LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

Jogos Partizan de Convexidade de Grafos

Samuel N. Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE), Crato, Brasil
samuel.araujo@ifce.edu.br

Raquel Folz, Rosiane de Freitas
Instituto de Computação, Universidade Federal do Amazonas (UFAM), Manaus, Brasil
{raquel.folz, rosiane} @ icomp.ufam.edu.br

João Marcos Brito, Rudini Sampaio
Departamento de Computação, Universidade Federal do Ceará (UFC), Fortaleza, Brasil
jmbmaluno@alu.ufc.br, rudini@dc.ufc.br

RESUMO

O primeiro artigo de convexidade em grafos gerais, em inglês, é o artigo "Convexity in graphs", publicado em 1981. Um de seus autores, Frank Harary, introduziu em 1984 os primeiros jogos de convexidade de grafos, focados na convexidade geodésica, que são jogos imparciais e foram investigados em uma sequência de cinco artigos até 2003. Somente em 2023, provou-se o primeiro resultado de complexidade PSPACE em jogos de convexidade imparcial. Neste artigo, introduzimos as variantes partizan desses jogos imparciais na convexidade geodésica e as estendemos para outras convexidades de grafos, obtendo estratégias vencedoras e resultados de complexidade. Obtemos estratégias vencedoras para geometrias convexas gerais e estratégias vencedoras para árvores a partir da teoria combinatória dos jogos de Conway em jogos partizan. Provamos também que o jogo normal e o jogo misère do jogo partizan da envoltória na convexidade geodésica é PSPACE-completo mesmo em grafos com diâmetro dois.

PALAVRAS CHAVE. Jogos de convexidade em grafos, PSPACE-Completude.

Teoria dos Grafos, Complexidade Computacional, Análise de Algoritmos, Teoria dos Jogos.

ABSTRACT

The first paper of convexity on general graphs, in English, is the paper "Convexity in graphs", published in 1981. One of its authors, Frank Harary, introduced in 1984 the first graph convexity games, focused on the geodesic convexity, which are impartial games and were investigated in a sequence of five papers until 2003. Only in 2023 the first PSPACE-hardness result on impartial convexity games were proved. In this paper, we introduce the partizan variants of these impartial games on the geodesic convexity and extend them to other graph convexities, obtaining winning strategies and complexity results. Among them, we obtain winning strategies for general convex geometries and winning strategies for trees from Conway's combinatorial game theory on partizan games. We also prove that the normal play and the misère play of the partizan hull game on the geodesic convexitiy is PSPACE-complete even in graphs with diameter two.

KEYWORDS. Graph convexity, geodesic games, PSPACE-hard, Combinatorial game theory.

Graph Theory, Computational Complexity, Analysis of Algorithms, Game Theory.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

1. Introdução

Harary [1984] introduziu os primeiros jogos de convexidade de grafos em seu resumo "Convexity in graphs: achievement and avoidance game". Esses jogos são imparciais e foram investigados em uma sequência de cinco artigos [Buckley e Harary, 1985a,b; Harary, 1984; Haynes et al., 2003; Nečásková, 1988] até 2003, todos focados na convexidade geodésica. Somente em 2023 provaram-se os primeiros resultados de PSPACE-completude em jogos de convexidade imparcial [Araújo et al., 2024]. Neste artigo, introduzimos as variantes partizan desses jogos imparciais sobre a convexidade geodésica e as estendemos para outras convexidades de grafos, obtendo resultados algorítmicos e de complexidade. Para explicá-los, precisamos de alguma terminologia.

Neste artigo, todos os grafos são simples e finitos. Seja $N_G(v)$ o conjunto de vizinhos de v em um certo grafo G e $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Podemos omitir o subscrito quando G estiver claro no contexto. Dado um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$, seja o *intervalo geodésico* $\mathrm{I_g}(S)$ o conjunto S e mais todo vértice em um menor caminho entre dois vértices de S. Dizemos que S é *convexo na convexidade geodésica* [Everett e Seidman, 1985; Farber e Jamison, 1987] se $\mathrm{I_g}(S) = S$. O *fecho convexo geodésico* de S é o menor conjunto convexo $\mathrm{hull_g}(S)$ contendo S. Sabe-se que $\mathrm{hull_g}(S)$ pode ser obtido aplicando $\mathrm{I_g}(\cdot)$ sobre S até obter um conjunto convexo.

Definimos a seguir os principais jogos introduzidos por Harary [Buckley e Harary, 1985a,b; Harary, 1984] para a convexidade geodésica. No *jogo normal*, o primeiro jogador incapaz de se mover perde o jogo. No *jogo misère*, o primeiro jogador incapaz de se mover ganha o jogo. A partir do clássico teorema de Zermelo e von Neumann [Zermelo, 1913], um dos dois jogadores tem uma estratégia vencedora em cada um desses jogos, uma vez que são jogos finitos de informação perfeita e sem empate. Portanto, o problema de decisão destes jogos é se Alice tem uma estratégia vencedora.

