LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

OTIMIZAÇÃO DO CUSTO DE FUNDAÇÕES TRAPEZOIDAIS EM CONCRETO ARMADO

Matheus Martins Palmela Bastos de Oliveira
Universidade de Fortaleza, Programa de Graduação em Engenharia Civil
Av. Washigton Soares 1321, CEP: 60811-905, Fortaleza, Ceará, Brasil
Matheusmartins761@edu.unifor.br

Ítalo Linhares Salomão
Universidade de Fortaleza, Programa de Graduação em Ciência da Computação
Av. Washigton Soares 1321, CEP: 60811-905, Fortaleza, Ceará, Brasil
italosalomao@unifor.br

Placido Rogério Pinheiro
Universidade de Fortaleza, Programa de Pós-Graduação em Informática Aplicada
Av. Washigton Soares 1321, CEP: 60811-905, Fortaleza, Ceará, Brasil
placido@unifor.br

RESUMO

Este estudo investiga a otimização de uma fundação em concreto armado para edificações, focando especificamente em uma sapata trapezoidal, utilizando um modelo de Programação Não-Linear (PNL). O objetivo do modelo é minimizar o consumo de concreto e aço na construção deste sistema estrutural, conforme as normas brasileiras para garantir a segurança da edificação. A solução do modelo determina as dimensões ótimas da sapata e a quantidade de aço necessária, respeitando as restrições construtivas e normativas. O modelo proposto é viável para implementação prática e foi desenvolvido em Python, utilizando bibliotecas específicas para resolver problemas de programação não-linear.

PALAVRAS-CHAVE. Projeto de Fundação, Concreto armado, Programação Não-Linear. Pesquisa Operacional (PO) na Engenharia Civil, PM – Programação Matemática.

ABSTRACT

This study investigates the optimization of a reinforced concrete foundation for buildings, focusing specifically on a trapezoidal footing, using a Non-Linear Programming (NLP) model. The model aims to minimize the consumption of concrete and steel in the construction of this structural system, following Brazilian standards, to ensure the safety of the building. The solution of the model determines the optimum dimensions of the footing and the amount of steel required, respecting the constructive and normative restrictions. The proposed model is viable for practical implementation and was developed in Python, using specific libraries for solving non-linear programming problems.

KEYWORDS. Foundation Design, Reinforced Concrete, Non-Linear Programming. Operations Research (OR) in Civil Engineering, PM - Mathematical Programming.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

1. Introdução

As sapatas de concreto armado desempenham um papel crucial no fornecimento de suporte estrutural a edifícios e diversas estruturas de engenharia civil. Essas sapatas são projetadas para distribuir a carga da estrutura sobre uma área maior de solo para evitar recalques e garantir estabilidade. O reforço nas sapatas de concreto aumenta sua resistência e durabilidade, permitindo-lhes suportar diversos tipos de cargas e condições ambientais.

A escolha de uma fundação adequada envolve uma série de considerações técnicas, incluindo a capacidade de carga do solo, as cargas da edificação, e os custos associados aos materiais e à execução. O concreto armado é amplamente utilizado devido à sua alta resistência e durabilidade, sendo especialmente eficaz em fundações sujeitas a grandes esforços. No entanto, o dimensionamento e a otimização de fundações trapezoidais em concreto armado representam um desafio significativo, pois envolvem a interação de múltiplos parâmetros, como dimensões geométricas, propriedades dos materiais e condições de carregamento.

Estes elementos podem ter diversos formatos, alguns menos usuais como o apresentado por [Shanshan Li, 2020], sendo este um tronco de cone, geralmente utilizado em turbinas eólicas de montanha. O processo de escolha da forma que essa estrutura será construída passa por diversos fatores e usualmente é realizado através da experiencia do projetista, no entanto, é possível a utilização de métodos multicritérios para realizar esta adoção conforme realizado de forma correlata por [Salomão and Pinheiro, 2023] em lajes de concreto armado.

