

UMA NOVA ABORDAGEM DE CÁLCULO DE EFICIÊNCIA PARA O NETWORK DEA

Bruno Guimarães Torres

Universidade Federal Fluminense
135, R. Dom. Silvério, 1 - Quitandinha, Petrópolis - RJ
brunotorres@id.uff.br

João Carlos Correia Baptista Soares de Mello

Universidade Federal Fluminense
R. Passo da Pátria, 156 - São Domingos, Niterói – RJ
jccbsmello@id.uff.br

RESUMO

A Análise Envoltória de Dados em Rede (Network DEA) permite avaliar a eficiência de unidades tomadoras de decisão (DMUs) considerando seus processos internos. Diversos modelos NDEA, porém, frequentemente não apontam DMUs globalmente eficientes, dificultando a identificação de *benchmarks*. Este estudo propõe uma nova abordagem para o cálculo da eficiência, utilizando os valores de eficiência dos estágios internos para construir uma fronteira de eficiência global. Nessa fronteira, são eficientes as DMUs que possuem os valores de eficiência de seus estágios internos não-dominados pelos estágios das outras DMUs. A aplicação em um estudo de caso demonstrou a eficácia da abordagem, identificando sete DMUs eficientes. O modelo garante a existência de DMUs eficientes, alinhando-se com a natureza não paramétrica do DEA, identifica *benchmarks* com base na similaridade de desempenho interno e é flexível, aplicável a diferentes modelos NDEA.

PALAVRAS CHAVE. Network DEA, Eficiência, Benchmarks

Tópicos (SE-DEA, DEA – Análise Envoltória de Dados)

ABSTRACT

Network Data Envelopment Analysis (Network DEA) enables evaluating decision-making units (DMUs) considering internal processes. However, many NDEA models often fail to identify globally efficient DMUs, hindering benchmarking. This study proposes a novel approach for calculating efficiency, utilizing internal stage efficiency values to construct a global efficiency frontier. In this frontier, DMUs that have the efficiency values of their internal stages that are not dominated by the stages of others DMUs are efficient. A case study demonstrated the approach's efficacy, identifying seven efficient DMUs. The model ensures the existence of efficient DMUs, aligns with the non-parametric nature of DEA, identifies benchmarks based on internal performance similarity, and is flexible, being applicable to various NDEA models.

KEYWORDS. Network DEA, Efficiency, Benchmarks

Paper topics (SE-DEA, DEA – Data Envelopment Analysis)

1. Introdução

A Análise Envoltória de Dados (DEA) é um modelo não-paramétrico desenvolvido por Charnes *et al.* [1978] que é utilizado para calcular a eficiência de DMUs (unidades tomadoras de decisão) em diversos campos de pesquisa. Com o passar dos anos, diversos modelos avançados foram desenvolvidos, como os modelos com restrição aos pesos [Allen *et al.*, 1997], modelos de avaliação cruzada [Doyle e Green, 1994], modelos de supereficiência [Andersen e Petersen, 1993], modelos baseados em folga [Tone, 2001] e os modelos Network DEA (DEA em rede).

O Network DEA (NDEA) foi desenvolvido inicialmente por Färe e Grosskopf [2000], com o propósito de destrinchar a eficiência das DMUs em estágios internos. Assim como o DEA tradicional, o NDEA pode ser aplicado em diversos contextos [Ratner *et al.*, 2023]. No DEA tradicional, cada DMU recebe um valor de eficiência, enquanto no NDEA, a eficiência da DMU também é calculada, no entanto, ela também é subdividida em estágios internos, e cada um desses estágios obtém um valor de eficiência. A vantagem desse modelo é que agora os tomadores de decisão conseguem compreender qual é a fonte de ineficiência da sua unidade, e tomar decisões a fim de reduzir essas ineficiências.

No entanto, os modelos NDEA têm a característica de muitas vezes não apontar nenhuma DMU como eficiente [Despotis *et al.*, 2023; Li, 2017], como pode ser visto em várias aplicações reais [Chen *et al.*, 2009; Chu and Zhu, 2021; Kao and Hwang, 2008a; Mariano *et al.*, 2021]. Essa característica é contraditória com o fato de DEA ser um modelo não paramétrico, além disso, dificulta a obtenção de alvos e *benchmarks*, pois se não há uma DMU eficiente, em quem as DMUs ineficientes devem se espelhar? Por último, essa característica pode fazer com que o modelo seja mal compreendido por tomadores de decisão não familiarizados com DEA, que podem interpretar os resultados de forma equivocada, visto que em uma possível aplicação todas as DMUs podem ter um valor de eficiência muito baixo.

