LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

Um novo método de Restauração Inexata para problemas com imprecisões*

Luís Felipe Bueno
UNIFESP
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, n° 1201, São josé dos Campos - SP
lfelipebueno@gmail.com

F. Larreal, J. M. Martínez e M. Fidelis
UNICAMP, UNICAMP, UNIFESP
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651, Campinas - SP,
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, n° 1201, São josé dos Campos - SP
francisLarreal@gmail.com, martinez@ime.unicamp.br,
matheus.fideles@unifesp.br

RESUMO

Em um artigo recente, um método de Restauração Inexata foi proposto para resolver problemas de otimização contínua com restrições, onde a função objetivo e as restrições são avaliadas de forma imprecisa. Embora este artigo mostre boas propriedades de convergência e complexidade do pior caso, sua teoria depende de uma suposição excessivamente forte sobre como a viabilidade deve ser tratada em relação à precisão das restrições. No presente trabalho propomos um algoritmo alternativo onde os resultados teóricos de tal artigo são mantidos mesmo sem a hipótese restritiva. Além disso, avançamos com a introdução de novos conceitos de condições de otimalidade e de qualificação das restrições para o problema de interesse e realizamos testes numéricos que atestam a plausibilidade da estratégia.

PALAVRAS CHAVE. Restauração Inexata, Problemas com imprecisões, Condições de otimalidade.

Programação Matemática, Big Data e Analytics

ABSTRACT

In a recent paper an Inexact Restoration method was proposed for solving continuous constrained optimization problems where the objective function and constraints are evaluated inaccurately. Although this paper shows good properties of worst-case complexity and convergence, its theory depends on an overly strong assumption about how feasibility should be treated in relation to the accuracy of the constraints. In the present work we propose an alternative algorithm where the theoretical results of such paper are maintained even without the restrictive hypothesis. Furthermore, we advance new concepts of optimality and constraint qualification conditions for the problem of interest and carry out numerical tests that attest to the plausibility of the strategy.

KEYWORDS. Inexact Restoration methods. Problems with inaccuracies. Optimality conditions.

Mathematical Programming, Big Data and Analytics

*Este trabalho foi financiado pelos projetos FAPESP 2021/14011-0, 2023/08706-1, 2022/05803-3 e projetos CNPq e CAPES.

https://proceedings.science/p/193703?lang=pt-br

1. Introdução

Neste trabalho estudamos problemas da forma

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{Minimizar}} & F(x) \\ \text{sujeito a} & H(x) = 0 \\ & x \in \Omega, \end{array} \tag{1}$$

onde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e Ω é um politopo compacto, convexo e não vazio. Além disso, estamos interessados no caso particular em que F, e possivelmente H, são funções cuja avaliação exata não é sempre possível ou não é conveniente. Pela simplicidade do conjunto Ω, vamos admitir que toda estimativa de solução do Problema (1) deve estar em Ω.

Temos em mente situações onde a função F é composta pela soma de vários termos, cada um associado a um dado diferente, ou quando é calculada através de uma simulação. Por exemplo, se F é a arrecadação total do país em função das alíquotas de imposto de renda, temos que ela é resultante da soma do imposto pago por cada contribuinte. Como temos dezenas de milhões de termos, é natural que busquemos trabalhar com valores aproximados de F, tomando uma amostragem dos dados disponíveis. Outra possibilidade seria o caso em que F é definida pela resolução numérica de uma equação diferencial, cuja precisão não é absoluta e que pode ser refinada ao longo do processo de otimização. Situações semelhantes podem acontecer em relação às restrições.

Em Krejić e Martínez [2016] foi proposta a filosofia de considerar $f(x, y)$, a depender de um parâmetro $y \in Y$, sendo uma aproximação da função original $F(x)$ e o controle da precisão com o uso de uma função $g : Y \to \mathbb{R}_+$ impondo a restrição adicional $g(y) = 0$, que é tratada com um algoritmo de Restauração Inexata (veja Martínez e Pilotta [2000], Martínez [2001] e Fischer e Friedlander [2010]). Os autores abordaram o caso em que o problema original é irrestrito. Assim, o problema reformulado se torna

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{Minimizar}} & f(x, y) \\ \text{sujeito a} & g(y) = 0 \\ & y \in Y. \end{array}$$

Neste caso só existem restrições em relação a y e assim esta estrutura pode ser explorada facilmente. A ideia é tentar acelerar o método, trabalhando com menos precisão, e testar se uma função de mérito, que combina o nível de precisão com o valor de f, aceita o ponto encontrado. Se isso não é possível, exige-se maior exatidão e encontra-se o novo ponto minimizando um modelo de primeira ordem de f.

Em Birgin et al. [2018] estas as ideias são estendidas para problemas com restrições convexas, mas não são consideradas avaliações inexatas das mesmas. Além disto, pressupõem-se viabilidade em relação a $H(x) = 0$ em todas as iterações. Para isso, a direção utilizada na fase de otimização é o gradiente projetado no conjunto viável. Em Birgin et al. [2020], embora não haja hipóteses de convexidade sobre as restrições, ainda é assumido que todos os iterandos são viáveis, incluindo as restrições na resolução dos subproblemas. Além disto, também não é permitida inexatidão em relação às restrições. A principal contribuição apresentada no trabalho é uma análise de complexidade do algoritmo proposto. Em Birgin et al. [2022] os autores propõem uma estratégia similar para minimização de funções tais que as derivadas não estejam disponíveis, por exemplo oriundas de simulações, que também podem ser feitas com diferentes níveis de precisão. Uma aplicação no estudo de rompimento de barragens é apresentada no artigo.