Para dimensionar adequadamente sapatas de concreto, é fundamental considerar diversos fatores, como reforço, comportamento à punção, propriedades do solo e dimensões estruturais. Estudos experimentais foram conduzidos para entender o comportamento à punção de sapatas de concreto armado com diferentes dimensões estruturais [Siburg and Hegger, 2014]. Essas pesquisas oferecem insights sobre como as dimensões das sapatas afetam sua integridade estrutural e capacidade de suporte de carga.

No projeto de sapatas de concreto, as propriedades mecânicas do solo são também de grande importância. A investigação revelou que avaliar as dimensões das sapatas de concreto em relação às propriedades do solo pode ajudar a prever as dimensões mais econômicas [Namdar, 2020]. Isso ressalta a importância de considerar as características do solo ao determinar o tamanho das sapatas de concreto.

A otimização de trapezoidais em concreto armado é um tema de grande relevância na engenharia civil, especialmente no contexto de projetos que buscam aliar segurança estrutural e economia de recursos. As fundações são elementos cruciais para qualquer edificação, uma vez que transferem as cargas da superestrutura para o solo, garantindo estabilidade e durabilidade ao longo do tempo. Entre os diversos tipos de fundações, as fundações trapezoidais se destacam por sua eficiência em distribuir cargas e por sua adaptabilidade a diferentes condições de solo e cargas aplicadas.

Na otimização do projeto de sapatas de concreto, aspectos como custo, emissões de CO2 e estabilidade estrutural são essenciais. A pesquisa investigou o uso de algoritmos e métodos numéricos para otimizar o projeto de sapatas de concreto armado considerando fatores como custo e impacto ambiental [Camp and Assadollahi, 2013]; [Solorzano and Plevris, 2020]. Essas metodologias buscam identificar os projetos de sapatas mais eficientes e sustentáveis.

Embora a engenharia tenha avançado tecnologicamente ao longo dos anos, limitações humanas ainda impedem a obtenção de valores ótimos em alguns casos. Isso resulta em soluções que atendem aos critérios de operabilidade e segurança, mas poderiam ser mais eficientes em aspectos como redução de custos, economia de materiais e diminuição da emissão de CO2,

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

esperando com isso obter soluções eficazes. Desta forma, esse trabalho objetiva o desenvolvimento um modelo em programação matemática com vista a otimização do custo associado aos materiais empregados no projeto de sapatas trapezoidais em concreto armado, de acordo com os normativos aplicados no Brasil, sendo estes a [NBR 6122 2019] e [NBR 6118 2023].

2. Trabalhos relacionados

A área de Pesquisa Operacional em Sistemas Estruturais é ampla, abrangendo diversos estudos que visam gerar economia operacional em sua construção, mitigando os impactos ambientais e econômicos. A seguir, discutimos os principais trabalhos relacionados a esta proposta.

No manuscrito, *Cost Optimization of Rectangular RC Footing Using GA and UPSO* [Chaudhuri and Maity 2019], é apresentada uma estimativa do custo ótimo de uma fundação isolada garantindo a segurança e seguindo as normas de acordo com a Indian Standard (IS) 456:2000. O trabalho aborda dois métodos de otimização (Algoritmos Genéticos e Otimização Unificada por Enxame de Partículas). A função objetivo é formulada com base no custo total da sapata. Isso inclui gastos com concreto, aço e formas. As variáveis que influenciam no valor são a área plana e profundidade da fundação juntamento com a área da armadura de flexão. O artigo também menciona que as constantes utilizadas foram dimensões da sapata, restrição à flexão, tensões de cisalhamento e deslocamentos.

Em *Metaheuristic Optimization of Reinforced Concrete Footings* [Nigdeli et al, 2018], é demonstrada a aplicação de algoritmos metaheurísticos (Pesquisa Harmônica, Algoritmo de Otimização Baseado no Ensino-Aprendizagem e Algoritmo de Polinização das Flores). O estudo propõe uma metodologia baseada na metaheurística para a otimização do custo de sapatas de concreto armado utilizando os algoritmos citados os quais são muito eficientes para lidar com problemas de otimização não-linear. Tais metodologias otimizam as dimensões das fundações, a orientação dos pilares e um design aplicável para o aço.