Definição 1.1. *Seja G um grafo. Nos jogos definidos abaixo, o conjunto L de vértices rotulados é inicialmente vazio e $f_1(L)$ e $f_2(L)$ dependem do jogo. Dois jogadores (Alice e Bob, começando por Alice) rotulam alternadamente um vértice não rotulado v que não está em $f_1(L)$. O jogo termina quando $f_2(L) = V(G)$.*

- *No jogo aberto da envoltória geodésica* $\mathrm{JEA_g}$*:* $f_1(L) = L$ *e* $f_2(L) = \mathrm{hull_g}(L)$.
- *No jogo aberto do intervalo geodésico* $\mathrm{JIA_g}$*:* $f_1(L) = L$ *e* $f_2(L) = \mathrm{I_g}(L)$.
- *No jogo fechado da envoltória geodésica* $\mathrm{JEF_g}$*:* $f_1(L) = f_2(L) = \mathrm{hull_g}(L)$.
- *No jogo fechado do intervalo geodésico* $\mathrm{JIF_g}$*:* $f_1(L) = f_2(L) = \mathrm{I_g}(L)$.

Um jogo combinatório de 2 pessoas sob a convenção de jogo normal ou misère é dito *imparcial* se o conjunto de movimentos disponíveis em qualquer posição (ou configuração) for o mesmo para ambos os jogadores. Por exemplo, os clássicos jogos imparciais Nim e Hackenbush são muito importantes na teoria Sprague-Grundy sobre jogos imparciais. É fácil ver que os jogos da Definição 1.1 são imparciais.

Em 1985, as variantes normal e misère do jogo de intervalo geodésico foram resolvidas para ciclos, grafos roda (*wheels*) e grafos bipartidos completos [Buckley e Harary, 1985b]. Em 1988, o resultado de [Buckley e Harary, 1985b] em relação aos grafos roda foi melhorado em [Nečásková, 1988] e, em 2003, [Haynes et al., 2003] obtiveram resultados para árvores, grafos multipartidos completos e grafos bloco nas variantes normal e misère. Em 2024, esses jogos foram estendidos para qualquer convexidade de grafos e resultados algorítmicos e de complexidade foram obtidos [Araújo et al., 2024].

Na Seção 2, introduzimos pela primeira vez as variantes partizan mais naturais dos jogos imparciais de convexidade da Definição 1.1. Obtemos estratégias vencedoras na classe de grafos

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

ptolemaicos para os jogos geodésicos PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$. Em relação aos jogos fechados PARTIZAN $\mathrm{JIF_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JEF_g}$ em árvores, obtemos um algoritmo de tempo polinomial baseado na teoria combinatória dos jogos de Conway. Finalmente, provamos que as variantes normal e misère de PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JEF_g}$ são PSPACE-completas. Também estendemos esses jogos partizan para qualquer convexidade de grafos e obtemos um resultado geral sobre geometrias convexas em jogos partizan de convexidade.

2. Jogos Partizan de Convexidade

Dizemos que um jogo combinatório para 2 pessoas sob a convenção do jogo normal ou misère é *partizan* se não for imparcial. Uma rica teoria combinatória de jogos partizan foi desenvolvida por John H. Conway em dois livros clássicos, "*On numbers and games*" [Conway, 1976] e "*Winning ways for your mathematical plays* " [Berlekamp et al., 1982], em que jogos imparciais como Nim e Hackenbush desempenham um papel central. Muitos jogos partizan são definidos particionando o conjunto de movimentos possíveis de um jogo imparcial em dois conjuntos, cada um dos quais correspondendo aos movimentos possíveis de cada jogador. Por exemplo, no jogo Blue-Red Hackenbush definido abaixo, os segmentos do jogo Hackenbush imparcial são coloridos em azul ou vermelho e um jogador chamado Azul só pode cortar segmentos azuis e o outro jogador chamado Vermelho só pode cortar segmentos vermelhos. A partir desta bela teoria combinatória dos jogos partizan, introduzimos pela primeira vez os seguintes jogos partizan de convexidade, que são as variantes partizan naturais dos jogos imparciais de convexidade da Definição 1.1.

Definição 2.1. *Seja Ψ um jogo qualquer da Definição 1.1. Seja* PARTIZAN Ψ *o jogo obtido a partir das seguintes modificações em Ψ: os vértices do grafo G são coloridos com A ou B, e Alice (resp. Bob) só pode rotular vértices coloridos com A (resp. B). Definimos também* PARTIZAN SIMPLIFICADO Ψ*: além do grafo colorido G, a instância contém um vértice v de G que já está rotulado no início do jogo* .

Mostramos uma interessante relação entre o Blue-Red Hackenbush clássico e os jogos PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEF_g}$ e $\mathrm{JIF_g}$. No jogo Blue-Red Hackenbush, existem pontos conectados por segmentos de linha coloridos em azul ou vermelho. Veja a Figura 1 para alguns exemplos. Alguns dos pontos estão no "chão" representado em verde. Dois jogadores, Azul e Vermelho, jogam alternadamente cortando segmentos. Azul (resp. Vermelho) só pode cortar um segmento azul (resp. vermelho) por jogada. O segmento cortado é eliminado juntamente com quaisquer outros segmentos que já não estejam ligados ao chão. Seguindo a convenção do jogo normal, o primeiro jogador incapaz de se mover perde. Há posições do Blue-Red Hackenbush que, independentemente de quem seja o primeiro a jogar, são vencedoras para Azul (Fig. 1d), ou para Vermelho (Fig. 1e), ou para o segundo jogador (Fig. 1a). Nenhuma posição é vencedora para o primeiro jogador, independentemente de quem seja o primeiro a jogar, o que seria chamado de posição *confusa* (*fuzzy*). Ou seja, Blue-Red Hackenbush é um jogo partizan não-confuso.

