

REFINANDO O MÉTODO PROMETHEE-SCORING ATRAVÉS DE UMA RESTRIÇÃO ADICIONAL DE PONDERAÇÃO

Igor Danilo Costa Matos

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção - Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, Campus Praia Vermelha, Bloco D - sala 309, São Domingos, Niterói-RJ
matosigor@id.uff.br

Helder Gomes Costa, Marcos Roboredo, Diogo Lima

Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal Fluminense
Rua Passo da Pátria, 156, Campus Praia Vermelha, Bloco D - sala 306, São Domingos, Niterói-RJ
heldergc@id.uff.br, mcroboredo@id.uff.br, diogofls@id.uff.br

RESUMO

Este trabalho aborda o método recente PROMETHEE-Scoring, que gera valores cardinais para alternativas usando entradas ordinais do PROMETHEE II, com uso de simulações estocásticas (SMAA-PROMETHEE) e da teoria σ - μ . A pesquisa identificou efeitos indesejados no modelo de otimização utilizado no método, especificamente devido ao uso livre de variáveis de decisão multiplicadoras das métricas σ e μ , referentes ao desvio padrão e média dos fluxos líquidos obtidos nas simulações. Propõe-se uma restrição adicional de ponderação para mitigar esses efeitos, limitando a influência do desvio padrão no cálculo da eficiência. Uma aplicação numérica com dados de 180 países e 12 critérios do índice de liberdade econômica demonstra a utilização da restrição proposta, sendo eficaz para o ajuste das posições de alternativas no ranking, evitando resultados inconsistentes.

PALAVRAS CHAVE. PROMETHEE, Sobreclassificação, Multicritério.

Tópicos (ADM - Apoio à Decisão Multicritério)

ABSTRACT

This work addresses the recent PROMETHEE-Scoring method, which generates cardinal values for alternatives using ordinal inputs from PROMETHEE II, utilizing stochastic simulations (SMAA-PROMETHEE) and the σ - μ theory. The research identified undesirable effects in the optimization model used in the method, specifically due to the free use of decision variables multiplying the σ and μ metrics, related to the standard deviation and mean of the net flows obtained in the simulations. An additional weighting constraint is proposed to mitigate these effects, limiting the influence of standard deviation in efficiency calculation. The numerical application with data from 180 countries and 12 criteria of the economic freedom index demonstrates the use of the proposed constraint, which was effective in adjusting the ranking positions of the alternatives and avoiding inconsistent results.

KEYWORDS. PROMETHEE. Outranking. Multicriteria.

Paper topics (ADM - Multicriteria Decision Aiding)

1. Introdução

O Apoio à Decisão Multicritério (do inglês, *Multi-criteria Decision Aiding/Making* - MCDA/M) é uma área do conhecimento que abrange métodos e abordagens que auxiliam decisores (DMs) em processos decisórios, de forma que sejam tomadas decisões mais bem informada [Figueira et al., 2022]. Problemas típicos estudados nesta área envolvem o múltiplas alternativas e um conjunto de objetivos, muitas vezes conflitantes [Douplos e Zopounidis, 2004].

Uma classificação comum para os métodos MCDA/M divide estes em métodos de critério único de síntese e métodos de sobreclassificação. O primeiro grupo realiza a agregação dos critérios de maneira a obter um único critério representativo [Roy, 1996]. É possível obter pontuações (*scores*) para as alternativas, dos quais pode-se retirar uma interpretação cardinal. Exemplos incluem as abordagens da Teoria de Valor Multi-atributo (MAVT) e a Teoria da Utilidade Multi-atributo (MAUT).

Enquanto isso, métodos de sobreclassificação buscam identificar e explorar relações de dominância entre as alternativas de um modelo [Almeida, 2013]. Representados, principalmente, pelas famílias de métodos ELECTRE e PROMETHEE, esses métodos se baseiam em um sistema relacional de preferências [Greco et al., 2016]. É comum que esses métodos produzam como *output* saídas ordinais. Por exemplo, embora o método PROMETHEE II produza valores (fluxos líquidos) como saída para as alternativas e utilize esses fluxos para a obtenção de uma pré-ordem completa, estes valores não devem ser interpretados de forma cardinal [Greco et al., 2021; Figueira et al., 2022].