A abordagem *Optimal Design for the Reinforced Concrete Circular Isolated Footings* [López-Chavarría et al. 2019] apresenta o custo mínimo para fundações circulares isoladas em concreto armado com o uso de um modelo analítico. Dois experimentos foram feitos para obter o design que trouxesse o melhor custo de acordo com o código da ACI (American Concrete Institute). As equações de momento, ruptura por flexão e punção são usadas para validar a espessura, após isso as áreas de aço da sapata são obtidas e comparadas com o dimensionamento pelo método tradicional. O trabalho mostra em sua conclusão que a otimização é mais precisa e econômica do que qualquer outro método.

Finalmente em *Optimum Design of RC Footings with Genetic Algorithms According to ACI 318-19* [Solorzano and Plevris, 2020] é aplicado um algoritmo genético para encontrar o design mais econômico do elemento estrutural. A metodologia foi aplicada em uma sapata retangular isolada em concreto armado seguindo as normas do American Concrete Institute (ACI 318-19). As variáveis definidas no estudo incluem elementos relacionados ao processo de dimensionamento, como as dimensões da sapata. A função objetivo foi estabelecida para minimizar os custos dos materiais, e as restrições adotadas visam atender aos critérios de tensão admissível do solo, tensões de ruptura por flexão e punção, entre outros.

Embora as pesquisas trouxessem estruturas que fossem diferentes da que está sendo abordada no presente trabalho, podemos observar que todas elas abordam a diminuição nos custos para a realização de uma fundação. Podemos ver similaridades também na estruturação do modelo de otimização.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

3. Metodologia

O problema investigado consiste no dimensionamento de fundações de concreto armado que possuem formato trapezoidal, com o intuito de minimizar os custos dos materiais empregados em sua construção, mais especificamente concreto e aço. O problema é formulado como um modelo em Programação Não-Linear, onde sua composição é estruturada nos processos normativos preconizados da ABNT NBR 6118:2023, emulando assim o cálculo de forma fiel ao praticado em projetos reais.

Após abordar e estruturar o problema proposto, o próximo passo é reformulá-lo de uma maneira mais conveniente para sua análise. A construção do modelo envolve a definição do problema. [(Bazaraa et al, 2006), (Gill et al, 1989), (Mateus and Luna, 1986)]

O modelo possui 6 (seis) variáveis de decisão, a saber,

- h: Representa a altura da fundação trapezoidal. Esta variável é crucial para determinar a profundidade da fundação, influenciando a capacidade de carga e a estabilidade estrutural da fundação.
- h_0: Representa a altura inicial ou uma altura específica dentro da fundação.
- A: Representa uma das dimensões da base da fundação trapezoidal. Esta variável é importante para definir a largura ou comprimento da fundação na base, influenciando a área de contato com o solo e, consequentemente, a distribuição de cargas e a capacidade de carga da fundação.
- B: Representa a outra dimensão da base da fundação trapezoidal
- As_a: Representa a área total da seção transversal de aço na direção “a” da fundação. Esta variável é utilizada para garantir que a fundação possua a resistência necessária para suportar as cargas aplicadas, considerando o aço como material de reforço e suas propriedades mecânicas.
- As_b: Representa a área total da seção transversal de aço na outra direção na fundação.

As variáveis inteiras referentes a geometria da fundação são apresentadas nas Figuras 1 e 2, estabelecendo como limite superior o valor de 1000 (centímetros).

