LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

Decomposição de Benders Multicut para Expansão da Geração com Reservas Probabilísticas Dinâmicas

Tiago Andrade, Fernanda Thomé, Lucas Guerreiro, Alessandro Soares, Luiz C. da Costa
PSR
Praia de Botafogo 370, Botafogo
tiago.andrade@psr-inc.com

RESUMO

Este estudo investiga a aplicação das decomposições de Benders (DB) *single cut* e *multicut* no problema de expansão da geração, especialmente em usinas de energia renovável com reservas probabilísticas dinâmicas variáveis no Tempo (RPD). A pesquisa demonstra que, mesmo representando a RPD como uma função exógena e não linear, o problema de operação no segundo estágio permanece convexo. O cálculo da RPD considera o erro de previsão da geração renovável entre horas consecutivas, usando uma combinação convexa do valor esperado e do *Conditional Value at Risk* (CVaR). Embora a inclusão da RPD acrescente complexidade, a convexidade da função é mantida, permitindo a otimização eficaz através das DB *single cut* e *multicut*.

PALAVRAS CHAVE. expansão da geração, decomposição de Benders, reserva probabilística dinâmica

ABSTRACT

This study investigates the application of single cut and multicut Benders decompositions (BD) in the generation expansion problem, especially in renewable energy plants with Dynamic Probabilistic Reserves (RPD) that vary over time. The research demonstrates that even when representing the RPD as an exogenous and nonlinear function, the operation problem in the second stage remains convex. The calculation of the RPD considers the forecasting error of renewable generation between consecutive hours, using a convex combination of the expected value and the Conditional Value at Risk (CVaR). Although the inclusion of the RPD adds complexity, the convexity of the function is maintained, allowing for efficient optimization through single cut and multicut BD.

KEYWORDS. generation expansion, Benders decomposition, dynamic probabilistic reserve

https://proceedings.science/p/193715?lang=pt-br

1. Introdução

Este estudo implementa e compara a decomposição de Benders (DB) *single cut* e *multicut* (Birge e Louveaux [1988]) para o problema de expansão da geração (*generation expansion problem* - GEP), envolvendo inúmeras usinas de energia renovável, incorporando Reserva Probabilística Dinâmica Variável no Tempo (RPD) (Soares et al. [2019]). Primeiramente, identificamos as condições sob as quais o segundo estágio (problema de operação) do GEP é convexo. No entanto, mesmo quando o problema resultante é convexo, a incorporação da RPD introduz complexidade no processo de otimização, o que justifica a investigação de formas aprimoradas de DB.

A RPD é calculada considerando o erro de previsão da geração renovável não despachável entre horas consecutivas. Esse erro de previsão leva em conta a geração renovável em cada hora para cada cenário e dia dentro do horizonte relevante. Ela é definida usando uma combinação convexa do valor esperado e do *conditional value at risk* (CVaR) do valor absoluto do erro de previsão entre horas consecutivas. Mostramos que esta função é convexa e, uma vez que aparece apenas no lado direito da restrição de requisito de reserva, o segundo estágio resultante é convexo.

Ao contrário da maioria das aplicações de DB, o gargalo em cada iteração da resolução de um GEP está no segundo estágio, que requer o uso de *Stochastic Dual Dynamic Programming* (SDDP) (Pereira e Pinto [1991]). Resolver este estágio leva significativamente mais tempo do que o primeiro estágio, um pequeno problema de programação inteira mista (*mixed integer programming* - MIP). Portanto, implementar uma estratégia de *multicut* no primeiro estágio é particularmente vantajoso, pois troca um leve aumento na complexidade de um subproblema mais fácil por uma diminuição nas iterações da DB e, consequentemente, no número de resoluções do segundo estágio.

2. Metodologia

2.1. Reserva probabilística dinâmica (RPD)

A RPD – considerada em Soares et al. [2019] – é definida pelas seguintes equações:

$$\hat{g}_{r,h} = \sum_{s,d} \frac{p_s}{D} g_{r,s,d,h} \tag{1}$$

$$\delta_{s,d,h} = \sum_{r} \left(g_{r,s,d,h} - \hat{g}_{r,h}\right) x_r \tag{2}$$

$$\Delta_{s,d,h} = \delta_{s,d,h-1} - \delta_{s,d,h} \tag{3}$$

$$TRPD_h = (1-\lambda) E\left[|\Delta_{s,d,h}|\right] + \lambda CVaR_\beta\left[|\Delta_{s,d,h}|\right] \tag{4}$$

Onde $g_{r,s,d,h}$ é a geração de uma renovável r no cenário s, dia d e hora h; x_r é a decisão de investimento na renovável r; e $TRPD_h$ é o valor de requerimento da RPD para a hora h; As demais variáveis acima são auxiliares e definidas pelas próprias equações supracitadas.

