

Número de P_3 -Carathéodory em Grafos Circulantes

Braully Rocha da Silva

Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)

DTI-Reitoria – Intituo Federal Goiano (IFGoiano)

Trindade - Universidade Estadual de Goiás (UEG)

braully@discente.ufg.br

braully.silva@ifgoiano.edu.br, ueg.br}

Erika Morais Martins Coelho

Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)

Campus Samambaia – Goiânia – GO, 74690-900

erikamorais@inf.ufg.br

Hebert Coelho da Silva

Instituto de Informática – Universidade Federal de Goiás (UFG)

Campus Samambaia – Goiânia – GO, 74690-900

hebert@inf.ufg.br

RESUMO

A maximização de influência em redes é um problema de grande interesse em diversas áreas, vários modelos foram propostos para analisar essa difusão. A convexidade em grafos é uma forma de resolver esse problema, contando com diversos parâmetros para analisar a dinâmica desse comportamento, tais como número envoltória, Radon, intervalo entre outros. O número de Carathéodory de um grafo G , denotado por $c(G)$, é um destes interessantes parâmetros de estudo do comportamento de difusão de influência. Neste artigo trataremos do número de Carathéodory para grafos circulantes na convexidade P_3 . Para grafos circulantes $C_n(1, r)$ com $r = 2$, determinamos que o número de Carathéodory é 2. Como consequência determinamos o número de Carathéodory para a subclasse de grafos Potência de Ciclo provando que $c(C_n^k) = 2$. Para $C_n(1, r)$ com $r > 2$ e $n \geq 4r - 2$ demonstramos que $c(C_n(1, r)) \geq \lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$ se $3 \nmid (r+1)$ e caso contrário $c(C_n(1, r)) \geq \frac{2(r+1)}{3}$.

PALAVRAS CHAVE. Grafos, P_3 -Convexidade, Caratheódory.

ABSTRACT

The maximization of influence in networks is a problem of great interest in several areas of knowledge. Many models can be used for modeling that influence diffusion process in networks, the convexity in graphs is one of these models. At graph convexity, there are several parameters to analyze the dynamics of this behavior, such as envelope number, Radon, interval, among others. And the Carathéodory number is one of these parameters, already demonstrated to be NP-Complete, and an interesting parameter for studying influence diffusion behavior. In this article we will deal with the Carathéodory number for circulating graphs in convexity P_3 . For circulating graphs $C_n(1, r)$ with $r = 2$, we determine that the Carathéodory number is $c(C_n(1, r)) = 2$, as a consequence we determine the Carathéodory number for the Cycle Power graph subclass, that is, $c(C_n^k) = 2$. For $C_n(\{1, r\})$ with $r > 2$ with $n \geq 4r - 2$ we demonstrate that $c(C_n(1, r)) \geq \lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$ if $3 \nmid (r+1)$ and $c(C_n(1, r)) \geq \frac{2(r+1)}{3}$ otherwise.

KEYWORDS. Graphs, P_3 -Convexity, Carathéodory.

1. Introdução

Neste trabalho vamos considerar grafos finitos, simples e não direcionados. Para um grafo G , o conjunto de vértices será denotado por $V(G)$ e o conjunto de arestas por $E(G)$.

Para um grafo G , uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de $V(G)$ é uma *convexidade* em G se:

- $\emptyset, V(G) \in \mathcal{C}$;
- $\mathcal{C}$ é um conjunto fechado em relação à operação de interseção.

Cada elemento de $\mathcal{C}$ é um *conjunto convexo* para a convexidade $\mathcal{C}$. A *envoltória convexa* $H_{\mathcal{C}}(S)$ de um subconjunto S é o menor conjunto convexo que contém S . Se $H_{\mathcal{C}}(S) = V(G)$ então S é um *conjunto de envoltória*. A cardinalidade $h_{\mathcal{C}}(G)$ do menor conjunto de envoltória em G é denominado *número de envoltória* de G .

A convexidade P_3 faz parte de um forte arcabouço teórico de convexidades em grafos, com aplicações em problemas nas áreas de redes de computadores, marketing, epidemiologia, economia, entre outras Chen [2009]; Centeno et al. [2011]; Araújo et al. [2018]; Brešar e Valencia-Pabon [2020]; Grippo et al. [2021]. Podemos citar o problema de seleção de conjuntos alvo, onde o objetivo é selecionar um conjunto de vértices que maximize a influência em um grafo, neste cenário, a convexidade P_3 se destaca como um modelo em que a influência é propagada se um vértice na rede tem dois ou mais vizinhos influenciados.

Neste contexto, o número de Carathéodory é um parâmetro importante para a seleção de conjuntos alvo, pois ele determina a resistência de um conjunto de vértices a ser influenciado. O *Teorema de Carathéodory* Carathéodory [1911] é um resultado sobre os conjuntos convexos em $\mathbb{R}^d$ é. Este teorema afirma que todo ponto u no envoltório convexo de um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^d$ está no envoltório convexo de um subconjunto F de S de ordem no máximo $d + 1$. Seja G um grafo e $\mathcal{C}$ uma convexidade em $V(G)$. O *número de Carathéodory* de $\mathcal{C}$ é o menor inteiro c tal que para cada conjunto S de vértices de G e cada vértice u em $H_{\mathcal{C}}(S)$, existe um conjunto $F \subseteq S$ com $|F| \leq c$ e $u \in H_{\mathcal{C}}(F)$. Um conjunto S de vértices de G é um *conjunto de Carathéodory* de $\mathcal{C}$ se o conjunto $\partial H_{\mathcal{C}}(S)$ definido como $H_{\mathcal{C}}(S) \setminus \bigcup_{u \in S} H_{\mathcal{C}}(S \setminus \{u\})$ é não vazio. Em definição alternativa podemos dizer que o *número de Carathéodory* de $\mathcal{C}$ é a maior cardinalidade de um conjunto de Carathéodory de $\mathcal{C}$. Denotaremos o número de Carathéodory de um grafo G por $c(G)$.