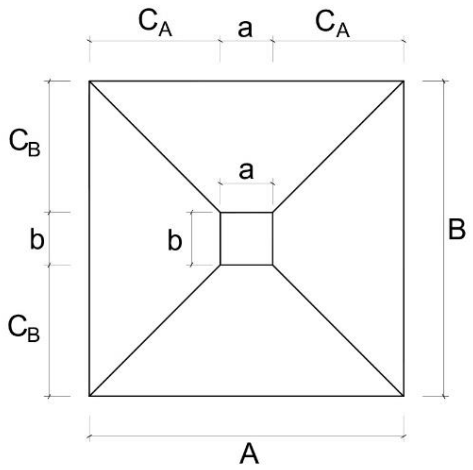


Figura 1: Vista superior de uma sapata típica.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

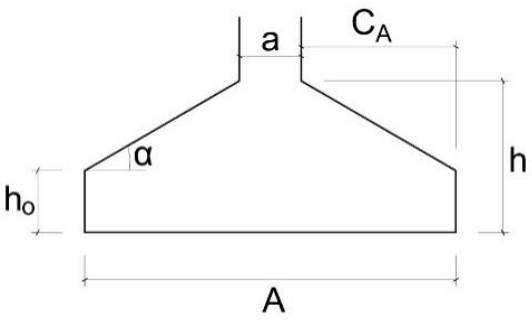


Figura 2: Vista lateral de uma sapata típica.

O objetivo é otimizar a quantidade de material (aço e concreto) empregado na construção da fundação trapezoidal. Devido o aço e concreto terem valores monetários distintos, foi criado uma constante para cada um dos materiais a fim de equalizar esta diferença. Desta forma a função objetivo se caracteriza conforme apresentado na Equação 1:

$$\text{Minimizar } z = \gamma . V_c + \beta . P_a \tag{1}$$

Onde:
γ constante relativa ao valor monetário do concreto em percentual quando comparado ao do aço
β constante relativa ao valor monetário do aço em percentual quando comparado ao do concreto
V_c é o volume de concreto da sapata em cm³
P_a é o peso de aço empregado na sapata em kg

Substituindo o valor do cálculo do volume de concreto e peso de aço dentro da função objetivo e aplicando as variáveis do problema, temos conforme segue:

$$Minimizar \left((h - h_o) \cdot 0{,}33 \cdot \left(A \cdot B + a \cdot b + ((A \cdot B \cdot a \cdot b + 1^{-7})^{0{,}5})\right) + (A \cdot B \cdot h_o) \cdot \gamma\right) + (\beta \cdot ((7800 \cdot A \cdot A_{sa}) + (7800 \cdot B \cdot A_{sb}))) \tag{2}$$

O valor de 7800 se refere ao peso específico do aço e é aplicado na formulação a fim de converter a área encontrada em um peso.

As restrições do problema estão estruturadas na norma brasileira de concreto armado (ABNT NBR 6118:2023) e apresentadas através das seguintes equações. Foi adotada a restrição (Fórmula 3) para garantir que a força (P) aplicada no solo pela sapata seja inferir a tensão admissível do solo (σ_{adm}) para dada área de fundação.

$$A \cdot B \cdot \sigma_{adm} \geq P \tag{3}$$

As restrições informadas nas Fórmulas 4 e 5 são utilizadas para que a altura que seja encontrada satisfaça a condição necessária para que a sapata seja considerada rígida.

$$A - a \leq 3 \cdot h \tag{4}$$
$$B - b \leq 3 \cdot h \tag{5}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

As restrições representadas pelas Fórmulas 6, 7 e 8 são empregadas no modelo para garantir valores mínimos estipulado pela NBR 6118:2023 para as alturas de uma sapata.

$$h_o \geq 20 \quad (6)$$
$$h \geq 30 \quad (7)$$
$$h_o \leq 0{,}333 \cdot h \quad (8)$$

É necessário estabelecer uma relação entre as alturas e as bases de sapata e pilar para que o ângulo α máximo seja 30º. Para isso foi empregada as restrições que seguem (Fórmulas 9 e 10).

$$h - h_o \leq 0{,}29 \cdot (A - a) \quad (9)$$
$$h - h_o \leq 0{,}29 \cdot (B - b) \quad (10)$$

A norma brasileira restringe que a menor dimensão possível da base da fundação não deve ser inferior a 60 (sessenta) centímetros. Tal restrição é estabelecida pelas Fórmulas 11 e 12.