Portanto, o presente estudo tem como objetivo desenvolver uma nova maneira de calcular a eficiência nos modelos Network DEA, a fim de que eles sejam condizentes com os modelos tradicionais, onde sempre temos DMUs eficientes que podem ser *benchmarks* para as DMUs ineficientes. Além disso, o estudo também tem como objetivo apontar os *benchmarks* para essas DMUs ineficientes.

O artigo está dividido em seções: a segunda seção apresenta as características dos modelos NDEA. A terceira seção apresenta a estruturação do modelo proposto. A quarta seção apresenta os resultados e suas discussões e a quinta seção apresenta as conclusões do estudo.

2. Network DEA

A premissa do NDEA, é considerar que existem processos internos dentro de cada DMU, com um conjunto de *inputs* e *outputs* que são relacionados entre si [Färe and Grosskopf, 2000]. Os modelos NDEA foram descritos de várias maneiras, sendo o mais simples o modelo básico de dois estágios ilustrado na Figura 1.

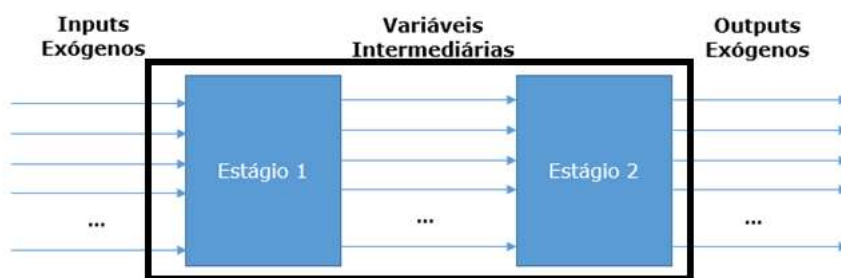


Figura 1: Modelo básico de 2 estágios [Kao e Hwang, 2008]

A figura 1 mostra que dentro da DMU existem estágios internos, e cada estágio terá sua eficiência calculada de acordo com os *inputs* e *outputs* relacionados a ele. Pode ser observado também que as variáveis intermediárias são *inputs* do segundo estágio, enquanto são *outputs* do primeiro estágio, o que mantém todo o modelo conectado, formando uma rede.

No entanto, esse é apenas um dos diversos modelos já apresentados na literatura. Kao, [2014] desenvolveu uma revisão dos estudos que utilizaram NDEA, classificando-os quanto a sua estrutura e a modelagem utilizada.

É possível observar que, quanto as estruturas os modelos podem ser classificados como: Básico de dois estágios, Geral de dois estágios, Em série, Paralelo, Misto, Hierárquico e Dinâmico. Em relação ao tipo de modelo os modelos podem ser classificados como: independente, medida de distância do sistema, medida de distância do processo, medida de distância do fator, medida baseada em folgas, medida em forma de proporção, medida em forma de relação, teoria dos jogos e medida baseada em valor.

Em comum o fato de os modelos apontarem valores de eficiência para as DMUs e também para os seus estágios internos, com exceção dos modelos “Medida de distância do sistema”. No entanto, a forma de se obter as eficiências difere de acordo com o modelo utilizado.

Outros estudos também propuseram classificações para os modelos NDEA [Halkos *et al.*, 2014]. Koronakos [2019] dividiu os modelos entre o paradigma de avaliação independente e o paradigma de avaliação conjunta. Sendo os modelos de avaliação independente aqueles que calculam as eficiências das DMUs e dos seus estágios internos de forma independente. Já os modelos que utilizam o paradigma de avaliação conjunta são aqueles que o cálculo das eficiências é feito de forma conjunta.

Esses modelos de avaliação conjunta podem ser subdivididos entre: a abordagem de decomposição de eficiência, a abordagem de composição de eficiência, a abordagem de medidas baseadas em folgas e a abordagem centrada no sistema.

A abordagem de decomposição da eficiência calcula primeiro a eficiência do sistema e depois as eficiências dos estágios internos. Compõem essa abordagem o modelo relacional multiplicativo [Kao and Hwang, 2008], o modelo relacional [Kao, 2009], o modelo aditivo [Chen *et al.*, 2009], o modelo que utiliza a teoria dos jogos [Liang *et al.*, 2008], entre outros.