Um tipo de convexidade especial em grafos são as convexidades definidas através de um conjunto $\mathcal{P}$ de caminhos. Neste caso, um subconjunto $\mathcal{C} \in V(G)$ é convexo precisamente quando $\mathcal{C}$ contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de $\mathcal{P}$ cujos vértices extremos estão também em $\mathcal{C}$. A *convexidade geodésica* Cáceres et al. [2006]; Dourado et al. [2016, 2010] considera $\mathcal{P}$ como o conjunto de todos os caminhos mínimos de G . A *convexidade P_3* considera $\mathcal{P}$ como o conjunto de todos os caminhos com três vértices Barbosa et al. [2012]; Centeno et al. [2011]; Dourado et al. [2013]; Grippo et al. [2021]; Cappelle et al. [2022]; BLA [2023].

Como trabalharemos apenas com a convexidade P_3 $\mathcal{C}$, omitiremos o subscrito $\mathcal{C}$ da notação. Dado um grafo G , o *intervalo fechado* entre dois vértices $u, v \in V(G)$ é o conjunto $I[u, v]$ de todos os vértices pertencentes a todo caminho P_3 entre u e v . Se $S \subseteq V(G)$, então $I[S]$ é a união de todos $I[u, v]$ para $u, v \in S$. Dizemos que $S \subseteq V(G)$ é um *conjunto convexo*, se $I[S] = S$.

Podemos também utilizar o intervalo fechado para iterativamente encontrar o menor conjunto convexo P_3 que contém S . Para um conjunto S de vértices em um grafo G , seja $I^0[S] = S$, $I^1[S] = I[S]$ e $I^k[S] = I[I^{k-1}[S]]$ para $k \geq 2$. A partir de algum termo p , a sequência será constante, quando $I^p[S] = I^{p+1}[S]$ obtém-se a envoltória convexa de S . O processo de computar a envoltória convexa será chamado de *percolação*.

Em resultados anteriores temos que a determinação do número de Carathéodory na convexidade P_3 é um problema NP-completo, mesmo para grafos bipartidos Barbosa et al. [2012]. Porém

em alguns trabalhos conseguiram estabelecer resultados polinomiais e limites justos para árvores, grafos blocos Barbosa et al. [2012], cordais Coelho et al. [2014], P4-redutíveis e co-árvores Hon et al. [2016], alguns produtos de grafos Cappelle et al. [2017], e grafos de diâmetro 2 Coelho et al. [2023].

Trabalhos recentes Frasca e Rossi [2022] trazem um modelo de influência dinâmica da perspectiva de um conjunto de Carathéodory, e em ANA [2020] o número de Carathéodory na convexidade geodésica é estabelecido para algumas classes de grafos. Keiler et al. [2021] sugere que o número de Carathéodory é um interessante parâmetro para ser abordado no modelo de seleção de conjuntos alvo. Assim como este, outros trabalhos abordando parâmetros de convexidade no modelo da seleção de conjuntos alvo tem surgido Araújo e Sampaio [2023]. Uma ativa área de pesquisa.

Considerando a classe dos grafos circulantes, Al-Ezeh et al. [2017] definiu o número de envoltória na convexidade geodética para Grafos Potência de Ciclo, uma subclasse dos grafos circulantes, utilizando como base os resultados trazidos por Obradović et al. [2005]. Shaheen et al. [2022] apresentou resultados para a 2-conversão irreversível de grafos circulantes com a configuração $C_n(1, r)$, que é equivalente ao número de envoltória P_3 .

Neste trabalho, consideramos o número de Carathéodory na convexidade P_3 para grafos circulantes $C_n(1, r)$. Apresentamos um limite inferior e um limite constante dada algumas restrições dos parâmetros n e r . Para grafos circulantes $C_n(1, r)$ com $r = 2$, determinamos que o número de Carathéodory é 2. Como consequência determinamos o número de Carathéodory para a subclasse de grafos Potência de Ciclo provando que $c(C_n^k) = 2$. Para $C_n(1, r)$ com $r > 2$ e $n \geq 4r - 2$ demonstramos que $c(C_n(1, r)) \geq \lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$ se $3 \nmid (r+1)$ e caso contrário $c(C_n(1, r)) \geq \frac{2(r+1)}{3}$. Na Seção 2, alguns conceitos básicos de grafos são revistos. A Seção 3 contém nossos resultados e a Seção 4 contém as conclusões e algumas sugestões de trabalhos futuros.

2. Preliminares

Esta seção contém mais algumas definições e terminologias fundamentais utilizadas ao longo do artigo.

Seja G um grafo, $V(G)$ seus vértices, $E(G)$ sua arestas, v um vértice qualquer de $V(G)$ e S um subconjunto de $V(G)$. Podemos definir a *vizinhança aberta* de um vértice v , denotada por $N(v)$, como o conjunto de vértices adjacente a v , ou seja, $N(v) = \{w \in V(G) | vw \in E(G)\}$.

Um *subgrafo* H de um grafo G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Seja S um subconjunto de vértices de G , o *subgrafo induzido* por S , denotado por $G[S]$, possui S como conjunto de vértices e o conjunto de arestas é o subconjunto de todas as arestas de G que tenham as duas extremidades em S .