$$A \geq 60 \quad (11)$$
$$B \geq 60 \quad (12)$$

As restrições referentes as Fórmulas 13 e 14 fazem com que a relação estabelecida pela norma brasileira entre a altura e a diferença das bases seja cumprida.

$$h \geq \frac{4}{\left(3 \cdot (A - a)\right)} \quad (13)$$
$$h \geq \frac{4}{\left(3 \cdot (B - b)\right)} \quad (14)$$

Devido à ancoragem dos pilares na sapata, a altura desta pode ser elevada. Portanto, a NBR 6118 estabelece a relação especificada pela restrição apresentada na Fórmula 15.

$$h \geq 0{,}75 \cdot (A - a) \quad (15)$$

Para que a área de aço seja calculada seguindo o método do CEB-70 (Comitê Europeu de Concreto), as restrições das Fórmulas 16 e 17 são empregadas para que os valores encontrados tornem as fundações capazes de resistir aos esforços de tração.

$$A_{sa} \geq \frac{\left(\sigma_s \cdot (0{,}252 \cdot A^2 - 0{,}38 \cdot A \cdot a + 0{,}13 \cdot a^2)\right)}{(347{,}83 \cdot (h - c - \frac{\emptyset}{2})} \quad (16)$$
$$A_{sb} \geq \frac{(\sigma_s \cdot (0{,}252 \cdot B^2 - 0{,}38 \cdot B \cdot b + 0{,}13 \cdot b^2))}{(347{,}83 \cdot (h - c - \frac{\emptyset}{2})} \quad (17)$$

Onde:
A_{sa} área de aço aplicada na direção da dimensão A
A_{sb} área de aço aplicada na direção da dimensão B
σ_s tensão aplicada ao solo (força proveniente da superestrutura dividida pela área da sapata)
$\emptyset$ diâmetro da barra de aço adotada
c cobrimento adotado para a sapata

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

Deve-se também adotar um valor para área de aço mínima. Tal relação é exemplificada na restrição abaixo (Fórmula 18).

$$A_{smin} \geq \rho_{min} \cdot \big(2 \cdot (a + b)\big) \cdot h \tag{18}$$

Onde:
A_{smin} valor da menor quantidade de aço a ser disposta no elemento
ρ_{min} taxa mínima de armadura longitudinal em relação à seção transversal de concreto

Por último de acordo com a NBR 6118 é necessário verificar as tensões nas bielas quanto ao cisalhamento (τ_{sd}). Esta verificação é feita pela restrição abaixo (Fórmula 19).

$$h \geq \frac{1300 \cdot 1{,}4}{\tau_{sd} \cdot \big(2 \cdot (a + b)\big)} + c + \frac{\emptyset}{2} \tag{19}$$

4. Resultados Computacionais

Foi utilizada a biblioteca de código aberto Pyomo, da linguagem de programação Python, para implementar e resolver o modelo apresentado. A resolução do modelo foi realizada utilizando o kit de Programação Não-Linear IPOPT (Interior Point OPTimizer). Este *solver* resolve problemas de otimização não linear em larga escala, lidando com milhares de variáveis e restrições, utilizando o método de pontos interiores.

Aplicações podem ser encontradas em [Wächter and Biegler, 2005], onde foi desenvolvido e apresentado um algoritmo estruturado no método primal-dual de pontos interiores com busca de linha de filtro para programação. Este algoritmo analisa propriedades de convergência local e global, incluindo a restauração da viabilidade pelo método de filtro, correções de segunda ordem e ajuste da inércia da matriz KKT.

No estudo computacional, foi analisada uma sapata assente em um solo com uma tensão admissível de 35 kN/cm². A sapata foi projetada para suportar uma carga de 1300 kN, que é transmitida por um pilar com dimensões de 20 cm por 50 cm. Isso implica que a sapata deve ser suficientemente robusta para distribuir a carga de forma segura sobre o solo, evitando assentamentos ou falhas estruturais. Além disso, a análise levou em consideração que a região que não compreende a altura útil da sapata foi definida como sendo de 5 cm. Esse valor é crucial para a determinação da profundidade total da sapata e para garantir a integridade estrutural do conjunto.