Entre as críticas aos modelos estão o fato de que os modelos relacionais e o de teoria dos jogos não fornecem pesos únicos, o modelo aditivo é enviesado para um dos estágios internos [Ang e Chen, 2016; Despotis *et al.*, 2016a], e o modelo da teoria dos jogos não se adequa bem ao retorno variável de escala [Chen *et al.*, 2013; Koronakos, 2019].

Já a abordagem de composição de eficiência calcula primeiro as eficiências dos estágios e em seguida a eficiência do sistema. O principal modelo dessa abordagem é o modelo desenvolvido por Despotis *et al.* [2016a] que utiliza programação multiobjetivo e agrega as eficiências através de multiplicação ou adição. O modelo de “weak-link” [Despotis *et al.* 2016b] também pertence a essa abordagem, nesse caso a eficiência do estágio global é a menor das eficiências dos estágios internos.

Na abordagem de medição baseada em folgas, as eficiências de cada estágio interno e a eficiência do sistema são obtidas simultaneamente a partir do modelo. O principal modelo dessa abordagem é o modelo de folgas desenvolvido por Tone e Tsutsui [2009] baseado no modelo do envelope, que pode ser tanto de link fixo como de link livre. No entanto, alguns estudos criticam o modelo desenvolvido e propõem soluções para alguns dos seus problemas [Fukuyama e Mirdehghan, 2012; Mirdehghan e Fukuyama, 2016].

Por último, a abordagem centrada no sistema fornece apenas uma medida de desempenho geral sem gerar as eficiências dos estágios. Essa abordagem se assemelha a Medida de distância do sistema, apontado na classificação desenvolvida por Kao [2014]. Nessa abordagem se destaca o trabalho desenvolvido por Färe [1991].

Percebe-se que existem muitas maneiras de se obter a eficiência da DMU em análise, no entanto, para a maior parte dos modelos, excluindo-se os do paradigma independente, um conjunto de DMUs pode não ter nenhuma DMU eficiente. Isso pode ocorrer pois as DMUs são homogêneas e cada estágio possui o seu conjunto de possibilidade de produção (PPS – Production Possibility

Set) e o PPS do sistema geral é definido como a composição dos PPSs individuais. Portanto, o sistema só é eficiente caso todos os seus estágios internos sejam eficientes, e isso nem sempre ocorre [Despotis *et al.*, 2023].

No entanto, essa característica é um contrassenso em DEA, visto que a Análise Envolvória de Dados é conhecida por ser não-paramétrica e benevolente com as DMUs em análise. Sendo assim, sempre teria que haver uma DMU eficiente, que possa servir como *benchmark* para as outras.

Uma das dificuldades de ser eficiente em todos os estágios internos advém pelo fato de que as DMUs possuem recursos limitados. Portanto, não conseguem ser eficientes globalmente, tendo que escolher se focam seus recursos em algum dos estágios internos para tentar ser eficiente em detrimento dos outros, ou se tentam possuir um desempenho mais equilibrado nos estágios internos, não sendo eficiente em nenhum deles. Até porque, como as variáveis intermediárias podem atuar como *inputs* e *outputs* simultaneamente, uma variação do seu valor melhora um estágio em detrimento do outro [Liang *et al.*, 2008].

Para superar tais limitações, Despotis *et al.* [2023] propuseram uma abordagem não convencional que considera a DMU como um sistema com duas perspectivas: a DMU como produtora e como consumidora das medidas intermediárias. Essas novas perspectivas buscam contornar as convenções tradicionais do NDEA e oferecer uma análise mais completa da eficiência global. Dessa forma, eles garantem sempre uma DMU globalmente eficiente. No entanto, ela é limitada a um modelo específico, e à estrutura básica de dois estágios. Além disso, a lógica das perspectivas pode não se adequar aos problemas a serem estudados.

Considerando o exposto, esse estudo pretende buscar uma alternativa para solucionar o problema citado, apontando as DMUs eficientes para todos os modelos NDEA que calculam a eficiência dos estágios internos, considerando as performances de cada DMU em cada estágio. Além disso, o modelo apontará as DMUs que são *benchmarks* das outras, analisando quais possuem desempenho semelhante em relação ao valor calculado nos estágios internos.

3. Estruturação do modelo

O modelo estruturado necessita que as eficiências dos estágios internos das DMUs sejam calculadas a priori por algum modelo NDEA. Portanto, o ideal é que se utilize modelos da abordagem de composição de eficiência, como o modelo proposto por Despotis *et al.* [2016a], apenas para o cálculo das eficiências internas dos estágios. No entanto, os modelos das abordagens de decomposição de eficiência global e da medição baseada em folgas também podem ser utilizados, no entanto, o modelo proposto nesse estudo seria visto como um ajuste no cálculo do valor da eficiência global, pois esses já teriam sido calculados pelos modelos NDEA. Por último, os modelos da abordagem centrada no sistema não podem ser utilizados pois não calculam a eficiência dos estágios internos da DMU.