Os *grafos circulantes* são definidos por dois parâmetros, n o número de vértice e L uma lista de números inteiros. De maneira simples podemos dizer que o i -ésimo vértice é adjacente ao $(i+j)$ -ésimo e ao $(i-j)$ -ésimo vértice para cada elemento j da lista L . Ou de maneira mais formal, podemos dizer que $C_n(L)$ tem vértices $V(C_n(L)) = \{1, 2, \dots, n\}$ e arestas $st \in E(C_n(L)) | (s+t) \bmod n \in L$. Os *grafos potência de ciclo* são uma subclasse dos grafos circulantes. Dizemos que o ciclo de tamanho n está elevado a potência C_n^r , quando temos um grafo circulante $C_n(d_1, \dots, d_r)$ tal que $d_i = d_{i-1} + 1$ e $d_r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Na Figura 1 temos exemplos de grafos circulantes. O primeiro é o grafo $C_6(2)$ que é um exemplo de grafo circulante com 6 vértices e lista de inteiros (2), possui com duas componentes conexas. As arestas da primeira componente conexa são: v_1v_3 pois $1+2=3$, v_3v_5 pois $3+2=5$ e v_5v_1 pois $5+2=7$ e como $7 > n$ então $7 \bmod n = 1$. As arestas da segunda componente conexa seguem a mesma definição e são v_2v_4 , v_4v_6 e v_6v_2 .

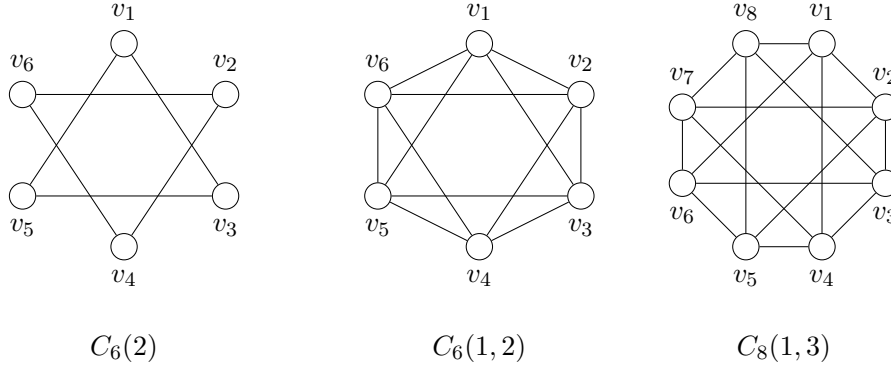


Figura 1: Exemplos de Grafos Circulantes.

O segundo grafo é o $C_6(1, 2)$ possui 6 vértices, lista de inteiros $(1, 2)$, e cujo as arestas são as mesma do exemplo anterior e acrescido das arestas v_1v_2 pois $1 + 1 = 2$, v_2v_3 pois $2 + 1 = 3$, de forma análoga temos as arestas v_3v_4 , v_4v_5 , v_5v_6 e por fim a aresta v_6v_1 pois $(6 + 1) \bmod 6 = 1$.

O terceiro grafo é o $C_8(1, 3)$ que possui 8 vértices, lista de inteiros $(1, 3)$ e arestas conforme definição e exemplos anteriores.

Para ilustrar melhor as definições dos parâmetros de convexidade definidos na introdução, tomemos como exemplo o grafo circulante $G = C_8(1, 3)$ da Figura 2 e o subconjunto $S_0 = \{1, 2, 3\}$. Vamos encontrar o menor conjunto convexo P_3 que contém S_0 , utilizando a função intervalo, tal como se segue: $I^0[S_0] = S_0 = \{1, 2, 3\}$; $I^1[S_0] = I[S_0] \cup \{4, 8\}$; $I^2[S_0] = I^1[S_0] \cup \{5, 7\}$; $I^3[S_0] = I^2[S_0] \cup \{6\}$; $I^4[S_0] = I^3[S_0]$. Ao final de $I^3[S_0]$ temos o conjunto $H(S_0) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ que é o menor conjunto convexo P_3 que contém S_0 , que coincidentemente é um conjunto de todos os vértices de G , ou seja, $H(S_0) = V(G)$.

Barbosa et al. [2012] demonstrou algumas propriedades elementares dos conjuntos de Carathéodory, que utilizaremos aqui, para demonstrar um limite inferior para o número de Carathéodory em grafos circulantes na convexidade P_3 .

Proposição 1. *Barbosa et al. [2012] Seja G um grafo e S um conjunto de Carathéodory de G .*

- (a) *Se G tem ordem de pelo menos 2 e é completo ou um caminho ou um ciclo, então $c(G) = 2$.*
- (b) *Se S tem ordem pelo menos dois, então todo vértice de u em S está em um caminho uvw de ordem 3 tal que $v \in V(G) \setminus H_G(S \setminus \{u\})$ e $w \in H_G(S \setminus \{u\})$*
- (c) *Nenhum subconjunto próprio S' de S satisfaz $HG(S') = V(G)$.*
- (d) *O fecho convexo $H_G(S)$ de S induz um subgrafo conexo de G .*

Em Shaheen et al. [2022] de modo geral foi demonstrado que o limite superior para número de 2-conversão irreversível de um grafo circulante $C_n(1, r)$ é $\lceil \frac{r}{2} \rceil + 1$, nesse trabalho foi demonstrado algumas propriedades dos grafos circulantes que serão usadas em nossas demonstrações. A seguir trazemos uma propriedades dos grafos circulantes na convexidade P_3 que pode ser concluída a partir da Nota 2 de Shaheen et al. [2022].