2.2. Problemas Operacionais e de Investimento

Dada uma decisão de investimento x_r e uma reserva probabilística dinâmica calculada $TRPD_h$, o problema de otimização da operação pode ser definido como:

$$O(x) = \min_{y_\cdot, yr_{p,\cdot}} \; c'y + cr'yr \tag{5}$$

$$Ay + Byr = b(x) \tag{6}$$

$$\sum_{p} yr_{p,s,d,h} \geq TRPD_h(x) \tag{7}$$

$$y \geq 0 \tag{8}$$

$$yr \geq 0 \tag{9}$$

onde O é a função do valor ótimo dos custos operacionais dada uma decisão de investimento. Estamos interessados em resolver o problema de minimização que cootimiza a soma dos

custos de investimento e operação. O problema de investimento é definido abaixo. Note que o problema de operação tem, tipicamente para casos reais, múltiplos cenários e estágios dentro dele.

$$\min I(x) + O(x) \tag{10}$$

$$x \in \mathrm{X} \tag{11}$$

Mostramos na Seção 2.2.1 que a função do valor ótimo O é convexa em relação ao investimento em renováveis x. Sendo convexo, podemos usar a decomposição de Benders como mostrado na Seção 2.3 para resolver o problema de investimento.

2.2.1. Análise Convexa

Proposição 2.1 *A função* $TRPD_h : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ *é convexa. Onde* X *é um subconjunto de* R^n *representando o investimento (seja ele binário, inteiro ou contínuo) em plantas renováveis que demandam RPD.*

Prova da Proposição 2.1 : Note que a Equação (2) representa $\delta_{s,d,h}$ como uma função linear de x. A Equação (3) apresenta $\Delta_{s,d,h}$ como uma função linear de $\delta_{s,d,h}$. Como a composição de uma função linear é linear, $\Delta_{s,d,h}$ é uma função linear de x.

Além disso, sabe-se que a função de valor absoluto é uma função convexa, o valor esperado é uma função linear (e convexa) não decrescente, e o $CVaR$ é uma função convexa e não decrescente. Dado esses fatos, $|\Delta_{s,d,h}|$ é uma composição de uma função convexa de uma função linear de x; portanto, é uma função convexa de x. $E\left[|\Delta_{s,d,h}|\right]$ é uma função linear não decrescente de uma função convexa; é em si uma função convexa de x. Analogamente, $CVaR_\beta\left[|\Delta_{s,d,h}|\right]$ é uma composição de uma função convexa não decrescente de uma função convexa de x e, portanto, é uma função convexa de x.

Finalmente, uma combinação convexa de duas funções convexas é convexa; assim, $TRPD_h$ é uma função convexa de x e a prova está completa. □

Proposição 2.2 *A função* $O : \mathrm{X} \to \mathrm{R}$ *é uma função convexa. Onde* X *é um subconjunto de* R^n *representando o investimento (seja ele binário, inteiro ou contínuo) em plantas renováveis que demandam RPD.*

Prova da Proposição 2.2 : O dual do Problema de operação é dado pelo Modelo (12)-(15). Devido ao teorema da dualidade forte da programação linear, o valor ótimo do problema dual é o mesmo que o valor ótimo do problema primal. Portanto, podemos definir $O(x)$ usando o problema dual. As variáveis duais π, μ_r são associadas às restrições (6) e (7), respectivamente. A restrição (13) são as restrições duais. Sua formulação exata não é importante para a prova dado que ela não depende da variável de investimento já que o investimento apenas modifica o lado direito do problema primal.

$$O(x) = \max_{\pi,\mu_r} b(x)'\pi + TRPD_h(x)'\mu_r; \tag{12}$$

$$(\pi, \mu_r) \in D \tag{13}$$

$$\pi \text{ is free} \tag{14}$$

$$\mu_r \geq 0 \tag{15}$$

Note que, para uma solução dual viável (π^*, μ_r^*), a expressão da função objetivo $b(x)'\pi^* + TRPD_h(x)'\mu_r^*$ é uma função convexa de x. De fato, $b(x)'\pi^*$ é linear (e portanto convexo) já que $b(x)$ é linear em x por hipótese; $TRPD_h(x)'\mu_r^*$ é uma multiplicação de um escalar positivo por uma função convexa (Proposição 2.1); e a soma de duas funções convexas é convexa. Como $O(x)$, pela sua definição dual, é o supremo ponto a ponto de funções convexas, ele é, portanto, convexo, completando a prova. □

https://proceedings.science/p/193715?lang=pt-br

Observe que, se a restrição (7) fosse uma equação, suas variáveis duais associadas seriam livres, e a prova da Proposição 2.2 não seria válida, pois $O(x)$ não seria definido como o supremo ponto a ponto de funções convexas. Caso deseja-se otimizar um problema com uma reserva de igualdade forçada, pode-se relaxar a igualdade para uma restrição de desigualdade do tipo "maior ou igual" para obter o corte de Benders para o problema relaxado.