Com os valores das eficiências dos estágios internos da DMU calculados, o modelo pode ser aplicado. A fronteira de eficiência global será a fronteira construída que maximiza o quociente da combinação linear dos estágios internos, com a restrição de que para qualquer DMU esse quociente não pode ser maior que 1.

Essa lógica é a mesma utilizada no DEA tradicional, a diferença é que no DEA clássico a fronteira de eficiência é desenvolvida através da combinação linear dos *inputs* e dos *outputs*, enquanto no modelo proposto, a combinação linear é relacionada aos estágios internos.

É possível então desenvolver uma fronteira de eficiência global através da combinação linear das eficiências internas das DMUs, considerando que são eficientes as DMUs que possuem os valores de eficiência de seus estágios internos não-dominados pelos estágios das outras DMUs.

Essa análise é corroborada pelo fato de que as DMUs possuem recursos limitados, portanto possivelmente uma DMU não consegue ser globalmente eficiente pelo fato de priorizar um dos estágios, ou caso não priorize um dos estágios, pode possuir desempenho razoável em todos os estágios, não se destacando em nenhum. No entanto, quando se compara essa DMU com outras DMUs, nenhuma possui a garantia de ter um desempenho superior a ela, e, portanto, ela deveria

ser considerada eficiente globalmente.

O modelo matemático desenvolvido será análogo ao modelo de *input* unitário desenvolvido Soares de Mello *et al.* [2008]. O *input* será unitário para todas as DMUs e cada *output* corresponderá ao valor da eficiência de um estágio interno. A modelagem está apresentada no modelo 1. A função objetivo calcula a eficiência global da DMU em análise (Eff_0) e ω corresponde ao peso associado a cada estágio interno p . No total são modeladas n DMUs e q estágios internos.

$$\begin{aligned}
 &Max\ Eff_0 = \sum_{p=1}^q \omega^{(p)} Eff_0^{(p)} \\
 &sujeito\ a \\
 &\sum_{p=1}^q \omega^{(p)} Eff_k^{(p)} \leq 1, k = 1, \dots, n, \\
 &\omega^{(p)} \geq 0, p = 1, \dots, q
 \end{aligned} \tag{1}$$

O modelo 1 desenvolve uma fronteira de eficiência com as características apontadas anteriormente. Assim como nos modelos DEA clássicos poderão existir DMUs fortemente eficientes e fracamente eficientes. Essas DMUs fortemente e fracamente eficientes podem ser identificadas pelo modelo dual. Esse modelo está descrito em 2 e irá apontar também os alvos de eficiência dos estágios internos e os *benchmarks* de cada DMU.

$$\begin{aligned}
 &Min\ \sum_{k=1}^n \lambda_k \\
 &sujeito\ a \\
 &\sum_{k=1}^n Eff_k^{(p)} \lambda_k \geq Eff_0^{(p)}, p = 1, \dots, q \\
 &\lambda_k \geq 0, k = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2}$$

É importante destacar que os *benchmarks* serão aquelas DMUs que possuem características semelhantes quanto ao desempenho dos estágios internos.

4. Análise dos Resultados

A fim de demonstrar os resultados do modelo, ele foi aplicado ao estudo de caso desenvolvido por Kao e Hwang [2008] que analisa um conjunto de 24 seguradoras taiwanesas. Apesar desse estudo ser da abordagem de decomposição de eficiência global, esses dados são muito utilizados na literatura, e assim a comparação dos resultados pode acontecer de maneira facilitada. A tabela 1 apresenta os valores das eficiências dos estágios internos e a eficiência global calculada pelo artigo original e a eficiência global calculada pelo Modelo 1 e os seus respectivos pesos.

A Tabela 1 mostra que o modelo proposto indicou 7 DMUs eficientes globalmente. É possível observar que todas as DMUs que tiveram pelo menos um dos estágios internos eficientes foram eficientes globalmente. Além disso, a DMU 5 também foi eficiente, mesmo não sendo eficiente em nenhum dos estágios internos. Isso ocorreu pelo fato de não existir nenhuma DMU com as eficiências dos dois estágios internos maiores que as eficiências calculadas para ela. Além disso, conforme esperado, todas as DMUs tiveram uma melhora no cálculo da eficiência do seu estágio interno.