Proposição 2. *Seja G um grafo circulante $C_n(1, r)$ e S um conjunto de vértices tal que $S = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{i+(r-1)}\}$, então S é um conjunto envoltório.*

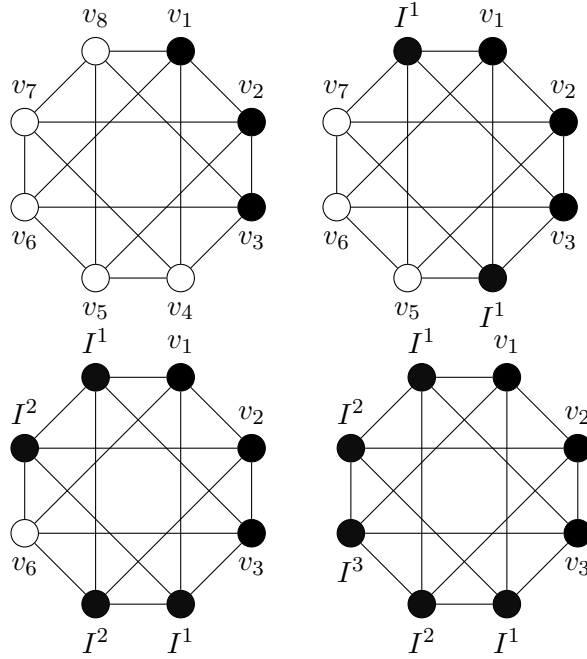


Figura 2: Exemplo da Proposição 2 no $C_8(1, 3)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $i = 1$, pois o grafo circulante é invariante por rotação. Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$, então temos o seguinte processo de percolação:

- $I^0[S] = S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$
- $I^1[S] = I^0[S] \cup \{v_{r+1}, v_n\}$
- $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$
- $I^3[S] = I^2[S] \cup \{v_{r+3}, v_{n-2}\}$

O processo segue até pelo menos $I^x[S]$ onde $r + x \leq n - (x - 1)$, ao final da percolação teremos $I^*[S] = H(S) = V(G)$. Portanto, S é um conjunto de envoltória. $\square$

Na figura 2 temos um exemplo da Proposição 2 no grafo $C_8(1, 3)$, temos o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, o processo de percolação computado pelo intervalo fechado e ao final o fecho $H(S) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8, v_5, v_7, v_6\} = V(G)$.

3. Resultados

Iremos inicialmente estabelecer o número de Carathéodory para os grafos circulantes com lista de inteiros $(1, 2)$ e um n qualquer.

Fato 1. *Seja G um grafo e S um conjunto de Carathéodory de G , então S possui pelo menos dois vértices u e v tal que $w \in N(u) \cap N(v)$, onde $w \in V(G)$.*

Lema 1. *Seja $G = C_n(1, 2)$, então $c(G) = 2$.*

Demonstração. Seja $G = C_n(1, 2)$ e suponha por contradição que $c(G) > 2$. Considere $S = \{v_u, v_h, v_x\}$ um conjunto de Carathéodory de G . Pelo Fato 1 existem pelo menos dois vértices em S , digamos v_u e v_h , tal que $w \in N(v_u) \cap N(v_h)$, onde $w \in V(G)$.

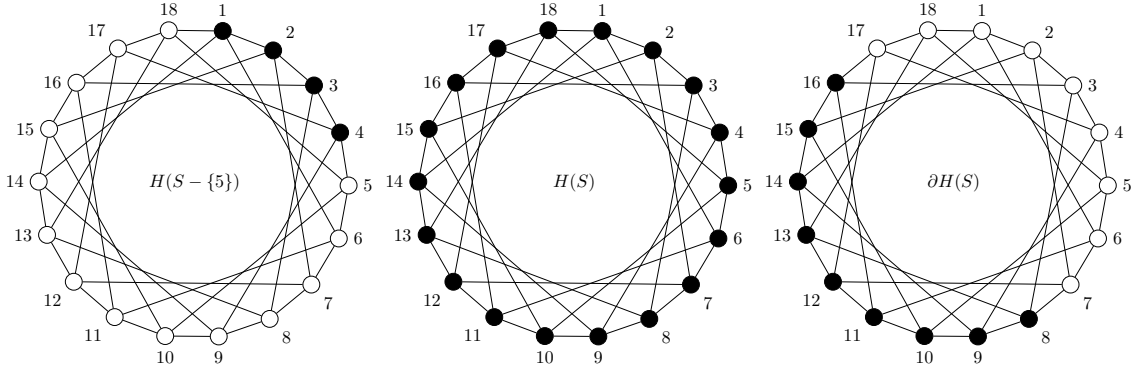


Figura 3: Exemplo de um conjunto de Carathéodory para $C_{18}(1, 5)$

Como w é adjacente a v_u , por definição de G temos que $w \in \{v_{u-1}, v_{u-2}, v_{u+1}, v_{u+2}\}$. Se $w \in \{v_{u-1}, v_{u+1}\}$ então pelo Proposição 2 $\{v_u, w\}$ é um conjunto envoltório. Logo, $\{v_u, v_h\}$ é um conjunto envoltório, o que é uma contradição da Propriedade (c). Se $w \in \{v_{u-2}, v_{u+2}\}$, então $\{v_{u-1}, v_{u+1}\} \subseteq H(\{v_u, v_h\})$ e $\{v_u, v_{u+1}\}$ forma um conjunto um conjunto envoltório. Uma contradição da Propriedade (c). Portanto, $c(G) = 2$. $\square$

Como consequência direta podemos concluir também esse resultado para as subclasses potência circulante.

Proposição 3. *Seja C_n^k um grafo potência circulante, então $c(C_n^k) = 2$.*

Demonstração. No primeiro caso com $k = 1$, temos que C_n^k é isomorfo ao grafo ciclo com n vértices. E pela Proposição (a) $c(C_n^k) = 2$.

