUASE-BIPARTIÇÃO em grafos livres de P_5. Conforme [Bacsó e Tuza, 1990], todo grafo conexo livre de P_5 possui uma clique ou um P_3 dominante. Portanto, para determinar se um grafo G conexo e livre de P_5 admite uma quase-bipartição, basta: verificar a existência de um K_4 dominante em $O(n^4)$; confirmar a existência de um P_3 ou K_3 dominante em $O(n^3)$; e aplicar o algoritmo descrito no Teorema 5 ou no Teorema 6 em tempo $O(m \cdot n^2)$, melhorando o estado da arte atual de tempo $O(n^{16})$ [Bonamy et al., 2019].

PROBLEMA ANALISADO	COMPLEXID. DE TEMPO
Problema de particionar em $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ em grafos com aresta dominante (QUASE-BIPARTIÇÃO CONEXA)	NP-Completo
Problema da Quase-Bipartição em grafos com aresta dominante	$O(n^2)$
Problema da Quase-Bipartição para grafos com aresta dominante sendo $\lvert\mathcal{S}\rvert$ mínimo (INDEPENDENTE FEEDBACK VERTEX SET)	NP-Difícil
Problema da Quase-Bipartição para grafos com aresta dominante sendo $\lvert\mathcal{F}\rvert$ mínima (COBERTURA DE VÉRTICES ACÍCLICO)	NP-Difícil
Problema da Quase-Bipartição em grafos com K_3 dominante	$O(n^2)$
Problema da Quase-Bipartição em grafos com P_3 dominante	$O(n^4)$
Problema da Quase-Bipartição em grafos livres de P_5	$O(m \cdot n^2)$

6. Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq, á CAPES e á FAPERJ pelas bolsas de fomento consedidas. Este suporte foi fundamental para viabilizar essa pesquisa.

Referências

Achlioptas, D. (1997). The complexity of G-free colourability. *Discrete Mathematics*, 165-166.

Agrawal, A., Gupta, S., Saurabh, S., e Sharma, R. (2017). Improved algorithms and combinatorial bounds for independent feedback vertex set. In *IPEC 2016*.

Bacsó, G. e Tuza, Z. (1990). Dominating cliques in P_5-free graphs. *Periodica Mathematica Hungarica*, 21(4):303–308.

Bonamy, M., Dabrowski, K. K., Feghali, C., Johnson, M., e Paulusma, D. (2018). Independent feedback vertex sets for graphs of bounded diameter. *Information Processing Letters*, 131.

Bonamy, M., Dabrowski, K. K., Feghali, C., Johnson, M., e Paulusma, D. (2017). Recognizing graphs close to bipartite graphs. In *MFCS 2017*.

Bonamy, M., Dabrowski, K. K., Feghali, C., Johnson, M., e Paulusma, D. (2019). Independent feedback vertex set for P_5-free graphs. *Algorithmica*, 81(4):1342–1369.

Borodin, O., Kostochka, A., e Yancey, M. (2013). On 1-improper 2-coloring of sparse graphs. *Discrete Math.*, 313(22):2638–2649.

Brandstädt, A., Brito, S., Klein, S., Nogueira, L. T., e Protti, F. (2013). Cycle transversals in perfect graphs and cographs. *Theoretical Computer Science*, 469:15–23.

Brandstädt, A., Le, V. B., e Szymczak, T. (1998). The complexity of some problems related to graph 3-colorability. *Discrete Applied Mathematics*, 89(1):59–73. ISSN 0166-218X.

Cowen, L., Goddard, W., e Jesurum, C. E. (1997). Defective coloring revisited. *J. Graph Theory*, 24(3):205–219.

da Cruz, M. L. L., Bravo, R. S. F., Oliveira, R. A., e Souza, U. S. (2024). Near-bipartiteness, connected near-bipartiteness, independent feedback vertex set and acyclic vertex cover on graphs having small dominating sets. In Wu, W. e Guo, J., editors, *Combinatorial Optimization and Applications*, p. 82–93, Cham. Springer Nature Switzerland.

da Cruz, M. L. L. (2023). Near-bipartiteness on graphs having small dominating sets. Master's thesis, Universidade Federal Fluminense (UFF).

da Cruz, M. L. L., de Souza Francisco Bravo, R., de Oliveira, R. A., e Souza, U. S. (2023). Particionamento de grafos em um conjunto independente e uma floresta: Características estruturais e algoritmos. In *55° Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, volume 55, Campinas.

Dross, F., Montassier, M., e Pinlou, A. (2017). Partitioning a triangle-free planar graph into a forest and a forest of bounded degree. *European Journal of Combinatorics*, 66:81–94.

Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, volume 174.

Grötschel, M., Lovász, L., e Schrijver, A. (1984). Polynomial algorithms for perfect graphs. *Ann. Discrete Math*, 21:325–356.

Karp, R. M. (1972). *Reducibility among combinatorial problems*. Springer.

Li, S. e Pilipczuk, M. (2020). An improved FPT algorithm for independent feedback vertex set. *Theory of Computing Systems*, 64(8):1317–1330.

Lima, C. V., Rautenbach, D., Souza, U. S., e Szwarcfiter, J. L. (2021). On the computational complexity of the bipartizing matching problem. *Annals of Operations Research*.

Misra, N., Philip, G., Raman, V., e Saurabh, S. (2012). On parameterized independent feedback vertex set. *Theoretical Computer Science*, 461:65–75.

Schaefer, T. J. (1978). The complexity of satisfiability problems. In *Proceedings of the tenth annual ACM Symposium on Theory of Computing*.

Yang, A. e Yuan, J. (2006). Partition the vertices of a graph into one independent set and one acyclic set. *Discrete Mathematics*, 306(12). ISSN 0012-365X.

https://proceedings.science/p/194159?lang=pt-br