Tabela 1 – Eficiências e pesos calculados para os modelos original e proposto

DMUs	Modelo Original			Modelo Proposto		
	$Eff^{(1)}$	$Eff^{(2)}$	Eff	$\omega^{(1)}$	$\omega^{(1)}$	Eff
1	0,993	0,704	0,699	1,000	0,000	0,993
2	0,998	0,626	0,625	1,000	0,000	0,998
3	0,690	1,000	0,690	0,396	0,726	1,000
4	0,724	0,420	0,304	1,000	0,000	0,724
5	0,831	0,923	0,767	0,560	0,579	1,000
6	0,961	0,406	0,390	1,000	0,000	0,961
7	0,671	0,412	0,277	1,000	0,000	0,671
8	0,663	0,415	0,275	1,000	0,000	0,663
9	1,000	0,223	0,223	1,000	0,000	1,000
10	0,862	0,541	0,466	1,000	0,000	0,862
11	0,647	0,253	0,164	1,000	0,000	0,647
12	1,000	0,760	0,760	1,000	0,000	1,000
13	0,672	0,309	0,208	1,000	0,000	0,672
14	0,670	0,431	0,289	1,000	0,000	0,670
15	1,000	0,614	0,614	1,000	0,000	1,000
16	0,886	0,362	0,320	1,000	0,000	0,886
17	0,628	0,574	0,360	0,560	0,579	0,683
18	0,794	0,326	0,259	1,000	0,000	0,794
19	1,000	0,411	0,411	1,000	0,000	1,000
20	0,933	0,586	0,547	1,000	0,000	0,933
21	0,732	0,274	0,201	1,000	0,000	0,732
22	0,590	1,000	0,590	0,000	1,000	1,000
23	0,843	0,499	0,420	1,000	0,000	0,843
24	0,429	0,314	0,135	1,000	0,000	0,429

A fim de analisar mais os resultados, foi desenvolvida uma comparação entre os rankings de eficiência dos dois modelos na Tabela 2.

Tabela 2 – Rankings de eficiência e comparação entre os modelos

DMUs	Ranking Modelo Original	Ranking Novo Modelo	Diferença de ranking
5	1	1	0
12	2	1	1
1	3	9	-6
3	4	1	3
2	5	8	-3
15	6	1	5
22	7	1	6
20	8	11	-3
10	9	13	-4
23	10	14	-4
19	11	1	10
6	12	10	2

17	13	18	-5
16	14	12	2
4	15	17	-2
14	16	21	-5
7	17	20	-3
8	18	22	-4
18	19	15	4
9	20	1	19
13	21	19	2
21	22	16	6
11	23	23	0
24	24	24	0

Na Tabela 2 destacam-se as diferenças entre os rankings, principalmente nas DMUs 9 e 19, ambas eficientes globalmente no modelo proposto, e com desempenhos ruins no modelo original. No entanto, elas são fracamente eficientes, o que pode ser conferido na Figura 2, que apresenta uma representação gráfica da fronteira de eficiência, onde todas as DMUs eficientes estão representadas na fronteira de eficiência e todas as DMUs ineficientes estão representadas abaixo da fronteira e também na Tabela 3 que apresenta os *benchmarks* de cada uma das DMUs, através da demonstração do valor dos lambdas, calculados pelo Modelo 2.