Conway associa um número diádico (número racional cujo denominador é uma potência de 2) a cada posição de Blue-Red Hackenbush em termos de vantagem (movimentos extras) para Azul. Uma posição em que o primeiro a jogar sempre perde tem valor zero (Figura 1a). Valores positivos são vencedores para Azul e valores negativos são vencedores para Vermelho. Ao contrário dos jogos imparciais, que usam a operação xor bit-a-bit na Teoria de Sprague-Grundy, o valor de uma posição Blue-Red Hackenbush consistindo em n posições disjuntas (onde um movimento em uma delas não afeta as outras) é a soma de seus valores.

Por exemplo, a posição (a) da Figura 1 tem valor 0, pois o primeiro jogador perde, independentemente se o primeiro jogador for Azul ou Vermelho. A posição (b) tem valor -1, pois o Azul perde imediatamente e o Vermelho tem 1 jogada extra. Por outro lado, as posições (c) e (d)

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

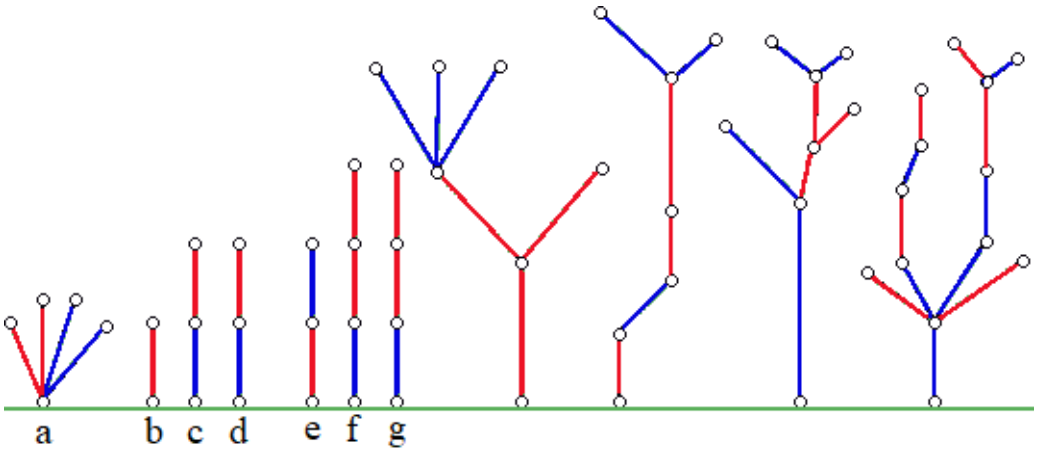


Figura 1: Posições do jogo partizan Blue-Red Hackenbush.

têm valor 1/2 cada, pois a soma das posições (b)+(c)+(d) dá uma posição com valor 0: o primeiro a jogar perde. Por fim, as posições (f) e (g) possuem valor 1/4 cada, pois a posição (e) possui valor -1/2 e a soma das posições (e)+(f)+(g) dá uma posição com valor 0.

O lema a seguir mostra uma relação interessante entre o jogo Blue-Red Hackenbush e PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEF_g}$ e $\mathrm{JIF_g}$. Uma estrela subdividida é a árvore obtida subdividindo cada aresta de uma estrela $K_{1,p}$ quantas vezes quisermos. Veja a Figura 2 para um exemplo.

Lema 2.2. *Seja G uma estrela subdividida com centro c cujos vértices (exceto c) são coloridos A ou B. Então o valor de* PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEF_g}$ *e* $\mathrm{JIF_g}$ *em (G, c) é o valor de Blue-Red Hackenbush na união disjunta de linhas isoladas, onde cada linha isolada representa um caminho máximo em G começando em c de modo que o k-ésimo primeiro segmento seja azul se e só se o k-ésimo último vértice do caminho é colorido com A.*

esboço. Em uma linha isolada do Hackenbush, se o k-ésimo primeiro segmento for cortado, todos os segmentos do k-ésimo ao último serão excluídos. Em PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEF_g}$ e $\mathrm{JIF_g}$ em (P_{n+1}, v_{n+1}), onde o caminho P_n tem vértices $v_1, \ldots, v_{n+1}$, se v_k for rotulado, então os vértices no caminho $v_k, \ldots, v_{n+1}$ não poderão mais ser rotulados nas próximas rodadas. Isso mostra a equivalência entre linhas isoladas de Hackenbush e caminhos em PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JIF_g}$. Em relação à estrela subdividida G, observe que uma jogada em um ramo de G não afeta os outros ramos. Então o jogo em G é uma união disjunta dos jogos nos ramos. □

Como exemplo, considere PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JIF_g}$ na estrela subdividida G da Fig. 2, onde o vértice preto já está rotulado no início, e sua posição Hackenbush equivalente com valor $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = 0$. Observe que o primeiro jogador perde, independentemente de ser Alice ou Bob.

Esta relação entre PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JIF_g}$ e Blue-Red Hackenbush funciona para estrelas subdivididas, mas não é válida para qualquer árvore. Além disso, ao contrário das posições Blue-Red Hackenbush, uma posição do jogo PARTIZAN $\mathrm{JIF_g}$ pode ser confusa (*fuzzy*), ou seja, vencedora para o primeiro jogador, seja quem for. Por exemplo, no ciclo C_4 com vértices v_1, v_2, v_3, v_4 onde v_1 e v_3 são coloridos com A e v_2 e v_4 são coloridos com B, o primeiro a jogar ganha em todos os jogos PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$, PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$, PARTIZAN $\mathrm{JIF_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JEF_g}$.