O recente método PROMETHEE-Scoring, proposto por Greco et al. [2021], apresenta um procedimento que produz como *output* valores cardinais para as alternativas, baseado em entradas ordinais comuns do método PROMETHEE II. Essas saídas cardinais são úteis em contextos de desenvolvimento de indicadores compostos, trazendo maior poder de interpretação aos resultados. Como será ilustrado nesta pesquisa, o PROMETHEE-Scoring combina a teoria σ - μ [Greco et al., 2019] com resultados fornecidos por execuções estocásticas (simuladas) do PROMETHEE-II. Ao simular execuções do método PROMETHEE II, obtém-se um conjunto de fluxos líquidos para as alternativas e, em seguida, são calculados os desvios-padrão (σ) e as médias (μ) desses fluxos. Essas medidas estatísticas são usadas para a obtenção de fronteiras Pareto-Koopman. Em seguida, pode-se aplicar um modelo de otimização linear para avaliar a eficiência das alternativas em relação às fronteiras obtidas nas simulações. Esse processo recompensa as alternativas que possuem as maiores médias e menores desvios nas métricas de fluxo.

No entanto, através de experimentos executados nesta pesquisa, foi possível identificar efeitos indesejados nos resultados provenientes do método. Estes efeitos estão ligados ao modelo de otimização utilizado para obter as eficiências das alternativas; mais especificadamente, ao uso das estatísticas σ e μ neste modelo. Este trabalho apresenta uma proposição que altera o modelo de otimização com uma restrição de ponderação, limitando o efeito indesejado do uso do desvio padrão no cálculo da eficiência. A aplicação numérica apresentada utiliza um conjunto de dados com avaliação de 180 países segundo 12 critérios de um índice de liberdade econômica.

2. Fundamentação Teórica

2.1. Método PROMETHEE II

Proposto por Brans e Vincke [1985], o método PROMETHEE II foi concebido para a problemática de ordenação. Esse método busca a exploração de relações de sobreclassificação entre alternativas, identificando relações de prevalência e subordinação entre elas. No método, inicialmente o decisor fornece informações sobre as avaliações intra-critério e intercritério (pesos dos critérios). Os pesos $w_1, \dots, w_n$ possuem valor não negativo, sua soma resulta em uma unidade, e cada peso representa a importância relativa do critério [Greco et al., 2016].

A comparação entre alternativas em cada critério é realizada utilizando funções de preferência. Nesse sentido, seis principais formas são usadas, uma das quais é estabelecida para cada critério. A Tabela 1 apresenta as seis principais funções de preferência usadas nos métodos PROMETHEE.

Tipo	Definição	Limiares
1	$P_j(d_j) = \begin{cases} 0, & d_j \leq 0 \\ 1, & d_j > 0 \end{cases}$	–
2	$P_j(d_j) = \begin{cases} 0, & d_j \leq q_j \\ 1, & d_j > q_j \end{cases}$	q_j
3	$P_j(d_j) = \begin{cases} 0, & d_j \leq 0 \\ \frac{d_j}{p_j}, & 0 < d_j \leq p_j \\ 1, & d_j > p_j \end{cases}$	p_j
4	$P_j(d_j) = \begin{cases} 0, & d_j \leq q_j \\ \frac{1}{2}, & q_j < d_j \leq p_j \\ 1, & d_j > p_j \end{cases}$	q_j, p_j
5	$P_j(d_j) = \begin{cases} 0, & d_j \leq q_j \\ \frac{d_j - q_j}{p_j - q_j}, & q_j < d_j \leq p_j \\ 1, & d_j > p_j \end{cases}$	q_j, p_j
6	$P_j(d_j) = \begin{cases} 0, & d_j \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{d_j^2}{2s_j^2}}, & d_j > 0 \end{cases}$	s_j

Tabela 1: Funções de Preferência [Brans e De Smet, 2016]

Diferentes funções podem ser utilizadas para os diferentes critérios e, caso uma mesma função seja utilizada em dois critérios distintos, diferentes parâmetros podem ser usados. Os parâmetros incluem o uso de limiares de indiferença (q_j) e preferência (p_j), que auxiliam o decisor a expressar suas preferências em regiões de hesitação.

O Algoritmo 1 detalha o método PROMETHEE II [Brans e Vincke, 1985].

Algorithm 1 Rotina do PROMETHEE, adaptado de Brans e Vincke [1985]

Passo 1: Para cada par de alternativas e para cada critério, calcule a diferença:

$$d_j(a_u, a_v) = g_j(a_u) - g_j(a_v)$$

Passo 2: Para cada critério g_j , aplique a função de preferência associada (ver as funções de preferência na Tabela 1).