Seja $k \geq 2$. De maneira análoga a demonstração do Lema 1 temos que qualquer conjunto de Carathéodory S de C_n^k possui dois vértices que formam um conjunto envoltório. Logo $|S| \leq 2$. Portanto $c(C_n^k) = 2$. $\square$

Lema 2. *Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ tal que $3|(r + 1)$ e $S \subseteq V(G)$. Se $S = \{v_i \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$ então $v_{2r} \in H(S)$.*

Demonstração. Por definição da função intervalo temos que $I^1[S] = I^0[S] \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i \leq r\} \cup \{v_{r+1}, v_n\}$, $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$, $I^3[S] = I^2[S] \cup \{v_{r+3}, v_{n-2}\}$ e para alguma iteração r temos que $I^r[S] = I^{r-1}[S] \cup \{v_{2r}, v_{n-(r-1)}\}$. Logo, $v_{2r} \in H(S)$. $\square$

Nas figuras 4 e 5 visualizamos uma representação da configuração do conjunto S e dos vértices contaminados conforme demonstrado no Lema 2. Podemos aludir esse processo percolação ao efeito dominó, e as peças de dominó como os vértices. Caso na configuração inicial todas as peças do conjunto S estejam presentes no processo de percolação todas as demais peças caem em cascata, mas caso alguma peça do conjunto S esteja faltando o processo é encerrado ao chegar nessa peça como uma barreira.

Porém para que o conjunto S construído conforme o Lema 2 seja um conjunto de Carathéodory, é necessário que v_{2r} não esteja em $\partial H(S)$. Constatamos que isso é verdade a partir de um determinado valor de n , que é o foco do próximo lema.

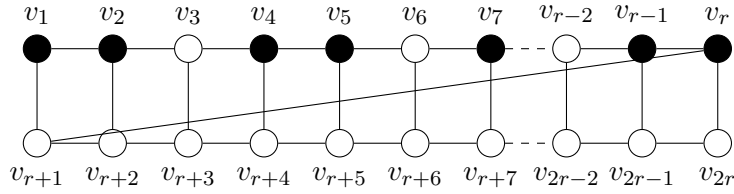


Figura 4: Processo de percolação no sentido horário do Lema 2

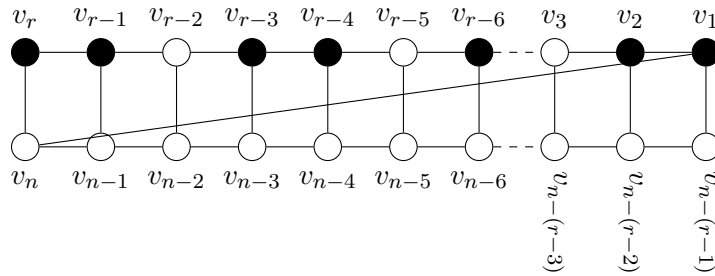


Figura 5: Processo de percolação no sentido anti-horário do Lema 2

Lema 3. Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ tal que $3|(r+1)$ e $S = \{v_i \in V(G) \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$. Se $n \geq 4r - 2$ então $v_{2r} \in \partial H(S)$.

Demonstração. Vamos provar que S é um conjunto de Carathéodory. Observe que $H(S \setminus \{v_j\}) = S \setminus \{v_j\} \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i \leq r\}$, para $j = 1, r$.

Agora, considere $v_j \in S$ tal que $1 < j < r$. Aplicando a função intervalo vamos determinar o conjunto envoltório do conjunto $S' = S \setminus \{v_j\}$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: $3|(j+1)$. Observe que $I[S'] = S' \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq j+1\} \cup \{v_{r+1}\} \cup \{v_n\}$ e $I^2[S'] = I[S'] \cup \{v_{r+2}\} \cup \{v_{n-1}\}$.

Observe que para todo l , com $1 < l < j$, temos que $v_{r+l} \in I^l[S']$ e que $v_{r+j} \notin I^j(S')$. E para todo m , com $1 < m < r-j$, temos que $v_{n-(m-1)} \in I^m[S']$ até o limite dado, ou seja $v_{n-((r-j-1)-1)} \in I^{r-j-1}(S')$ e $v_{n-((r-j)-1)} \notin I^{r-j}(S')$.

O processo de percolação de S' se encerra no passo $k = \max\{l, m\}$ até a inclusão dos vértices v_{r+l} e $v_{n-(m-1)}$. Como l e m dependem de j , temos que $I^k[S'] = S' \cup \{v_i : 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq j+1\} \cup \{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_{r+(j-1)}\} \cup \{v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-(r-j-2)}\}$.

Vamos mostrar que $I^k[S'] = H(S')$. Supomos por contradição que o processo de percolação não encerra em k e exista um vértice $v_c \notin I^k[S']$ que é incluído em $I^{k+1}[S']$. Se $I^{k+1}[S']$, logo v_c precisa ter dois vizinhos pertencentes a $I^k[S']$.

Considere dois subconjuntos de $I^k[S']$, o conjunto $A = \{v_{j+2}, v_{j+3}, \dots, v_{r+j-1}\}$ e $B = \{v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-(r-j-2)}\}$. Como $|A| < r$ e $|B| < r$ por definição de G temos que $|N(v_c) \cap A| < 2$ e $|N(v_c) \cap B| < 2$.

Então $|N(v_c) \cap A| = 1$ e $|N(v_c) \cap B| < 1$, ou seja $c-r \leq r+l$ e $(c+r) \geq n-(m-1)$. Como l e m dependem de j , podemos concluir que $c-r \leq r+j-1$ e $c+r \geq n-(r-j-2)$. Expandindo as duas inequações temos que $c \leq 2r+j-1$ e $c \geq n-2r+j+2$, assim temos que

$n - 2r + j + 2 \leq 2r + j - 1$ então $n \leq 4r - 3$, o que é uma contradição com a definição. Logo $I^k[S'] = H(S')$ para o caso 1.

Caso 2: $3|(j - 1)$. Observe que $I[S'] = S' \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq j - 1\} \cup \{v_{r+1}\} \cup \{v_n\}$ e $I^2[S] = I[S] \cup \{v_{r+2}\} \cup \{v_{n-1}\}$.