Apesar disso, o teorema da próxima seção mostra que as posições PARTIZAN $\mathrm{JIF_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JEF_g}$ não podem ser confusas em árvores e resolve esses jogos nesses grafos, que não

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

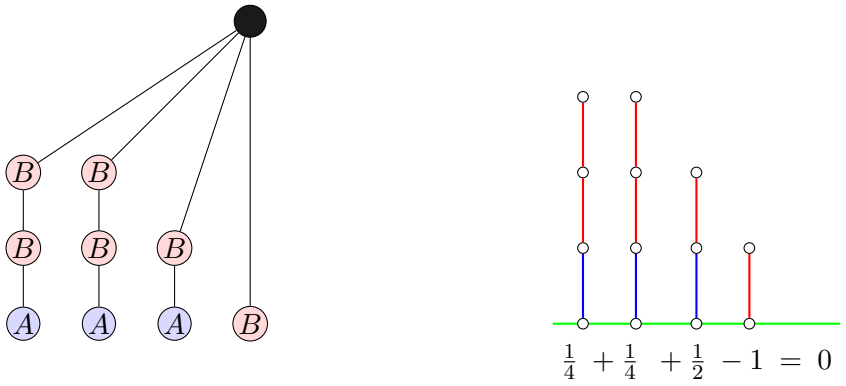


Figura 2: PARTIZAN SIMPLIFICADO JIF_g com o vértice preto já rotulado no início sobre a árvore subdividida. Instância com valor 0: o primeiro a jogar perde. A posição equivalente de Hackenbush é mostrada (Alice está associada ao Azul e Bob ao Vermelho).

são tão fáceis quanto Blue-Red Hackenbush em árvores.

3. Jogos Partizan de Convexidade em Árvores

Para tratar dos jogos PARTIZAN JIF_g e PARTIZAN JEF_g em árvores, é preciso falar sobre os *números surreais*, que foram criados em 1969 por John H. Conway e foram apresentados ao público pela primeira vez na "novela matemática" de 1974 intitulada "*Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned to Pure Mathematics and Found Total Happiness*" de Donald Knuth [1974].

Ao invés de defini-los em toda a sua generalidade, vamos nos concentrar nos números surreais obtidos a partir de uma posição do Blue-Red Hackenbush. A notação principal tem a forma $\{B|R\}$ com $B < R$, onde B é o maior valor possível de uma posição obtida após um movimento do Azul e R é o menor valor possível de uma posição obtida após um movimento do Vermelho. Lembre-se de que cada posição do Blue-Red Hackenbush está associada a um número diádico. Outras notações possíveis são $\{B|\cdot\}$ e $\{\cdot|R\}$ com $B \geq 0$ e $R \leq 0$, onde $\cdot$ significa *vazio* (o jogador não tem movimento). Por exemplo, as notações mais simples incluem $\{\cdot|\cdot\} = 0$ (nenhum jogador pode se mover e então o primeiro perde), $\{n|\cdot\} = n + 1$ ($n + 1$ segmentos azuis e nenhum segmento vermelho), $\left\{0 \;\middle|\; \frac{1}{2^{k-1}}\right\} = \frac{1}{2^k}$ (uma linha com 1 segmento azul unido ao solo seguido por k segmentos vermelhos, como na Figura 1(f)) e $\{n|n+1\} = n + \{0|1\} = n + \frac{1}{2}$ (n segmentos azuis mais uma posição (c) da Figura 1).

É mostrado em [Berlekamp et al., 1982; Conway, 1976] como determinar o valor exato de $\{B|R\}$, o qual satisfaz $B < \{B|R\} < R$, usando a chamada " *regra da simplicidade*", e como calcular recursivamente o valor de uma posição de Hackenbush usando os valores das subposições. Para árvores Hackenbush (como as posições da Figura 1), este procedimento pode ser feito em tempo polinomial. No entanto, calcular o valor de uma posição geral de Hackenbush é NP-difícil [Berlekamp et al., 1982], e ainda é um problema em aberto decidir se Blue-Red Hackenbush é PSPACE-difícil.

Teorema 3.1. *Em árvores,* PARTIZAN JIF_g *e* JEF_g *são jogos não confusos e são decidíveis em tempo polinomial.*

esboço. Seja T uma árvore. Como na prova do Teorema 3.1, podemos considerar que um vértice em um caminho entre dois vértices rotulados de T também é rotulado. Primeiro considere PARTIZAN SIMPLIFICADO JIF_g em (T, v) onde v é um vértice de T. Se $V(T) = \{v\}$, o valor desta posição é zero: o primeiro a jogar perde. Então seja u um vizinho de v. Escrevemos (T, v, u) para a instância

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

$(T_{v,u}, v)$ de PARTIZAN SIMPLIFICADO JIF_g, onde $T_{v,u}$ é a subárvore de T contendo v obtido após a remoção de todas as arestas de v exceto vu. Observe que v é uma folha de $T_{v,u}$. Vamos primeiro resolver o jogo para a instância (T, v, u).

Se u não tem vizinho, o valor é $\{0|\cdot\} = 1$ (resp. $\{\cdot|0\} = -1$) se u for colorido A (resp. B). Sejam $u_1, \ldots, u_k$ os vizinhos de u distintos de v. Suponha, por indução, que conhecemos os valores $\{A_i|B_i\}$ de (T, u, u_i) em PARTIZAN SIMPLIFICADO JIF_g, onde valores positivos (resp. negativos) são vencedores para Alice (resp. Bob). Lembre-se de que $A_i < \{A_i|B_i\} < B_i$ para qualquer i com A_i e B_i não vazios.