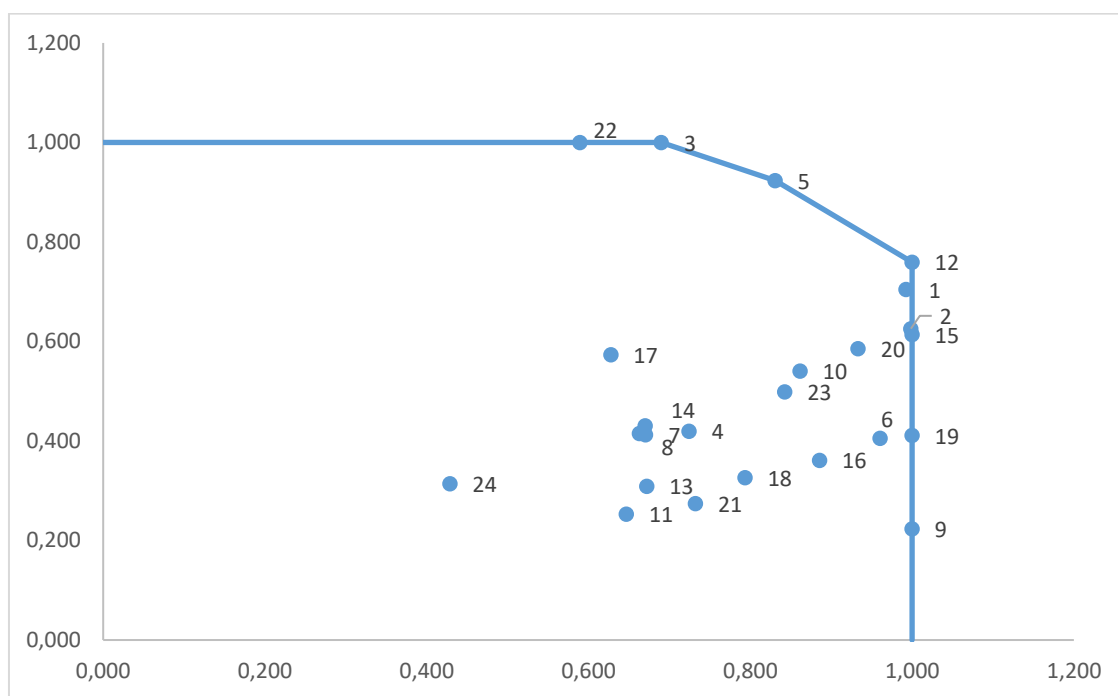


Figura 2 – Representação gráfica da fronteira de eficiência global

As DMUs fracamente eficientes são todas aquelas que possuem como *benchmarks* DMUs que não elas próprias. É o caso das DMUs 9, 15 e 19, que tem a DMU 12 como *benchmark*. Já as DMUs fortemente eficientes são as DMUs 3, 5 e 12. Também é possível encontrar as DMUs fortemente eficientes através da Figura 2, que são aquelas localizadas nos vértices da fronteira de eficiência. É possível analisar também, através da Figura 2 e da Tabela 3 que a DMU 12 é a DMU que foi mais apontada como *benchmark*.

Tabela 3 – *Benchmarks* das DMUs

DMUs	λ_3	λ_5	λ_9	λ_{12}	λ_{15}	λ_{19}
1				0,993		
2				0,998		
3	1,000					
4			0,243	0,482		
5		1,000				
6				0,961		
7				0,671		
8				0,663		
9				1,000		
10				0,862		
11				0,647		
12				1,000		
13				0,672		
14				0,670		
15				1,000		
16				0,886		
17		0,331		0,352		
18				0,794		
19				1,000		
20				0,933		
21				0,732		
22	1,000					
23				0,438		0,405
24				0,397		0,032

Através dos resultados calculados é possível apontar também os alvos das DMUs ineficientes. Por exemplo, o alvo da DMU 17 é obtido através da divisão do valor da eficiência de cada estágio pela eficiência global calculada pelo modelo. Portanto, seus alvos de eficiência seriam 0,919 para o primeiro estágio e 0,840 para o segundo estágio. A projeção dessa DMU na fronteira de eficiência também pode ser vista na Figura 3. Essa projeção é encontrada através da continuação do segmento de reta que cruza a origem do gráfico e a DMU 17.

Assim como na representação do DEA clássico, é possível obter o valor de eficiência das DMUs apenas olhando para a figura. No caso da DMU 17, a eficiência é obtida pela divisão do segmento de reta que se inicia na origem e termina na DMU 17 pelo segmento de reta que se inicia na origem e termina na projeção da DMU 17 na fronteira de eficiência.

Analisando os resultados é possível se chegar a algumas conclusões. Caso uma DMU fosse eficiente em todos os estágios internos, ela seria fortemente eficiente no modelo proposto. Isso aconteceria pois ela estaria localizada obrigatoriamente no vértice da fronteira de eficiência. Outro ponto a se destacar é que o exemplo apresentado considerou um modelo de rede básica de dois estágios, no entanto, o modelo pode ser utilizado para qualquer quantidade de estágios e estrutura. O único requisito é que os valores das eficiências internas já tenham sido calculados.

Por último, os alvos e *benchmarks* apresentados tem relação com o desempenho das DMUs nos estágios internos, diferentemente do DEA tradicional que identifica os alvos e os *benchmarks* através da análise dos pesos associados a cada variável da DMU.