Observe que para todo l , com $1 < l < j - 1$, temos que $v_{r+l} \in I^l[S]$, porém $v_{r+j-1} \notin I^j(S')$. E para todo m , com $1 < m < r - (j + 1)$, temos que $v_{n-(m-1)} \in I^m[S']$ porém $v_{n-((r-(j+1))-1)} \notin I^{r-(j+1)}(S')$.

Assim como no caso anterior o processo de percolação de S' se encerra no passo $k = \max\{l, m\}$ até a inclusão dos vértices v_{r+l} e $v_{n-(m-1)}$. Vamos mostrar que $I^k[S'] = H(S')$.

Supomos por contradição que o processo de percolação não encerra em k e exista um vértice $v_c \notin I^k[S']$ que é incluído em $I^{k+1}[S']$. Se $v_c \in I^{k+1}[S']$, logo v_c precisa ter dois vizinhos pertencentes a $I^k[S']$.

Considere dois subconjuntos de $I^k[S']$, o conjunto $A = \{v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_{r+j-2}\}$ e $B = \{v_{j-2}, v_{j-3}, \dots, v_1, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{n-(r-j-1)}\}$.

Como $|A| < r$ e $|B| < r$ por definição de G temos que $|N(v_c) \cap A| < 2$ e $|N(v_c) \cap B| < 2$.

Ou seja $c - r \leq r + l$ e $(c + r) \geq n - (m - 1)$. Como l e m dependem de j , podemos concluir que $c - r \leq r + j - 2$ e $c + r \geq n - (r - j - 1)$. Expandindo as duas inequações temos que $c \leq 2r + j - 2$ e $c \geq n - 2r + j + 1$, assim temos que $n - 2r + j + 1 \leq 2r + j - 2$ então $n \leq 4r - 3$, o que é uma contradição com a definição. Logo $I^k[S'] = H(S')$ para todos os casos.

Em todos os casos temos que $v_{2r} \notin H(S')$, como $v_{2r} \in H(S)$ pelo Lema 2 podemos concluir então que $v_{2r} \in \partial H(S)$. □

Como consequência direta do Lema 3 temos o seguinte resultado.

Teorema 1. *Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3|(r + 1)$ e $n \geq 4 \times r - 2$ então $c(G) \geq \frac{2(r+1)}{3}$.*

Demonstração. O conjunto $S = \{v_i \mid 3 \nmid i \text{ para } 1 \leq i \leq r\}$ pelo Lema 2 temos que $v_{2r} \in H(S)$, e pelo Lema 3 temos que $v_{2r} \in \partial H(S)$, portanto S é um conjunto de Carathéodory de G . O conjunto S tem cardinalidade $\frac{2(r+1)}{3}$ consequentemente o número de Carathéodory de G é maior ou igual $\frac{2(r+1)}{3}$. □

Vamos verificar dois exemplos para o Teorema 1, primeiramente o exemplo $C_{18}(1, 5)$ dado que $n \geq 4r - 2$ o teorema é válido, e por fim o exemplo $C_{17}(1, 5)$ dado que $n < 4r - 2$ o teorema não é válido.

Pelo Teorema 1 o grafo $C_{18}(1, 5)$ possui um conjunto de Caratheódory $S = \{1, 2, 4, 5\}$. Agora vamos verificar se S é um conjunto de Carathéodory. Para isso vamos computar $H(S)$ e $\partial H(S)$.

Temos que $H(S - 1) = \{2, 4, 5, 3\}$, $H(S - 2) = \{1, 4, 5, 6, 18, 17\}$, $H(S - 4) = \{1, 2, 5, 6, 7\}$, $H(S - 5) = \{1, 2, 4, 3\}$, e $H(S) = V(C_{18}(1, 5))$. Portanto $\partial H(S) = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, conforme podemos ver nas Figuras 6 e 3. Logo $v_8 \in \partial H(S)$ e S é um conjunto de Carathéodory. Verificamos exaustivamente que não existe um conjunto de Carathéodory de maior cardinalidade, então S também é um conjunto de Carathéodory máximo, o número de Carathéodory de $C_{18}(1, 5)$ é 4.

O mesmo não ocorre para $C_{17}(1, 5)$, pois $n < 4r - 2$, e portanto o Teorema 1 não é válido. Vamos verificar se S é um conjunto de Carathéodory para $C_{17}(1, 5)$.

Temos que $S = \{1, 2, 4, 5\}$, e $H(S - 1) = \{2, 4, 5, 3\}$, porém $H(S - 2) = \{1, 4, 5, 6, 16, 11, 10, 12, 9, 15, 7, 13, 3, 14, 2, 8\} = V(C_{17}(1, 5))$. Podemos visualizar melhor na Figura 7, em

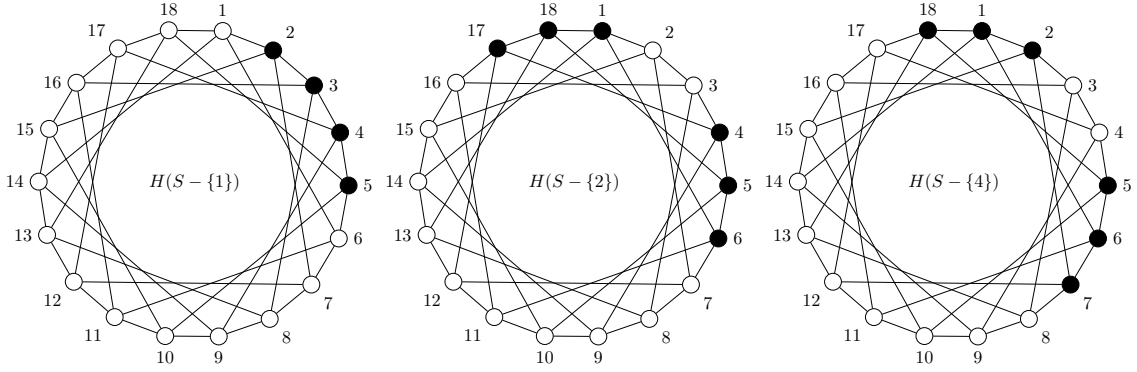


Figura 6: Exemplo de um conjunto de Carathéodory para $C_{18}(1, 5)$

que temos $v_{10} \in H(S - 2)$, portanto $v_{10} \notin \partial H(S)$, conforme prevemos no Teorema 3. Como $S - 2$ é um conjunto envoltória, S não é um conjunto de Carathéodory, conforme Propriedade (c). Verificamos que esse grafo não possui um conjunto de Carathéodory de tamanho 4, portanto seu número de Carathéodory é menor que 4.