Vamos determinar o maior valor A_{vu} após um movimento de Alice em (T, v, u). Se nenhum vértice de (T, v, u) estiver colorido com A, então Alice não tem movimento e então A_{vu} está vazio. Se u tem a cor A, então a melhor opção para Alice é rotular o vértice u, já que $\{A_i|B_i\} > A_i$ para cada i, e consequentemente o valor $A_{vu} = \sum_{i=1}^{k}\{A_i|B_i\}$, já que os jogos nas subárvores são independentes após esta jogada. Caso contrário, assumindo que u tem a cor B, Alice deve jogar em um vértice $w_j \neq u$ em uma subárvore (T, u, u_j), rotulando também o vértice u, e consequentemente

$$A_{vu} \;=\; \max_{j=1}^{k}\left\{ A_j - \{A_j|B_j\} + \sum_{i=1}^{k}\{A_i|B_i\} \;:\; A_j \text{ não é vazio} \right\}$$

Agora vamos determinar o menor valor B_{vu} após um movimento de Bob em (T, v, u). Se nenhum vértice de (T, v, u) estiver colorido com B, então Bob não tem movimento e então B_{vu} está vazio. Se u tem a cor B, então Bob rotula u, já que $\{A_i|B_i\} < B_i$ para cada i, e o valor $B_{vu} = \sum_{i=1}^{k}\{A_i|B_i\}$. Caso contrário, supondo que u seja colorido com A, Bob deve jogar em uma subárvore (T, u, u_j), rotulando também o vértice u, e conseqüentemente

$$B_{vu} \;=\; \min_{j=1}^{k}\left\{ B_j - \{A_j|B_j\} + \sum_{i=1}^{k}\{A_i|B_i\} \;:\; B_j \text{ não é vazio} \right\}$$

Assim, resolvemos PARTIZAN SIMPLIFICADO JIF_g em (T, v, u) calculando $\{A_{vu}|B_{vu}\}$. Em relação ao PARTIZAN SIMPLIFICADO JIF_g em (T, v), observe que o jogo nas subárvores de v são independentes e então é possível calcular o valor $\{A_v|B_v\} = \sum_{u\in N(v)}\{A_{vu}|B_{vu}\}$.

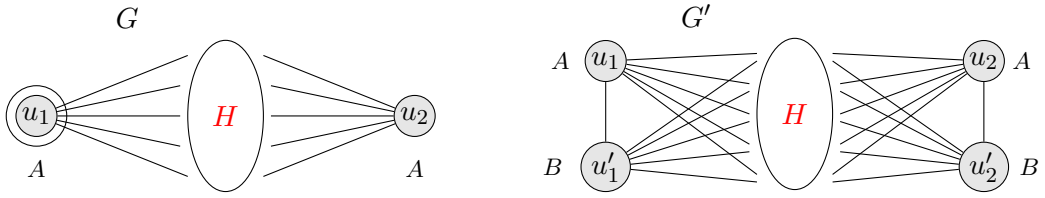
Agora, considere PARTIZAN JIF_g em T e vamos calcular o melhor valor A_T para Alice e B_T para Bob. Se nenhum vértice de T for colorido com A (resp. B), então A_T (resp. B_T) será vazio. Caso contrário, $A_T = \max_{v\in V(G)}\{A_v|B_v\}$ e $B_T = \min_{v\in V(G)}\{A_v|B_v\}$. Isso leva a um algoritmo recursivo de tempo polinomial. □

4. Complexidade PSPACE de Jogos Partizan da Envoltória

Nesta seção, provamos que as variantes normal e misère dos jogos PARTIZAN JEA_g e PARTIZAN JEF_g e suas versões simplificadas são PSPACE-completos (veja Definições 2.1). Como mencionado anteriormente, consideramos os jogos como problemas de decisão: dado um grafo, Alice tem uma estratégia vencedora? Como o número de jogadas é no máximo n e, em cada turno, o número de vértices possíveis para rotular é no máximo n, todos esses jogos são jogos de dois jogadores polinomialmente limitados, o que implica que eles estão em PSPACE [Hearn e Demaine, 2009].

Uma das principais dificuldades em provar a PSPACE-completude é encontrar o problema PSPACE-difícil mais adequado para a redução, uma vez que se conhecem muito mais problemas NP-difíceis do que PSPACE-difíceis. Felizmente, PARTIZAN NODE KAYLES e PARTIZAN CLIQUE FORMING, que são PSPACE-completos [Schaefer, 1978], revelaram-se muito úteis para ambas as reduções. Nestes jogos, Alice e Bob (começando com Alice) selecionam alternadamente os vértices

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br



(a) Grafo G da redução para PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEA_g}$

(b) Grafo G' da redução para PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$

Figura 3: Grafos das reduções na prova do Teorema 4.1 sobre as variantes misère.

de um grafo G, cujos vértices são coloridos com A ou B. Alice (resp. Bob) só pode selecionar vértices com a cor A (resp. B). Em PARTIZAN NODE KAYLES, os vértices selecionados durante o jogo devem induzir um conjunto independente. No jogo PARTIZAN CLIQUE FORMING, os vértices selecionados durante o jogo devem induzir uma clique.

Lembre que, na variante misère, o primeiro jogador incapaz de jogar vence o jogo.