Também foi estabelecida uma relação adimensional de valores para o concreto e o aço, sendo de 0.52% e 0.48%, respectivamente. Esses valores representam as proporções relativas de custo entre os dois materiais, com o intuito de viabilizar a otimização do custo final da fundação. Ao aplicar estas proporções, o projeto visa não apenas garantir a segurança e a funcionalidade da estrutura, mas também buscar a solução mais econômica possível. A otimização do custo é essencial, especialmente em projetos de grande escala, onde pequenas economias em materiais podem resultar em reduções significativas nos custos totais.

Nestas condições, obteve-se como resultado, após o processamento do modelo de otimização proposto neste artigo, os valores que seguem. Esses resultados refletem a eficácia e precisão do modelo na resolução do problema abordado, demonstrando a viabilidade e aplicabilidade das técnicas de otimização discutidas.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

$$h = 60\ cm$$
$$h_o = 20\ cm$$
$$A = 158\ cm$$
$$B = 188\ cm$$
$$A_{sa} = 15.62\ cm^2$$
$$A_{sb} = 14.82\ cm^2$$

Desenvolvendo a mesma situação da aplicação de forma analítica, ou seja, utilizando os métodos tradicionalmente empregados pelos projetistas, obtivemos os valores de geometria e área de aço expressos a seguir. Esses valores foram calculados com base nos princípios estabelecidos de engenharia e seguem as normas e padrões vigentes, garantindo a conformidade e a precisão necessárias para a aplicação prática no projeto.

$$h = 55\ cm$$
$$h_o = 20\ cm$$
$$A = 185\ cm$$
$$B = 215\ cm$$
$$A_{sa} = 19.77\ cm^2$$
$$A_{sb} = 18.88\ cm^2$$

Ao comparar os valores oriundos do cálculo analítico com os resultados gerados pelo modelo de otimização, observamos uma economia significativa. O modelo de otimização proporcionou uma redução de aproximadamente 22% no volume de concreto utilizado (volume do modelo não otimizado foi de 1,78224m³ e volume de concreto do modelo otimizado foi de 2,187625m³) e uma diminuição de cerca de 21% na área de aço. Esses resultados destacam a eficiência do modelo de otimização proposto, demonstrando sua capacidade de reduzir custos e materiais sem comprometer a qualidade e a integridade estrutural do projeto.

5. Conclusões

O modelo proposto neste trabalho apresentou resultados satisfatórios ao dimensionar uma sapata trapezoidal, levando em consideração suas dimensões, a área de aço em ambos os sentidos e os critérios normativos estabelecidos pela legislação brasileira. Além disso, o modelo busca minimizar o consumo de concreto e aço, o que gera um espaço de solução complexo, mas, por ser a função objetivo convexa, garante a determinação de uma solução global.

Através da implementação de um exemplo prático, observou-se uma diferença significativa nos materiais utilizados. O volume de concreto foi reduzido em aproximadamente 22% (Figura 3), e a área de aço necessária diminuiu em aproximadamente 21% (Figura 4). Essa redução foi alcançada graças à otimização da geometria da sapata e ao consequente cálculo da área de aço necessária.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