Passo 3: Para cada par de alternativas, agregue os índices de preferência dos critérios obtidos no Passo 2:

$$\begin{cases} \pi(a_u, a_v) = \sum_{j=1}^k P_j(a_u, a_v)w_j \\ \pi(a_v, a_u) = \sum_{j=1}^k P_j(a_v, a_u)w_j \end{cases}$$

Onde w_j é o peso do critério j .

Passo 4: Calcule os fluxos de sobreclassificação positivos e negativos para cada alternativa:

$$\phi^+(a_u) = \frac{1}{n-1} \sum_{a_v \in A \setminus a_u} \phi(a_v, a_u)$$

$$\phi^-(a_u) = \frac{1}{n-1} \sum_{a_v \in A \setminus a_u} \phi(a_v, a_u)$$

Passo 5: Calcule o fluxo líquido de sobreclassificação de cada alternativa:

$$\phi(a) = \phi^+(a) - \phi^-(a)$$

Passo 6: A saída do PROMETHEE II consiste em uma pré-ordem completa estabelecida pelas regras abaixo:

- Preferência - $a_u P a_v$ if: $\phi(a) > \phi(b)$
- Indiferença - $a_u I a_v$ if: $\phi(a) = \phi(b)$

No PROMETHEE II, é fornecida uma pré-ordem completa das alternativas com base nos fluxos líquidos de sobreclassificação (ϕ), dados pela diferença entre o fluxo positivo e negativo de cada alternativa.

2.2. PROMETHEE-Scoring

Com o objetivo de trazer saídas cardinais aos resultados obtidos pelo método PROMETHEE, Greco et al. [2021] desenvolveram o método PROMETHEE Scoring; observando que, até então, os métodos dessa família trabalhavam fornecendo resultados ordinais, cujos valores exprimem uma ideia de ordem, não possibilitando, por exemplo, verificar quantas vezes uma alternativa é melhor que outra ou outro tipo de comparações relacionadas a cardinalidade dos desempenhos. Assim, os autores buscaram apresentar uma variante do método onde os resultados obtidos permitiam que os desempenhos de cada alternativa pudessem ser mensurados quanto a sua magnitude, possibilitando assim comparações matemáticas mais precisas entre elas.

Considerando a dificuldade relacionada à expressão de parâmetros precisos para o conjunto de critérios, ou mesmo considerando que um conjunto específico de parâmetros pode não ser representativo de toda a população interessada em um indicador composto [Greco et al., 2021; Booyesen, 2002], os autores fizeram uso da abordagem “ σ - μ ”, proposta por Greco et al. [2019], juntamente com o método SMAA-PROMETHEE, desenvolvido por Corrente et al. [2014]. O segundo trabalho com a realização de simulações de Monte-Carlo para gerar diferentes rodadas do método com parâmetros distintos definidos como números aleatórios a partir de alguma distribuição de probabilidades. Análises estatísticas são então utilizadas para elucidar os resultados das simulações. A abordagem σ - μ ajuda a sintetizar os resultados obtidos através do cálculo da média e do desvio padrão dos fluxos do PROMETHEE II obtidos nas simulações executadas. As duas abordagens são usadas para consolidar em um único índice representativo, expresso por valores cardinais, e que, portanto, mais apropriado para a formulação de indicadores compostos.

O Algoritmo 2 apresenta a rotina do PROMETHEE-Scoring. Ao longo deste estudo, consideramos que os critérios seguem a função de preferência do tipo 5, além disso, utilizou-se como parâmetros aleatórios os pesos, limiares de indiferença e de preferência dos critérios. Para mais informações sobre o procedimento, nos referimos a [Greco et al., 2021].

Algorithm 2 Rotina do PROMETHEE-Scoring, adaptado de Greco et al. [2021]