Teorema 4.1. *As variantes misère de* PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ *e* PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEA_g}$ *são PSPACE-completas mesmo em grafos com diâmetro dois.*

esboço. Seja H uma instância do jogo PARTIZAN CLIQUE FORMING: um grafo cujos vértices são coloridos com A ou B. Podemos assumir que H não é completo. Primeiro obtemos uma redução para PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEA_g}$.

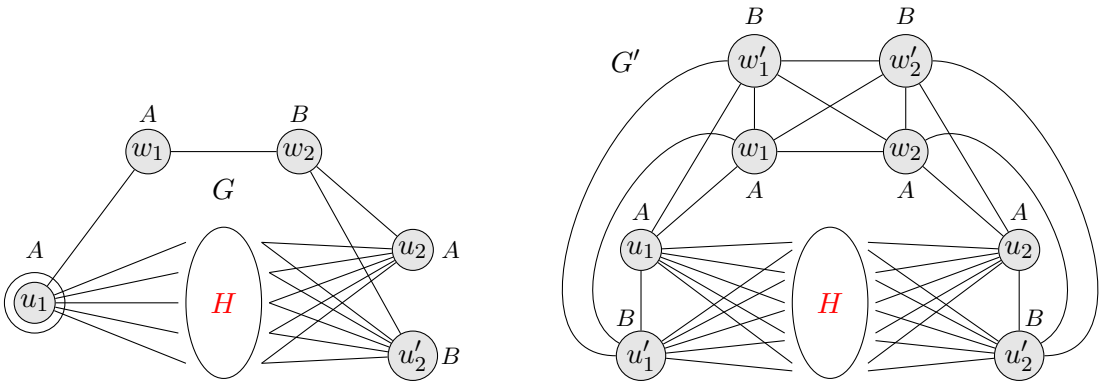
Seja G o grafo obtido de H adicionando dois novos vértices não adjacentes u_1 e u_2 com cor A que são adjacentes a todos os vértices de H. Veja a Figura 3(a). Observe que G tem diâmetro 2. Seja também u_1 o vértice que já está rotulado em PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEA_g}$. Provamos que Alice tem uma estratégia vencedora no jogo PARTIZAN CLIQUE FORMING em H se e só se ela tem uma estratégia vencedora na variante misère de PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEA_g}$ em (G, u_1). Se Alice rotular u_2, ela perde imediatamente, pois $\mathrm{hull_g}(\{u_1, u_2\}) = V(G)$. Além disso, se um jogador rotula um vértice v_j de H no jogo $\mathrm{JEA_g}$ e há um vértice rotulado não adjacente v_i em H, então o jogador perde imediatamente, já que $\mathrm{hull_g}(\{v_i, v_j\}) = V(G)$. Assim, podemos assumir que o conjunto L de vértices rotulados forma uma clique em todos os turnos, exceto no último. Isso está diretamente relacionado ao jogo PARTIZAN CLIQUE FORMING em H. Se Alice tiver uma estratégia vencedora no jogo PARTIZAN CLIQUE FORMING em H, então Bob é o primeiro a rotular um vértice de G com um não-vizinho rotulado, o que implica que ele perde a variante misère de PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEA_g}$. Analogamente, se Bob tiver uma estratégia vencedora no jogo PARTIZAN CLIQUE FORMING em H.

Agora obtemos uma redução para PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$. Seja G' o grafo obtido a partir de G adicionando dois novos vértices u'_1 e u'_2 com a cor B, adjacentes a todos os vértices de H, e as arestas u'_1u_1 e u'_2u_2. Veja a Figura 3(b). Observe que G' tem diâmetro 2. Se Alice tem uma estratégia vencedora em PARTIZAN CLIQUE FORMING em H, então ela joga PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ em G' usando sua estratégia em H, a menos que Bob selecione u'_1 (resp. u'_2) fazendo com que Alice selecione u_1 (resp. u_2). Analogamente, se Bob tiver uma estratégia vencedora no jogo PARTIZAN CLIQUE FORMING em H. Se houver dois vértices selecionados não adjacentes durante o jogo, então PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ termina e o último a jogar perde. Então, como antes, o conjunto L de vértices rotulados forma um clique em todos os turnos, exceto no último. □

Teorema 4.2. *As variantes normais de* PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ *e* PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEA_g}$ *são PSPACE-completos mesmo em grafos com diâmetro dois.*

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

esboço. Similar à prova do Teorema 4.1, embora um pouco mais complicada, usando os grafos da Figura 4. □



(a) Grafo G da redução para PARTIZAN SIMPLIFICADO $\mathrm{JEA_g}$

(b) Grafo G' da redução para PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$

Figura 4: Grafos das reduções da prova do Teorema 4.2 sobre as variantes normais.

Não é difícil verificar que os argumentos nas provas dos Teoremas 4.1 e 4.2 também são válidos para PARTIZAN $\mathrm{JEF_g}$.

Corolário 4.3. *As variantes normal e misère dos jogos da envoltória* PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$*,* PARTIZAN $\mathrm{JEF_g}$ *e suas versões simplificadas são PSPACE-completas mesmo em grafos com diâmetro dois.*

5. Jogos Partizan de Convexidade em Grafos Ptolemaicos

Dado um grafo G e um conjunto convexo S de G na convexidade geodésica, dizemos que um vértice $v \in S$ é *extremo* em S se $S \setminus \{x\}$ também é convexo. Os *vértices extremos do grafo* G são os vértices extremos de $V(G)$. [Farber e Jamison, 1986] provaram que um vértice é extremo na convexidade geodésica de um grafo se e somente se for simplicial (sua vizinhança fechada forma uma clique). Seja $\mathrm{Ext_g}(G)$ o conjunto de vértices extremos de G na convexidade geodésica, que são os vértices simpliciais.