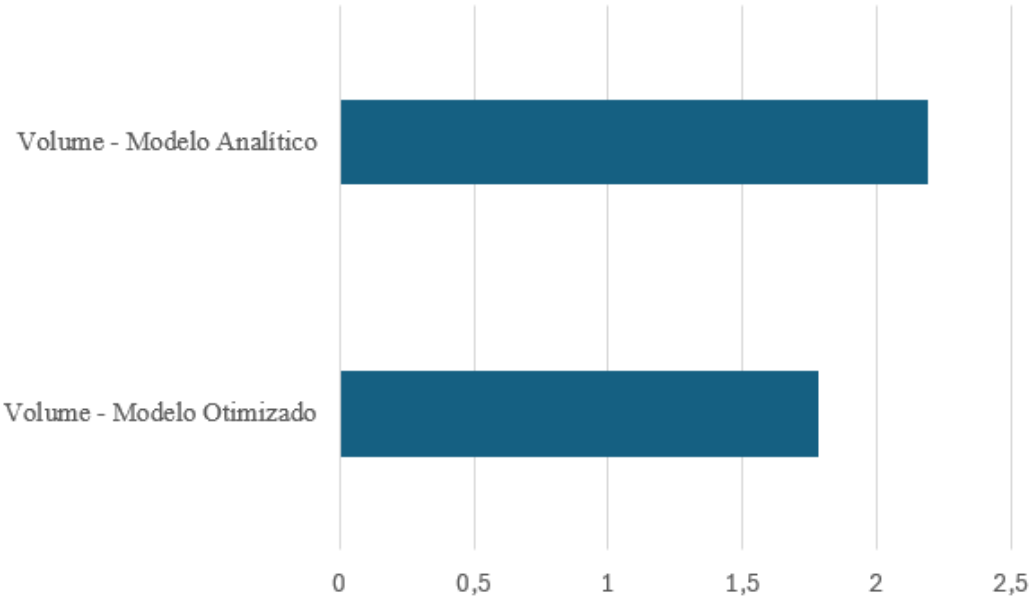


Figura 3: Comparativo entre volumes de concreto dos modelos

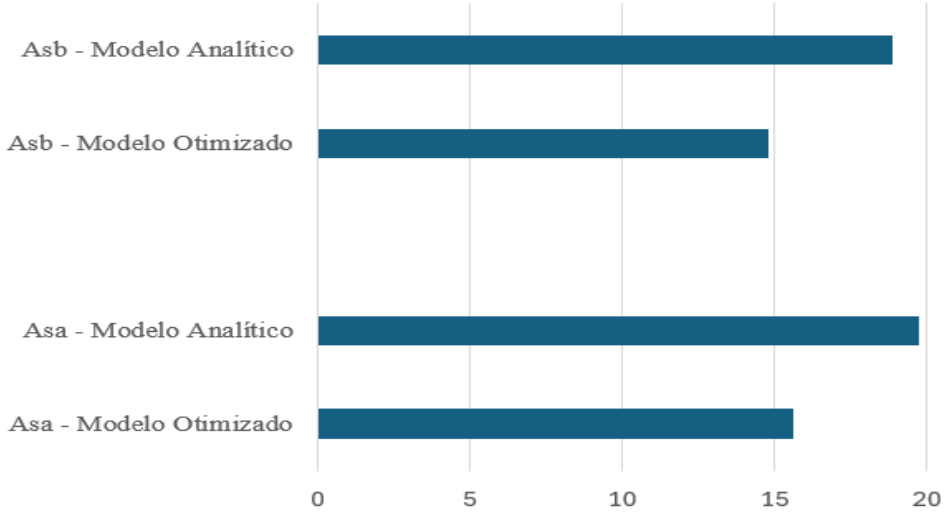


Figura 4: Comparativo entre áreas de aço dos modelos

É importante destacar que o processo usual de dimensionamento não considera a interação entre os custos desses elementos. A otimização utilizando um modelo de programação matemática, por outro lado, permite uma análise mais integrada e econômica. Essa abordagem proporciona uma vantagem substancial ao considerar os custos combinados de concreto e aço, resultando em um projeto mais econômico.

Este modelo facilita a busca prática por um valor ótimo para todas as dimensões do elemento estrutural, assim como a quantidade de aço utilizada, permitindo ajustes com base nas taxas de custo do aço e do concreto específicas do local onde o projeto está sendo desenvolvido.