- Passo 1: Define matrizes $n \times s$ de pesos (RW), limiares de preferência (RP), e limiares de indiferença (RQ).
- Passo 2: Para cada simulação, execute as etapas 1-5 do Algoritmo 1 para obter os fluxos líquidos (ϕ) das alternativas.
- Passo 3: Calcule as médias aritméticas ($\tilde{\mu}_i^\phi$) e os desvios padrão ($\tilde{\sigma}_i^\phi$) dos fluxos obtidos no Passo 2.
- Passo 4: Obtenha as fronteiras de Pareto-Koopman das alternativas não dominadas, considerando o sentido de maximização da média (μ) e minimização do desvio padrão (σ).
- Passo 5: Para cada alternativa, calcule a eficiência local (δ_{ih}) em relação a cada fronteira de Pareto-Koopman PKF_h . O conjunto de fronteiras de Pareto-Koopman é chamado de $PKF = \{PKF_1, PKF_2, \dots, PKF_k\}$. O score de eficiência é obtido por meio de um modelo de otimização linear.
- Passo 6: Calcule as eficiências globais (sm_i) para cada alternativa:

$$sm_i = \sum_{h=1}^k \delta_{ih}$$

Greco et al. [2021] apresentaram algumas variações de modelos lineares que poderiam ser usados para os resultados do PROMETHEE I e II. O presente estudo foca no modelo linear para cálculo de eficiências relacionadas às saídas do PROMETHEE II, apresentado em (1).

$$\delta_{ik} = \max_{\alpha, \beta} \delta \tag{1a}$$

$$\text{s.t. } \alpha\mu_i - \beta\sigma_i \geq \alpha\mu_{i'} - \beta\sigma_{i'} + \delta, \forall i' \in A \setminus \bigcup_{h=1}^{k-1} PKF_h \tag{1b}$$

$$\alpha + \beta = 1 \tag{1c}$$

$$\alpha, \beta \geq 0 \tag{1d}$$

Utiliza-se a média e o desvio padrão dos fluxos líquidos de cada alternativa. A pontuação de eficiência local da alternativa a_i em relação à fronteira PKF_h , denominado δ_{ik} , é maximizada na função objetivo. As restrições incluem relações lineares sobre as estatísticas da alternativa a_i (μ_i e σ_i) e as estatísticas das alternativas que pertencem à fronteira k ou a uma dominada. Além de δ , duas variáveis de decisão, denominadas α e β , representam multiplicadores, respectivamente, da média e do desvio padrão nas expressões lineares (1b). Esses multiplicadores são não negativos (1d) e devem somar 1 (1c).

O modelo de otimização linear (1) estabelece, para cada alternativa, uma pontuação de eficiência local relacionado à cada fronteira eficiente (veja o Passo 5 do Algoritmo 2). No Passo 6, para obter uma pontuação de eficiência global, as eficiências locais das alternativas são somadas.

Por exemplo, considere que o Modelo 1 é aplicado e cinco fronteiras de Pareto-Koopman são encontradas. Então, cada alternativa a_i receberá cinco pontuações de eficiência local e uma pontuação de eficiência global (sm_i) poderia ser calculada a partir da soma desses *scores* de eficiência local.

Tabela 2: Tabela de critérios

g_j	Crítérios	Domínio	Direção
g_1	Direitos de propriedade	0 - 100	max
g_2	Eficácia Judicial	0 - 100	max
g_3	Integridade Governamental	0 - 100	max
g_4	Carga tributária	0 - 100	max
g_5	Gastos governamentais	0 - 100	max
g_6	Saúde Fiscal	0 - 100	max
g_7	Liberdade Empresarial	0 - 100	max
g_8	Liberdade Trabalhista	0 - 100	max
g_9	Liberdade Monetária	0 - 100	max
g_{10}	Liberdade Comercial	0 - 100	max
g_{11}	Liberdade de investimento	0 - 100	max
g_{12}	Liberdade financeira	0 - 100	max

3. Efeitos indesejados no PROMETHEE-Scoring

Para ilustrar a execução do método PROMETHEE-Scoring e investigar possíveis efeitos indesejados neste método, foi utilizado o conjunto de dados referentes ao Índice de Liberdade Econômica da Fundação Heritage [Heritage Foundation, 2019]. A Tabela 2 apresenta os indicadores utilizados no índice, onde todos os critérios são monotônicos com direção positiva. O conjunto de dados se refere ao ranking fornecido pela fundação em 2019. Este índice já foi utilizado anteriormente em aplicações numéricas de MCDA/M por [de Lima Silva et al., 2023; de Lima Silva e de Almeida Filho, 2020].

A Tabela 3 mostra um recorte da matriz de decisão. Como o número de alternativas é muito grande, será mostrado no artigo apenas um subconjunto delas.