[Farber e Jamison, 1986] também definiram uma convexidade de grafos como *geométrica* (também chamada de *geometria convexa*) se satisfizer a propriedade de *Minkowski-Krein-Milman*: todo conjunto convexo é a envoltória convexa de seu vértices extremos. A pesquisa sobre geometrias convexas de grafos geralmente se concentra na determinação da classe de grafos na qual uma determinada convexidade de grafos é geométrica. [Farber e Jamison, 1986] provaram que a convexidade geodésica é geométrica em um grafo se e só se o grafo for ptolemaico, ou seja, é cordal (todo ciclo induzido é um triângulo) e é distância-hereditária (todo caminho induzido é um caminho mínimo).

Os grafos ptolemaicos também são definidos como os grafos que satisfazem a desigualdade de Ptolomeu: para quaisquer quatro vértices v_1, v_2, v_3, v_4, temos

$$d(v_1, v_2) \cdot d(v_3, v_4) \; + \; d(v_1, v_4) \cdot d(v_2, v_3) \; \geq \; d(v_1, v_3) \cdot d(v_2, v_4),$$

onde $d(x, y)$ é a distância entre dois vértices x e y no grafo. Eles também são os grafos cordais livres de gemas, onde a gema é o grafo obtido pela adição de um vértice universal no caminho P_4.

Nesta seção, usamos esses resultados para obter estratégias vencedoras para PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$ em grafos ptolemaicos. Primeiro provamos um resultado geral sobre

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

a convexidade geodésica. Sejam $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{A}(G)$ e $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G)$ os subconjuntos de vértices de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$ coloridos com A e B, respectivamente, quando os vértices de G são coloridos com A ou B.

Teorema 5.1. *Seja G um grafo cujos vértices são coloridos com A ou B de modo que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$ seja um conjunto de envoltória (resp. intervalo) geodésica. Sejam V_A e V_B os conjuntos de vértices coloridos com A e B, respectivamente. Então Alice vence a variante normal de* PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ *(resp.* PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$*) se e só se $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G) = \emptyset$, ou $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{A}(G) \neq \emptyset$ e $|V_A| > |V_B|$. Além disso, Alice vence a variante misère de* PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ *(resp.* PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$*) se e só se $|\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{A}(G)| \leq |\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G)|$.*

esboço. Lembre-se de que $V(G) \setminus \{s\}$ é convexo para todo $s \in \mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$. Ou seja, existem duas opções para o final dos jogos PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$: ou um jogador não tem jogada ou todos os vértices de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$ foram rotulados.

Consideremos primeiro a variante normal. Se cada vértice de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$ tiver a cor A (resp. B), então Alice (resp. Bob) vence, pois ela (resp. ele) é a última a selecionar um vértice de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$. Portanto, suponha que haja um vértice colorido com A e um vértice colorido com B em $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$. Se $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$ é um conjunto de envoltória geodésica (resp. conjunto de intervalo geodésico), então PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ (resp. PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$) termina quando o último vértice de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$ está rotulado ou um dos jogadores não tem movimento. Então Alice (resp. Bob) joga evitando seu último vértice não rotulado em $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G)$, e então Alice vence se e só se $|V_A| > |V_B|$.

Consideremos agora a variante misère. Se $|\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{A}(G)| \leq |\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G)|$, então Alice pode rotular todos os vértices de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{A}(G)$ antes que Bob possa rotular todos os vértices de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G)$. Então os jogos misère terminam em duas situações possíveis: (a) Alice não consegue jogar porque todos os vértices de V_A foram rotulados, ou (b) Alice não consegue jogar porque Bob teve que rotular o último vértice não rotulado de $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G)$. Em ambos, Alice vence. Analogamente, se $|\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{A}(G)| > |\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G)|$, Bob vence os jogos misère. □

Como um exemplo simples do Teorema 5.1, considere o grafo G da prova do Teorema 4.1 adicionando dois vértices não adjacentes u_1 e u_2 adjacentes a todos os vértices de um determinado grafo H (cujos vértices são coloridos com A ou B), mostrado na Figura 3(a). Agora seja G' obtido de G adicionando dois novos vértices u_1' e u_2' e as arestas $u_1'u_1$ e $u_2'u_2$. Observe que $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}(G') = \{u_1', u_2'\}$ e $\mathrm{hull_g}(\{u_1', u_2'\}) = \mathrm{I_g}(\{u_1', u_2'\}) = V(G')$, ou seja, $\{u_1', u_2'\}$ é um conjunto de envoltória geodésica e um conjunto de intervalo geodésico de G'. Então, independentemente da estrutura e das cores do grafo G na construção deste exemplo, se u_1' e u_2' forem coloridos com A, Alice (resp. Bob) vence PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$ no grafo G' na variante normal (resp. misère). Além disso, se u_1' for colorido com A e u_2' for colorido com B, então Alice sempre ganha a variante misère e ela ganha a variante normal se e só se o número de vértices coloridos com A em G é maior que o número de vértices coloridos com B.