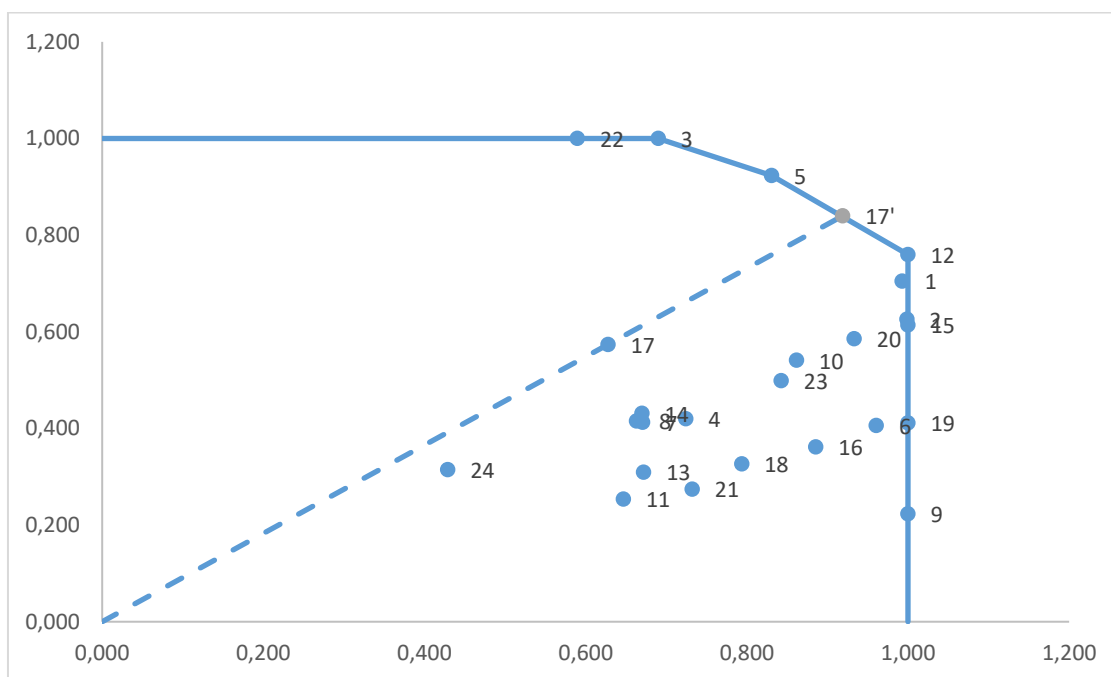


Figura 3 – Projeção da DMU 17 na fronteira de eficiência

5. Conclusão

Este estudo propôs uma nova abordagem para o cálculo da eficiência global em modelos Network DEA, endereçando a problemática da frequente ausência de DMUs globalmente eficientes. O modelo desenvolvido utiliza os valores de eficiência dos estágios internos, previamente calculados por um modelo NDEA da escolha do usuário, para construir uma fronteira de eficiência global. As DMUs que possuem os valores de eficiência de seus estágios internos não-dominados pelos estágios das outras DMUs, são consideradas eficientes globalmente.

A aplicação do modelo ao estudo de caso de Kao e Hwang [2008] demonstrou a eficácia da abordagem proposta. O modelo identificou sete DMUs globalmente eficientes, incluindo uma DMU que não era eficiente em nenhum estágio interno, no entanto, os valores de suas eficiências eram não-dominados quando comparadas com outras DMUs. Observou-se uma melhora significativa nos valores de eficiência global em comparação ao modelo original, evidenciando a capacidade do modelo proposto de reconhecer a eficiência de DMUs que, apesar de não serem eficientes em todos os estágios, demonstram um desempenho global superior.

O modelo proposto apresenta diversas vantagens. Primeiramente, garante a existência de DMUs eficientes globalmente, alinhando-se com a natureza não paramétrica do DEA e proporcionando *benchmarks* para as DMUs ineficientes. Adicionalmente, a identificação de *benchmarks* se baseia na similaridade de desempenho entre os estágios internos, tornando a comparação e o aprendizado mais eficazes. Por fim, o modelo é flexível e pode ser aplicado a diferentes modelos NDEA, independentemente da quantidade de estágios ou da estrutura da rede, desde que as eficiências dos estágios internos sejam fornecidas.

Em suma, este estudo contribui para a área de Network DEA ao apresentar uma nova abordagem para o cálculo da eficiência global, superando as limitações dos modelos existentes e fornecendo uma ferramenta robusta para a análise de desempenho em sistemas complexos. Futuras pesquisas podem explorar a aplicação do modelo proposto em diferentes contextos, com o objetivo de validar sua aplicabilidade e aprimorar sua capacidade de gerar insights relevantes para a tomada de decisão. Além disso, pode-se analisar soluções para o caso quando as eficiências dos estágios internos das DMUs não são únicas, que é o caso de alguns modelos.