Tabela 3: Matriz de decisão: Índice de Liberdade Econômica

Alternativa	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}
Afganistão	19.6	29.6	25.2	91.7	80.3	99.3	49.2	60.4	76.7	66.0	10	10
Albânia	54.8	30.6	40.4	86.3	73.9	80.6	69.3	52.7	81.5	87.8	70	70
Argélia	31.6	36.2	28.9	76.4	48.7	18.7	61.6	49.9	74.9	67.4	30	30
Angola	35.9	26.6	20.5	83.9	80.7	58.2	55.7	58.8	55.4	61.2	30	40
Argentina	47.8	44.5	33.5	69.3	49.5	33.0	56.4	46.9	60.2	70.0	55	60
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Vanuatu	65.9	36.4	51.9	97.3	54.1	15.3	52.4	58.8	75.0	64.4	65	40
Venezuela	7.6	13.1	7.9	74.7	58.1	17.6	33.9	28.0	0.0	60.0	0.0	10
Vietnã	49.8	40.3	34.0	79.7	74.1	40.7	63.5	62.8	68.9	79.2	30	40
Zâmbia	45.0	35.6	32.3	72.3	80.1	12.3	71.1	46.0	70.3	72.6	55	50
Zimbábue	29.7	24.8	15.8	62.3	74.5	23.7	33.4	43.3	72.4	70.0	25	10

Neste estudo, considerou-se os parâmetros do PROMETHEE II (pesos, limiares de indiferença e preferência) como variáveis aleatórias advindas de distribuições de probabilidade. Neste experimento, o vetor de pesos foi gerado a partir de uma distribuição Dirichlet, que garante que os pesos somem 1, com a biblioteca NumPy [Harris et al., 2020]. Além disso, para cada critério:

- O limiar de indiferença é amostrado de uma distribuição uniforme onde $q_j \sim U(1, 2.5)$.
- O limiar de preferência é amostrado de uma distribuição uniforme onde $p_j \sim U(2.5, 4)$.

Um total de 10.000 simulações do PROMETHEE II foram realizadas, onde cada simulação gerou uma ordem usando os parâmetros amostrados. A Figura 1 apresenta o plano $\sigma - \mu$ obtido neste experimento.