2.3. Decomposição de Benders

Como visto, o problema da operação é convexo e, portanto, o GEP pode ser decomposto usando a DB. Dado que as renováveis variam por cenário e suas decisões de investimento são dificultadas pela consideração da RPD, uma decomposição usando *multicut* pode ser vantajosa e é considerada neste trabalho. A seguir, veremos como obter o corte de benders considerando a RPD

Pela Equação (2), $\frac{\partial \delta_{s,d,h}(x)}{\partial x_r} = g_{r,s,d,h} - \hat{g}_{r,h}$. Pela Equação (3), $\frac{\partial \Delta_{s,d,h}(x)}{\partial x_r} = g_{r,s,d,h} - \hat{g}_{r,h} - g_{r,s,d,h-1} + \hat{g}_{r,h-1}$. O subgradiente da função absoluta $|f(x,y)|$ é $\frac{\partial |f(x,y)|}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} sign f(x,y)$. Além disso, a combinação convexa do valor esperado e do CVaR é equivalente ao valor esperado, modificando a probabilidade ($\tilde{E}$) do cenário de modo que a cauda da distribuição original seja mais provável. Como uma pequena perturbação da variável de investimento x_r não mudará quais pares ordenados de cenários-dia (s,d) estão na cauda do CVaR. Podemos construir o valor esperado modificado dado um plano de investimento.

Finalmente, o subgradiente $\frac{\partial TRPD_h(x)}{\partial x_r}$ é $\tilde{E}\left[(g_{r,s,d,h} - \hat{g}_{r,h} - g_{r,s,d,h-1} + \hat{g}_{r,h-1}) sign(\Delta_{s,d,h})\right]$. Portanto, podemos construir o corte de Benders (16) usando os subgradientes agora conhecidos.

$$O(x) \geq O(\bar{x}) + \frac{\partial O(\bar{x})}{\partial x}' (x - \bar{x}) \tag{16}$$

3. Resultados e discussão

Para comparar as rodadas *single cut* e *multicut*, foram realizadas duas execuções em um caso com 30 cenários de incerteza em um sistema hidrotérmico, utilizando uma base de dados do OPTGEN-SDDP baseada em dados reais, incluindo centenas de geradores, renováveis e térmicos, e baterias. Aproximadamente 60 projetos foram definidos como candidatos para a expansão. A metodologia de DB considerou um limite de 100 iterações e uma tolerância de convergência de 0,1% de gap. Note que pela Figura 1, a rodada *multicut* – em azul escuro – atingiu a tolerância em 61 iterações e teve uma convegência dominante em termos de *upper bound* (UB) e *lower bound* (LB) em relação ao *single cut* – em azul claro – em todas as iterações. Como o problema de operação requer mais esforço computacional que o problema de investimento, os cortes adicionais que foram incluídos ao problema de investimento na estratégia de *multicut* não afetaram negativamente o tempo total da execução como podemos comprovar na Figura 2.

Este trabalho mostrou que o GEP considerando a RDP tem o segundo estágio convexo e pode ser decomposto usando DB. Além disso, argumentou-se que a estratégia com *multicut* poderia ser particularmente interessante na expansão de renováveis considerando a RPD. De fato, a estratégia com *multicut* mostrou-se vantajosa no estudo computacional, conseguindo diminuir tanto o número de iterações quanto o tempo total para a convergência do problema.

Referências

Birge, J. R. e Louveaux, F. V. (1988). A multicut algorithm for two-stage stochastic linear programs. *European Journal of Operational Research*, 34(3):384–392.

Pereira, M. V. e Pinto, L. M. (1991). Multi-stage stochastic optimization applied to energy planning. *Mathematical programming*, 52:359–375.

Soares, A., Perez, R., Morais, W., e Binato, S. (2019). Addressing the time-varying dynamic probabilistic reserve sizing method on generation and transmission investment planning decisions. *arXiv preprint arXiv:1910.00454*.

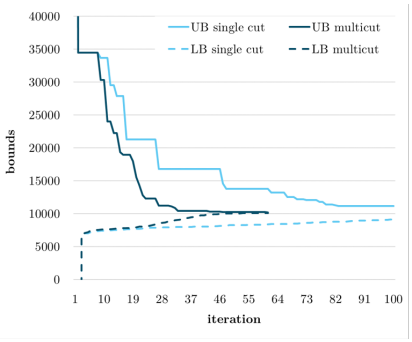


Figura 1: *upper bound* e *lower bound* por iteração

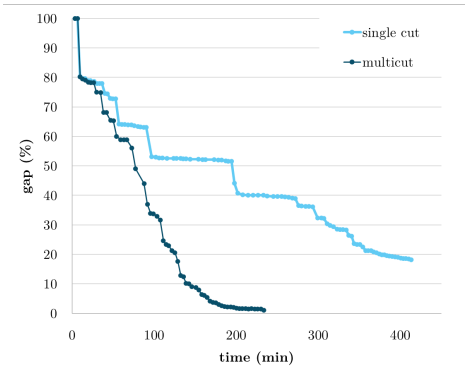


Figura 2: gap relativo (%) por tempo (min)