Agora encontramos estratégias vencedoras em tempo polinomial para PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ em grafos ptolemaicos. O teorema abaixo é a variante partizan de um resultado de [Haynes et al., 2003] sobre grafos bloco, uma vez que todo grafo bloco é ptolemaico.

Teorema 5.2. *Seja G um grafo ptolemaico cujos vértices são coloridos com A ou B. Sejam V_A e V_B o conjunto de vértices coloridos com A e B, respectivamente. Então Alice vence a variante normal de* PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$ *e* PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ *se e só se $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G) = \emptyset$, ou $\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{A}(G) \neq \emptyset$ e $|V_A| > |V_B|$. Além disso, Alice vence a variante misère de* PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$ *e* PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ *se e só se $|\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{A}(G)| \leq |\mathrm{Ext}_{\mathrm{g}}^{B}(G)|$.*

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

esboço. Em relação ao jogo PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$, o resultado decorre do Teorema 5.1 e do fato de que a convexidade geodésica é geométrica nos grafos ptolemaicos [Farber e Jamison, 1986]. Em relação ao jogo PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$, o resultado é válido, pois os grafos ptolemaicos são cordais e distância-hereditária, cada vértice de um grafo cordal está em um caminho induzido entre dois vértices simpliciais e todo caminho induzido é um caminho mínimo em um grafo distância-hereditária. □

6. Conclusões Finais

Neste artigo, introduzimos as variantes partizan dos jogos de convexidade geodésica $\mathrm{JIA_g}$, $\mathrm{JEA_g}$, $\mathrm{JIF_g}$ e $\mathrm{JEF_g}$, introduzidos na década de 1980 [Buckley e Harary, 1985a,b; Harary, 1984] (ver Definição 2.1). Abaixo listamos nossos resultados:

- Provamos no Teorema 3.1 que PARTIZAN $\mathrm{JIF_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JEF_g}$ são solucionáveis em tempo polinomial em árvores, usando a teoria combinatória dos jogos de Conway e a teoria dos números surreais;
- Provamos que PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$ e PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$ são solucionáveis em tempo polinomial em grafos ptolemaicos no Teorema 5.2, usando resultados em geometrias convexas e a Propeidade de Minkowski-Krein-Milman;
- Provamos a PSPACE-completude das variantes normal e misère de PARTIZAN $\mathrm{JEA_g}$, PARTIZAN $\mathrm{JEF_g}$ e suas versões simplificadas, mesmo em grafos com diâmetro dois, no Corolário 4.3, usando reduções do jogo partizan de FORMAÇÃO DE CLIQUES.

Abaixo listamos alguns problemas em aberto:

- PROBLEMA 1: Os jogos PARTIZAN $\mathrm{JIA_g}$ e $\mathrm{JIF_g}$ sobre o intervalo geodésico são PSPACE-completos?
- PROBLEMA 2: Seja GREEN $\mathrm{JIF_g}$ a extensão de PARTIZAN $\mathrm{JIF_g}$ permitindo vértices verdes, que podem ser rotulados por qualquer jogador. Se todos os vértices forem verdes, temos $\mathrm{JIF_g}$ (imparcial). Se nenhum vértice for verde, temos PARTIZAN $\mathrm{JIF_g}$. O jogo GREEN $\mathrm{JIF_g}$ também pode ser resolvido em tempo polinomial em árvores?

Referências

Araújo, S. N., Folz, R., de Freitas, R., e Sampaio, R. (2024). Graph convexity impartial games: complexity and winning strategies. *Theoretical Computer Science*, 998:114534.

Berlekamp, E. R., Conway, J. H., e Guy, R. K. (1982). *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, volume 1. Academic Press. ISBN 9780429945595.

Buckley, F. e Harary, F. (1985a). Closed geodetic games for graphs. *Congressus Numerantium*, 47: 131–138. Proc 16th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing.

Buckley, F. e Harary, F. (1985b). Geodetic games for graphs. *Quaest Math*, 8:321–334.

Conway, J. H. (1976). *On numbers and games*. L.M.S. monographs ; no. 6. Academic Press, London. ISBN 0121863506.

Everett, M. G. e Seidman, S. B. (1985). The hull number of a graph. *Discrete Mathematics*, 57(3): 217–223.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br

Farber, M. e Jamison, R. E. (1987). On local convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 66(3): 231–247.

Farber, M. e Jamison, R. E. (1986). Convexity in graphs and hypergraphs. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 7(3):433–444.

Harary, F. (1984). Convexity in graphs: Achievement and avoidance games. In *Annals of Discrete Mathematics (20)*, volume 87, p. 323. North-Holland.

Haynes, T., Henning, M., e Tiller, C. (2003). Geodetic achievement and avoidance games for graphs. *Quaestiones Mathematicae*, 26:389–397.

Hearn, R. e Demaine, E. (2009). *Games, Puzzles and Computation*. A. K. Peters Ltd.

Knuth, D. E. (1974). *Surreal Numbers: How Two Ex-students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness: a Mathematical Novelette*. Addison-Wesley Publishing Company. ISBN 9780201038125.

Nečásková, M. (1988). A note on the achievement geodetic games. *Quaest Math*, 12:115–119.

Schaefer, T. (1978). On the complexity of some two-person perfect-information games. *Journal of Computer and System Sciences*, 16(2):185–225.

Zermelo, E. (1913). Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels. In *Proc. 5th Int. Congress of Mathematicians*, p. 501–504.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193912
https://proceedings.science/p/193912?lang=pt-br