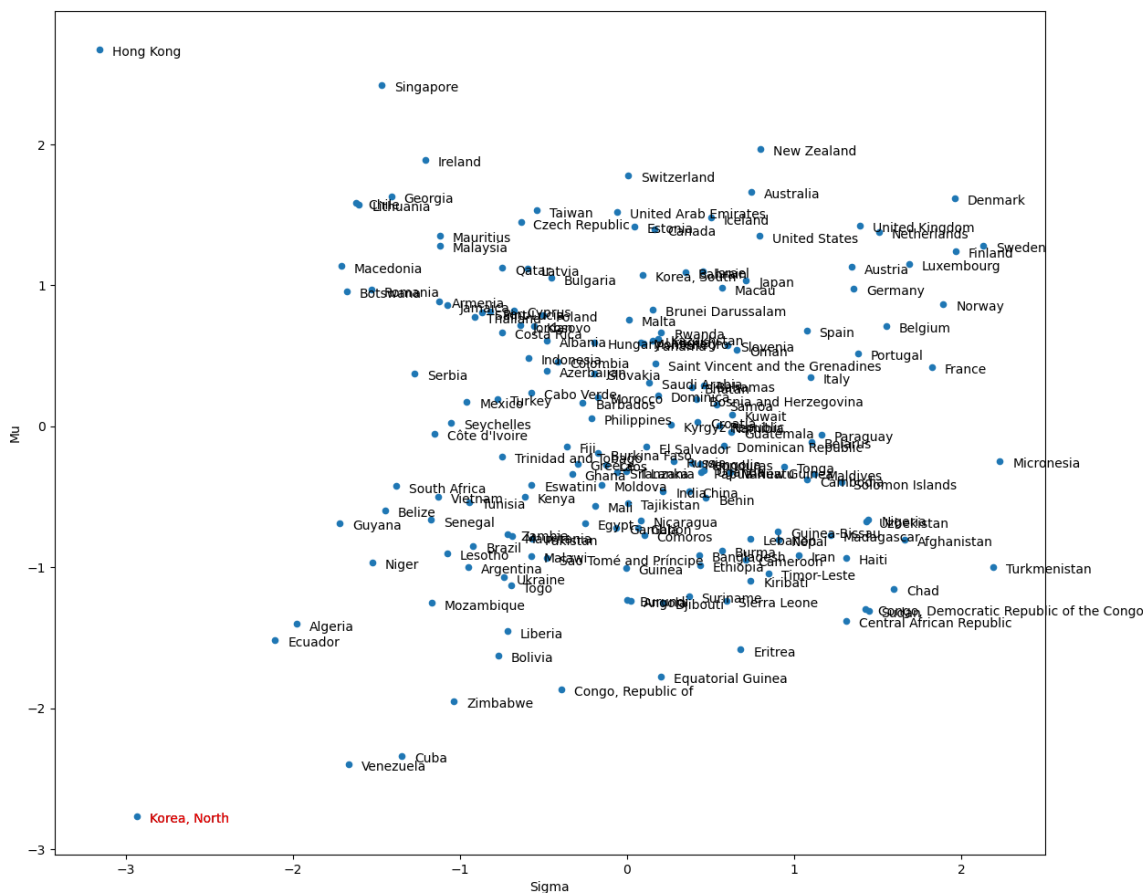


Figura 1: Plano Sigma-Mu: Índice de Liberdade Econômica

Observe que a "Coreia do Norte" está isolada das outras alternativas na região inferior esquerda da Figura 1. Esta alternativa apresenta, ao mesmo tempo, valores baixos para σ e μ . Isso resulta do fato de que a alternativa apresenta baixos desempenhos nas execuções do PROMETHEE II, conforme esperado em um estudo de caso voltado à liberdade econômica. Considere que um DM pensa que uma alternativa preferida deve apresentar uma média (μ) mais alta e um desvio padrão (σ) mais baixo. Este é o caso padrão dos modelos de eficiência do PROMETHEE-Scoring e acredita-se que seja o caso mais comum na prática. Nesta situação, a alternativa Coreia do Norte poderia se beneficiar de ter um σ baixo, mesmo que apresente um desempenho ruim nas comparações par-a-par. Em outras palavras, esta alternativa não seria dominada por muitas outras nas fronteiras Pareto-Koopman.

Um total de 26 fronteiras Pareto-Koopman foram obtidas para esta aplicação. Por questões de simplificação e tamanho, a Tabela 4 apresenta apenas as três primeiras.

Tabela 4: Fronteiras de Pareto-Koopman

Fronteira de Pareto-Koopman	Alternativas
PKF_1	Hong Kong
PKF_2	Argélia, Chile, Equador, Guiana, Coreia do Norte, Macedônia, Singapura
PKF_3	Botsuana, Geórgia, Irlanda, Lituânia, Nova Zelândia
$\vdots$	$\vdots$

Perceba que a Coreia do Norte compõe a segunda PKF . Em outras palavras, ela é dominada apenas por uma alternativa (Hong Kong é o único representante na PKF_1) dentro do conjunto de 180 nações. Dadas as PKFs, as pontuações de eficiência local para cada alternativa em relação a cada PKF são obtidas por meio do modelo de otimização linear 1. Em seguida, as pontuações de eficiência global são calculadas. A Tabela 5 apresenta os resultados do procedimento após a aplicação de uma normalização “min-max”. Destaca-se que a "Coreia do Norte" foi alocada na 73ª posição, o que é uma posição intermediária, mesmo que este país apresente o pior desempenho nas execuções do PROMETHEE II.

Tabela 5: Índice de Liberdade Econômica - Ranking das alternativas pela aplicação do PROMETHEE-Scoring

País	Eficiência Global	Posição
Hong Kong	1.000000	1º
Singapura	0.890063	2º
Nova Zelândia	0.700030	3º
Irlanda	0.677665	4º
Suíça	0.629419	5º
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Coreia do Norte	0.202544	73º
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
República Centro-Africana	0.026171	176º
República Democrática do Congo	0.022123	177º
Sudão	0.020909	178º
Chade	0.018515	179º
Turcomenistão	0.000000	180º

Assim, um efeito indesejado foi identificado no PROMETHEE-Scoring: alternativas que possuem desempenhos constantemente inferiores nos critérios são beneficiadas pelo modelo de otimização por apresentar um desvio padrão muito baixo. Isso acontece porque a alternativa utiliza livremente a variável β , associada ao desvio padrão, para maximizar a sua eficiência. Observe que no modelo (1), a pontuação de eficiência local de cada alternativa em relação a cada fronteira PKF é calculada por meio de um modelo de programação linear, de modo que os multiplicadores α e β são determinados a favor da alternativa considerada. Considere a alternativa Coreia do Norte. Para maximizar a eficiência local desta alternativa em relação às fronteiras, o modelo aumentará o valor de β uma vez que este é o multiplicador usado para o desvio-padrão, enquanto dará menos importância a α (a variável de decisão relacionada a μ). Em outras palavras, a alternativa em questão

receberá um bom valor de eficiência local porque ela repetidamente apresenta resultados ruins (o desvio padrão dos fluxos líquidos é baixo).