Referências

- Allen, R., Athanassopoulos, A., Dyson, R. G., e Thanassoulis, E. (1997). Weights restrictions and value judgements in Data Envelopment Analysis: Evolution, development and future directions. *Annals of Operations Research*, 73:13–34.
- Andersen, P., e Petersen, N. C. (1993). A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis. *Management Science*, 39:1261–1264.
- Ang, S., e Chen, C.-M. (2016). Pitfalls of decomposition weights in the additive multi-stage DEA model. *Omega*, 58:139–153.
- Charnes, A., Cooper, W. W., e Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2:429–444.
- Chen, Y., Cook, W. D., Kao, C., e Zhu, J. (2013). Network DEA pitfalls: Divisional efficiency and frontier projection under general network structures. *European Journal of Operational Research*, 226:507–515.
- Chen, Y., Cook, W. D., Li, N., e Zhu, J. (2009). Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European Journal of Operational Research*, 196:1170–1176.
- Chu, J., e Zhu, J. (2021). Production scale-based two-stage network data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 294:283–294.
- Despotis, D. K., Koronakos, G., e Sotiros, D. (2016a). Composition versus decomposition in two-stage network DEA: a reverse approach. *Journal of Productivity Analysis*, 45:71–87.
- Despotis, D. K., Koronakos, G., e Sotiros, D. (2016b). The “weak-link” approach to network DEA for two-stage processes. *European Journal of Operational Research*, 254, 481–492.
- Despotis, D. K., Sotiros, D., e Koronakos, G. (2023). Data envelopment analysis of two-stage processes: an alternative (non-conventional) approach. *International Transactions in Operational Research*, 0:1–22.
- Doyle, J., e Green, R. (1994). Efficiency and Cross-Efficiency in DEA: Derivations, Meanings and Uses. *The Journal of the Operational Research Society*, 45:567–578.
- Färe, R. (1991). Measuring Farrell efficiency for a firm with intermediate inputs. *Academia Economic Papers*, 19:329–340.
- Färe, R., e Grosskopf, S. (2000). Network DEA. *Socio-Economic Planning Sciences*, 34:35–49.
- Fukuyama, H., e Mirdehghan, S. M. (2012). Identifying the efficiency status in network DEA. *European Journal of Operational Research*, 220:85–92.
- Halkos, G. E., Tzeremes, N. G., e Kourtzidis, S. A. (2014) A unified classification of two-stage DEA models. *Surveys in Operations Research and Management Science*, 19: 1–16.
- Kao, C. (2009). Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model. *European Journal of Operational Research*, 192:949–962.
- Kao, C. (2014). Network data envelopment analysis: A review. *European Journal of Operational Research*, 239:1–16.

Kao, C., e Hwang, S.-N. (2008). Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, 185:418–429.

Koronakos, G. (2019). A Taxonomy and Review of the Network Data Envelopment Analysis Literature. In G. A. Tsihrintzis, M. Virvou, E. Sakkopoulos, e L. C. Jain (Eds.), *Machine Learning Paradigms, Learning and Analytics in Intelligent Systems*. Springer International Publishing.

Li, X. (2017). A fair evaluation of certain stage in a two-stage structure: revisiting the typical two-stage DEA approaches. *Omega*, 68:155–167.

Liang, L., Cook, W. D., e Zhu, J. (2008). DEA models for two-stage processes: Game approach and efficiency decomposition. *Naval Research Logistics*, 55:643–653.

Mariano, E., Torres, B., Almeida, M., Ferraz, D., Rebelatto, D., e de Mello, J. C. S. (2021). Brazilian states in the context of COVID-19 pandemic: an index proposition using Network Data Envelopment Analysis. *IEEE LATAMT*, 19:917–924.

Mirdehghan, M., e Fukuyama, H. (2016). Pareto-Koopmans Efficiency and Network DEA. *Omega*, 61:78–88.

Ratner, S. V., Shaposhnikov, A. M., e Lychev, A. V. (2023). Network DEA and Its Applications (2017–2022): A Systematic Literature Review. *Mathematics*, 11:2141.

Soares de Mello, J. C. C. B., Angulo-Meza, L., e Branco da Silva, B. P. (2008). A ranking for the Olympic Games with unitary input DEA models. *IMA Journal of Management Mathematics*, 20:201–211.

Tone, K. (2001). A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research*, 130:498–509.

Tone, K., e Tsutsui, M. (2009). Network DEA: A slacks-based measure approach. *European Journal of Operational Research*, 197:243–252.