Uma limitação do estudo proposto é a restrição à forma geométrica da estrutura, contemplando apenas sapatas de base retangular. No entanto, a forma pode ser cúbica ou trapezoidal, caso $h = h_o$. Essa limitação se estende a outros tipos de sapatas, como sapatas associadas e sapatas corridas, entre outras.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

Como trabalho futuro, é possível explorar outros formatos de sapatas, como sapatas circulares, amplamente utilizadas em bases de torres eólicas. Além disso, pode-se desenvolver um modelo que utilize a perspectiva de detalhamento da fundação como critério de otimização.

Agradecimentos

O terceiro autor agradece ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Tecnológico e Científico (CNPq) por meio da bolsa nº 306435/2023-3. Os autores agradecem à Fundação Edson Queiroz/Universidade de Fortaleza (UNIFOR) por todo o apoio recebido.

Referências

Associação Brasileira de Normas Técnicas. (2019). Norma técnica. Projeto E Execução De Fundações: NBR 6122.

Associação Brasileira de Normas Técnicas. (2023). Norma técnica. Projeto De Estruturas De Concreto: NBR 6118.

Bazaraa, M.S.; Shereli, H. D.; Shetty, C.M. (2006). Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. 3rd ed. Hoboken, N.J.: Wiley-Interscience.

Camp, Charles V.; Assadollahi, Andrew. (2013). CO 2 and cost optimization of reinforced concrete footings using a hybrid big bang-big crunch algorithm. *Structural And Multidisciplinary Optimization*, 48:411-426. URL http://dx.doi.org/10.1007/s00158-013-0897-6.

Chaudhurri, P.; Maity, D. (2019). Cost Optimization of Rectangular RC Footing Using GA and UPSO, Soft Computing, 24:709-721. URL https://doi.org/10.1007/s00500-019-04437-x

Gill, P.E.; Murray, W.; Wright, M.H. (1989), Practical Optimization, Academic Press.

LI, Shanshan; Zhang, Yukun; LI, Dayong. (2020). Capacity of Cone-Shaped Hollow Flexible Reinforced Concrete Foundation (CHFRF) in Sand under Horizontal Loading. *Advances In Materials Science and Engineering*, 2020:1-14.
URL http://dx.doi.org/10.1155/2020/6346590

Lopez-Chavarria, Sandra; Luevanos-Rojas, Arnulfo; Medina-Elizondo, Manuel; Sandoval-Rivas, Ricardo; Velazquez-Santillan, Francisco. (2019). Optimal design for the reinforced concrete circular isolated footings. *Advances In Computational Design*, 4:273-294. URL https://doi.org/10.12989/acd.2019.4.3.273

Mateus, G.R.; Luna, H.P.L. (1986) Programação não linear, Belo Horizonte: UFMG

Namdar, Abdoullah. (2020). The application of soil mixture in concrete footing design using the linear regression model. *Material Design & Processing Communications*, 3: 1-6. URL http://dx.doi.org/10.1002/mdp2.179

Nigdeli, S. M.; Bekdaş, G.; Yang, X.-S. (2018). Metaheuristic Optimization of Reinforced Concrete Footings. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 22:4555-4563. URL https://doi.org/10.1007/s12205-018-2010-6

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br

Salomão, I. L., Pinheiro, P.R. (2023). Exploring Analytical Hierarchy Process for Multicriteria Assessment of Reinforced Concrete Slabs. *Applied Sciences*, 13:9604-9604. URL https://doi.org/10.3390/app13179604

Siburg, Carsten; Hegger, Josef. (2014). Experimental investigations on the punching behaviour of reinforced concrete footings with structural dimensions. *Structural Concrete*, 15: 331-339. URL http://dx.doi.org/10.1002/suco.201300083

Solorzano, German; Plevris, Vagelis. (2020). Optimum Design of RC Footings with Genetic Algorithms According to ACI 318-19. *Buildings*, 10:110-110. URL http://dx.doi.org/10.3390/buildings10060110

Wächter, A., Biegler, L.T. (2005). On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106: 25-57. URL https://doi.org/10.1007/s10107-004-0559-y

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193846
https://proceedings.science/p/193846?lang=pt-br