4. Restrição de Ponderação Adicional

O principal fator subjacente responsável pelo surgimento de efeitos indesejados reside na liberdade do modelo para determinar os valores de α e β , que correspondem aos multiplicadores para a média (μ) e o desvio padrão (σ) calculados nos fluxos das alternativas.

Uma alternativa que é consistentemente superada por outras tem maior probabilidade de receber consistentemente fluxos menores nas execuções do PROMETHEE, potencialmente levando a um desvio padrão menor. Assim, propõe-se a introdução de uma restrição adicional que define um valor mínimo de proporção para a relação entre as variáveis de decisão α e β , conforme apresentado no modelo (2).

$$\delta_{ik} = \max_{\alpha, \beta} \delta \quad (2a)$$

$$\text{s.t. } \alpha\mu_i - \beta\sigma_i \geq \alpha\mu_{i'} - \beta\sigma_{i'} + \delta, \forall i' \in A \setminus \bigcup_{h=1}^{k-1} PKF_h \quad (2b)$$

$$\alpha \geq \lambda\beta \quad (2c)$$

$$\alpha + \beta = 1 \quad (2d)$$

$$\alpha, \beta \geq 0 \quad (2e)$$

Observe que a restrição 2c usa a constante λ para determinar a relação entre as variáveis de decisão α e β . Por exemplo, se $\lambda = 1$, α deve obter um valor pelo menos igual a β , ou seja, $\alpha \geq 0.5$. Por outro lado, $\lambda = 2$ garantiria que β seja no máximo a metade de α e, caso $\lambda = 0$, têm-se os mesmos resultados do modelo 1. Ou seja, o valor nulo de λ não cria nenhuma proporcionalidade entre as variáveis de decisão α e β , que permanecem livres no modelo sendo limitadas apenas por valores entre 0 e 1 que somem 1.

A Tabela 6 apresenta resultados obtidos com a introdução da restrição adicional ao modelo. Observa-se que diferentes valores de λ são ilustrados, incluindo $\lambda = 0$ para o qual obtém-se os mesmos resultados do modelo (1) com o modelo (2).

Tabela 6: Índice de Liberdade Econômica: Pontuações de Eficiência global e rankings obtidos através da variação de λ

	$\lambda = 0$		$\lambda = 0.5$		$\lambda = 1$		$\lambda = 1.5$		$\lambda = 2$	
Alternativa	sm_i	Posição	sm_i	Posição	sm_i	Posição	sm_i	Posição	sm_i	Posição
Hong Kong	1.00	1	1.00	1	1.00	1	1.00	1	1.00	1
Singapura	0.89	2	0.91	2	0.93	2	0.94	2	0.94	2
Nova Zelândia	0.70	3	0.76	3	0.80	3	0.82	3	0.83	3
Irlanda	0.68	4	0.75	4	0.79	4	0.81	4	0.82	4
Suíça	0.63	5	0.71	5	0.76	5	0.78	5	0.79	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
República do Congo	0.10	143	0.05	176	0.09	176	0.11	176	0.12	176
Zimbábue	0.12	116	0.05	175	0.09	177	0.11	177	0.12	177
Cuba	0.14	104	0.01	179	0.04	178	0.05	178	0.06	178
Venezuela	0.15	96	0.01	178	0.03	179	0.04	179	0.05	179
Coreia do Norte	0.20	73	0.00	180	0.00	180	0.00	180	0.00	180

Na Tabela 6, é possível observar que a posição da alternativa Coreia do Norte é ajustada já para $\lambda = 0.5$. Isso ocorre porque agora o modelo de eficiência precisa considerar a média além

do desvio padrão dos fluxos. Observe também que a partir desse valor, a posição dessa alternativa permanece a mesma, sendo ranqueada como a menos preferível dentre todas as alternativas do conjunto. É possível identificar comportamento semelhante para as demais alternativas as cinco melhores e piores alternativas, cujas posições permanecem as mesmas nos testes com os diferentes valores de λ . A nova restrição consegue fazer um ajuste adequado para as posições das alternativas, lidando principalmente com valores atípicos causados pelo uso livre do desvio padrão no cálculo das eficiências.