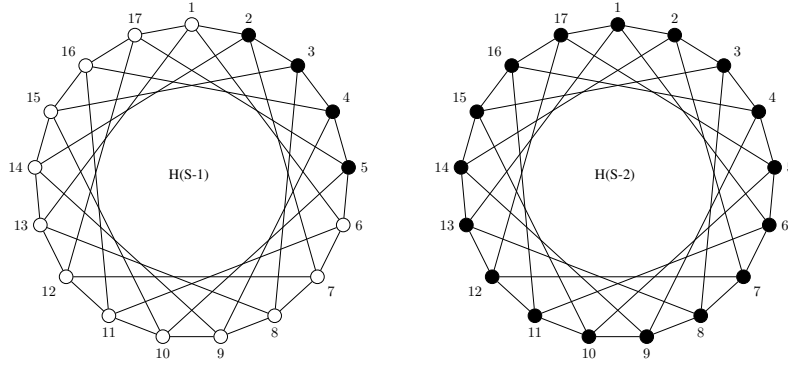


Figura 7: Exemplo de um conjunto não Carathéodory para $C_{17}(1, 5)$

De forma análoga vamos concluir um limite inferior para o número de Carathéodory para $C_n(1, r)$, onde $r + 1$ não é múltiplo de 3.

Lema 4. *Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3 \nmid (r + 1)$ e $S \subseteq V(G)$. Se $S = \{v_r\} \cup \{v_i | 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r - 1\}$ então $v_{2r} \in H(S)$.*

Demonstração. Por definição da função intervalo temos que $I^1[S] = I^0[S] \cup \{v_i | 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r - 1\} \cup \{v_{r+1}, v_n\} \cup \{v_{r-1}\}$, $I^2[S] = I^1[S] \cup \{v_{r+2}, v_{n-1}\}$, $I^3[S] = I^2[S] \cup \{v_{r+3}, v_{n-2}\}$ e para alguma iteração r temos que $I^r[S] = I^{r-1}[S] \cup \{v_{2r}, v_{n-(r-1)}\}$. Logo, $v_{2r} \in H(S)$. $\square$

Na figura 8 temos exemplos de conjuntos de S conforme definição no Lema 4 para $C_n(1, r)$ com $r \in \{4, 6, 7, 9\}$. E em seguida demonstraremos que são conjuntos de Carathéodory.

Lema 5. *Considere o grafo $G = C_n(1, r)$ tal que $3 \nmid (r + 1)$ e $S = \{v_i | 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r - 1\} \cup \{v_r\}$. Se $n \geq 4r - 2$ então $v_{2r} \in \partial H(S)$.*

Demonstração. Vamos provar que S é um conjunto de Carathéodory. Seja $H(S \setminus \{v_j\})$, para $j = r$ temos o mesmo comportamento do Lema 3, porém para $j = 1$ temos que $H(S \setminus \{v_1\}) = S \setminus \{v_1\} \cup \{v_i | 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r - 1\} \cup \{v_{r-1}\}$.

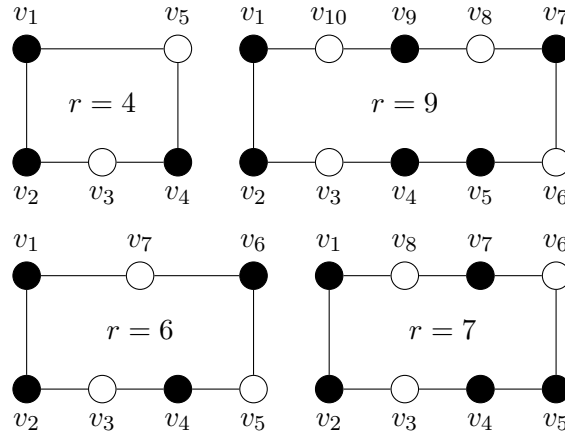


Figura 8: Exemplos de S para quando $3 \nmid (r+1)$ conforme Lema 4

Agora, considere $v_j \in S$ tal que $1 < j < r-1$. Aplicando a função intervalo vamos determinar o conjunto envoltório do conjunto $S' = S \setminus \{v_j\}$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: $3 \mid (j+1)$. Observe que $I[S'] = S' \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r \text{ e } i \neq j+1\} \cup \{v_{r+1}\} \cup \{v_n\} \cup \{v_{r-1}\}$ e $I^2[S'] = I[S'] \cup \{v_{r+2}\} \cup \{v_{n-1}\}$. O restante da demonstração é análoga ao Caso 1 do Lema 3.

Caso 2: $3 \nmid (j-1)$. Observe que $I[S'] = S' \cup \{v_i \mid 3 \mid i \text{ onde } 1 \leq i \leq r-1 \text{ e } i \neq j-1\} \cup \{v_{r+1}\} \cup \{v_n\} \cup \{v_{r-1}\}$ e $I^2[S'] = I[S'] \cup \{v_{r+2}\} \cup \{v_{n-1}\}$. O restante da demonstração segue igual ao Caso 2 do Lema 3.

Podemos então concluir, para todo os casos, que $v_{2r} \in \partial H(S)$, e portanto S é um conjunto de Carathéodory de G . $\square$

Teorema 2. Seja $G = C_n(1, r)$ tal que $3 \nmid (r+1)$ e $n \geq 4 \times r - 2$ então $c(G) \geq \lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$.