https://proceedings.science/p/193703?lang=pt-br

Para o caso de problemas onde é interessante considerar que as restrições também devem ser calculadas de maneira imprecisa, temos os seguinte problema reformulado

$$\begin{array}{ll} \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\text{Minimizar}} & f(x,y) \\ \text{sujeito a} & h(x,y)=0 \\ & g(y)=0 \\ & x\in\Omega \\ & y\in Y. \end{array} \tag{2}$$

Esta situação gera uma dificuldade consideravelmente maior. O motivo disto é que não fica claro qual medida de inviabilidade deve ser utilizada quando se muda a precisão das funções. Levando em consideração estes aspectos, em Bueno et al. [2023] foi proposto um algoritmo que compara a inviabilidade sempre com mesmo grau de precisão, o que acarretou em várias adaptações nos algoritmos tradicionais e suas demonstrações dos resultados de convergência e análise de complexidade.

Embora a estratégia de Bueno et al. [2023] possa lidar com o controle da inviabilidade e a avaliação imprecisa das restrições, não são apresentados experimentos numéricos do algoritmo. Além disso, a boa definição do parâmetro de penalidade depende da hipótese que em toda iteração a restauração em relação a $h(x,y)$ (a aproximação de $H(x)$) seja suficientemente melhor sucedida do que a em relação a g. Tal hipótese é deveras restritiva, pois não vale quando o problema (1) só tem as restrições $x\in\Omega$.

Diante disso, neste trabalho propomos uma alternativa à estratégia proposta em Bueno et al. [2023]. Em nosso algoritmo restauramos de modo que a inviabilidade do vetor formado por g e h seja reduzida em relação ao iterando anterior. Com isso é possível combinar os resultados de Bueno et al. [2023] com Bueno e Martínez [2020], sem usar a hipótese restritiva citada, e termos um algoritmo bem definido, com boa teoria de convergência e complexidade da ordem de ϵ^{-2} para encontrar um ponto ϵ estacionário.

Outra vantagem teórica da abordagem de não lidar exatamente com as restrições durante todo o processo é que podemos fazer afirmações mais fortes sobre a estacionaridade dos pontos limite. Como mostrado em Andreani et al. [2011], quando não usamos a linearização das restrições para fazer projeções como critério de parada, são necessárias condições de qualificação mais fortes para concluir que um ponto limite é KKT. Desta forma, mesmo em caso de otimização tradicional, nossos resultados são melhores do que os apresentados em Birgin et al. [2018] e Birgin et al. [2020].

Cabe destacar aqui que nos artigos anteriores sobre o uso de funções com avaliações imprecisas os autores não tratam de condições sequenciais de otimalidade e as condições de qualificação relacionadas ao problema de interesse. Neste trabalho nós estendemos a condição sequencia L-AGP de Andreani et al. [2011] e a propusemos a versão inexata da condição de qualificação L-AGP regularidade Andreani et al. [2018]. Detonamos tais condições, respectivamente, por iL-AGP e iL-AGP regularidade. Mostramos que se (x^*,y^*) é uma solução de solução de (2) então vale iL-AGP, sendo esta, portanto, uma condição genuína de otimalidade. Além disso, mostramos que a iL-AGP regularidade é a condição mais fraca que garante que um ponto que satisfaz a condição iL-AGP também será KKT para o problema original, independentemente da função objetivo.

Por fim, destacamos que nosso trabalho é o primeiro a apresentar testes numéricos em relação ao uso de problemas da forma (2). Embora nossos testes se refiram a problemas acadêmicos artificiais simples, os resultados atestam a plausibilidade do uso destas técnicas. Este fato nos encoraja a investigar no futuro a eficiência computacional do algoritmo proposto em aplicações com apelo social e econômico.

Referências

Andreani, R., Haeser, G., e Martínez, J. M. (2011). On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization. *Optimization*, 60:627–641.

Andreani, R., Marínez, J. M., Ramos, A., e Silva, P. J. (2018). Strict constraint qualifications and sequential optimality conditions for constrained optimization. *Mathematics of Operations Research*, 3(43):693–717. URL https://doi.org/10.1287/moor.2017.0879.

Birgin, E. G., Krejić, N., e Martínez, J. M. (2018). On the employment of inexact restoration for the minimization of functions whose evaluation is subject to errors. *Mathematics of Computation*, 87:1307–1326.

Birgin, E. G., Krejić, N., e Martínez, J. M. (2020). Iteration and evaluation complexity on the minimization of functions whose computation is intrinsically inexact. *Mathematics of Computation*, 89:253–278.

Birgin, E. G., Krejić, N., e Martínez, J. M. (2022). Economic inexact restoration for derivative-free expensive function minimization and applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 410:114193.

Bueno, L. F., Larreal, F., e Martínez, J. M. (2023). Inexact restoration for minimization with inexact evaluation both of the objective function and the constraints. *Mathematics of Computation*.

Bueno, L. F. e Martínez, J. M. (2020). On the complexity of an inexact restoration method for constrained optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 30:80–101.

Fischer, A. e Friedlander, A. (2010). A new line search inexact restoration approach for nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 46(2):333–346. URL https://ideas.repec.org/a/spr/coopap/v46y2010i2p333-346.html.

Krejić, N. e Martínez, J. M. (2016). Inexact restoration approach for minimization with inexact evaluation of the objective function. *Mathematics of Computation*, 85:1775–1791.

Martínez, J. (2001). Inexact-restoration method with lagrangian tangent decrease and new merit function for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 111: 39–58.

Martínez, J. M. e Pilotta, E. A. (2000). Inexact-restoration algorithm for constrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 104:135–163. URL https://doi.org/10.1023/A:1004632923654.