5. Considerações Finais

Os métodos de sobreclassificação são vastamente utilizados na literatura para apoiar decisões complexas a partir de comparações par-a-par entre as alternativas e da exploração de relações de superação entre as mesmas. É comum que as saídas desses métodos envolvam prescrições com saídas ordinais. Por exemplo, no método PROMETHEE II, tem-se como *outputs* os fluxos líquidos das alternativas e a obtenção de uma pré-ordem completa. Recentemente, introduziu-se na literatura o método PROMETHEE-Scoring que introduz uma forma de obtenção de resultados cardinais através da combinação de conceitos do procedimento SMAA-PROMETHEE II e da teoria σ - μ .

Este estudo ilustra certos efeitos indesejados decorrentes da formulação do modelo de otimização utilizado no método PROMETHEE-Scoring. Isto diz respeito principalmente ao livre uso de variáveis de decisão, α e β , associadas respectivamente à média (μ) e o desvio padrão (σ) do fluxo líquido das alternativas. Dessa forma, uma alternativa pode melhorar suas avaliações devido ao fato de apresentar baixo desvio padrão nos fluxos líquidos advindos de rodadas do PROMETHEE II. Para mitigar esses efeitos, foi introduzida uma restrição que estabelece uma relação proporcional entre as variáveis de decisão α e β no modelo de PL.

O procedimento foi ilustrado com uma aplicação numérica envolvendo um conjunto de 180 alternativas e 12 critérios. Discute-se o uso do PROMETHEE-Scoring, chamando atenção ao efeito indesejado ocorrido em uma das alternativas. A restrição adicional foi benéfica para a aplicação, limitando os efeitos indesejados. Trabalhos futuros podem incluir outras proposições, além de aplicações em diferentes conjuntos de dados em processos decisórios que envolvam a problemática de ordenação.

Referências

- Almeida, A. T. D. (2013). *Processo de decisão nas organizações*. Atlas.
- Booyesen, F. (2002). An overview and evaluation of composite indices of development. *Social Indicators Research*, 59:115–151. ISSN 03038300.
- Brans, J.-P. e De Smet, Y. (2016). Promethee methods. *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, p. 187–219.
- Brans, J.-P. e Vincke, P. (1985). Note—a preference ranking organisation method: (the promethee method for multiple criteria decision-making). *Management science*, 31(6):647–656.
- Corrente, S., Figueira, J. R., e Greco, S. (2014). The smaa-promethee method. *European Journal of Operational Research*, 239:514–522. ISSN 03772217.
- de Lima Silva, D. F. e de Almeida Filho, A. T. (2020). Sorting with topsis through boundary and characteristic profiles. *Computers & Industrial Engineering*, 141:106328.

- de Lima Silva, D. F., Ferreira, L., e de Almeida Filho, A. T. (2023). Preference disaggregation on topsis for sorting applied to an economic freedom assessment. *Expert Systems With Applications*, 215:119341.
- Doumpos, M. e Zopounidis, C. (2004). *Multicriteria Decision Aid Classification Methods*, volume 73. Kluwer Academic Publishers.
- Figueira, J. R., Greco, S., e Roy, B. (2022). Electre-score: A first outranking based method for scoring actions. *European Journal of Operational Research*, 297(3):986–1005.
- Greco, S., Figueira, J., e Ehrgott, M. (2016). *Multiple criteria decision analysis*, volume 37. Springer.
- Greco, S., Ishizaka, A., Tasiou, M., e Torrisi, G. (2019). Sigma-mu efficiency analysis: A methodology for evaluating units through composite indicators. *European Journal of Operational Research*, 278(3):942–960.
- Greco, S., Ishizaka, A., Tasiou, M., e Torrisi, G. (2021). The ordinal input for cardinal output approach of non-compensatory composite indicators: the promethee scoring method. *European Journal of Operational Research*, 288(1):225–246.
- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M. H., Brett, M., Haldane, A., del Río, J. F., Wiebe, M., Peterson, P., Gérard-Marchant, P., Sheppard, K., Reddy, T., Weckesser, W., Abbasi, H., Gohlke, C., e Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825):357–362. URL <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>.
- Heritage Foundation, T. (2019). Economic freedom index.
- Roy, B. (1996). *Multicriteria methodology for decision aiding*. Kluwer Academic Publishers.