Demonstração. Seja $S = \{v_i \mid 3 \mid i \text{ tal que } 1 \leq i < r-1\} \cup \{v_r\}$, pelo Lema 4 temos que $v_{2r} \in H(S)$, e pelo Lema 5 temos que $v_{2r} \in \partial H(S)$, portanto S é um conjunto de Carathéodory. E S tem cardinalidade $\lfloor \frac{2r-1}{3} \rfloor + 1$. Consequentemente o número de Carathéodory de G é maior ou igual a $\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$. $\square$

4. Conclusões

Concluimos que grafos circulares $C_n(1, r)$ com $n \geq 4r - 2$ tem um conjunto de Carathéodory de cardinalidade pelo menos igual a $\lfloor \frac{2r+1}{3} \rfloor$ quando $3 \nmid (r+1)$ e $\frac{2(r+1)}{3}$ caso $3 \mid (r+1)$. Para os grafos potência de ciclo e circulares $C_n(1, 2)$ então o número de Carathéodory é igual a 2. Sabendo por Barbosa et al. [2012] que para determinar se um grafo G possui um conjunto de Carathéodory de tamanho k é um problema NP -difícil, acreditamos que nossos resultados contribuem para o estudo desse parâmetro em grafos circulares. Para trabalhos futuros pretendemos determinar o limite superior do número de Carathéodory nesses grafos e explorar o parâmetro número de Carathéodory para outras classes de grafo da família Cayley. Brešar e Valencia-Pabon [2020] e Grippo et al. [2021] exploraram o número envoltória na convexidade P_3 para os grafos de Hipercubo, Hamming e Kneser, porém sem explorar o parâmetro de Carathéodory. Por serem também grafos de Cayley acreditamos que nossos resultados possam ser estendidos para algumas dessas classes, que compartilham características semelhantes com os circulares.

Referências

- (2020). On the carathéodory and exchange numbers of geodetic convexity in graphs. *Theoretical Computer Science*, 804:46–57. ISSN 0304-3975.
- (2023). Complete characterizations of the 2-domination and p_3 -hull number polytopes. *Discrete Applied Mathematics*, 338:30–45. ISSN 0166-218X.
- Al-Ezeh, H., Ghanem, M., e Rwalah, J. (2017). The hull number of powers of cycles. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 32(4):805–810. ISSN 22343024.
- Araújo, R. T., Sampaio, R. M., dos Santos, V. F., e Szwarcfiter, J. L. (2018). The convexity of induced paths of order three and applications: Complexity aspects. *Discrete Applied Mathematics*, 237:33–42. ISSN 0166218X.
- Araújo, R. e Sampaio, R. (2023). Domination and convexity problems in the target set selection model. *Discrete Applied Mathematics*, 330:14–23. ISSN 0166-218X. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X2200484X>.
- Barbosa, R. M., Coelho, E. M., Dourado, M. C., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2012). On the Carathéodory Number for the Convexity of Paths of Order Three. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 26(3):929–939. ISSN 0895-4801. URL <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/110828678>.
- Brešar, B. e Valencia-Pabon, M. (2020). On the P_3 -hull number of Hamming graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 282:48–52. ISSN 0166-218X. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X19305244>.
- Brešar, B. e Valencia-Pabon, M. (2020). On the p_3 -hull number of hamming graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 282:48–52. ISSN 0166-218X.
- Cappelle, M. R., Coelho, E. M., Coelho, H., Silva, B. R., Souza, U. S., e Protti, F. (2022). P_3 -convexity on graphs with diameter two: Computing hull and interval numbers. *Discrete Applied Mathematics*, 321:368–378. ISSN 0166-218X. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X22002736>.
- Cappelle, M. R., Coelho, H., e Coelho, E. M. M. (2017). The carathéodory number of the p_3 convexity of cartesian product of graphs. *Anais do XLIX - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, p. 3350–3358.
- Carathéodory, C. (1911). Über den Variabilitätsbereich der Fourier'schen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. *Rend. del Circ. Mat. Palermo*, 32(1):193–217. ISSN 0009-725X.
- Centeno, C. C., Dourado, M. C., Penso, L. D., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2011). Irreversible conversion of graphs. *Theoretical Computer Science*, 412(29):3693–3700. ISSN 03043975. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2011.03.029>.
- Chen, N. (2009). On the approximability of influence in social networks. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(3):1400–1415. URL <https://doi.org/10.1137/08073617X>.
- Coelho, E. M., Coelho, H., e Rocha, B. (2023). P_3 -carathéodory number on graphs with diameter two (brief announcement). *Procedia Computer Science*, 223:388–390. ISSN 1877-0509. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/>

- S1877050923010293. XII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2023).
- Coelho, E. M., Dourado, M. C., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2014). The Carathéodory number of the convexity of chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 172:104–108. ISSN 0166218X. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0166218X14001279>.
- Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Puertas, M. L., e Seara, C. (2006). On geodetic sets formed by boundary vertices. *Discrete Mathematics*, 306(2):188–198. ISSN 0012365X. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0012365X05006187>.
- Dourado, M., Rautenbach, D., dos Santos, V., Schäfer, P., Szwarcfiter, J., e Toman, A. (2013). Algorithmic and structural aspects of the p_3 -radon number. *Annals of Operations Research*, p. 1–17.
- Dourado, M. C., Penso, L. D., e Rautenbach, D. (2016). On the geodetic hull number of p_k -free graph. *Theoretical Computer Science*, 640:52–60. ISSN 0304-3975. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304397516302341>.
- Dourado, M. C., Protti, F., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2010). On the Hull Number of Triangle-Free Graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 23(4):2163–2172. URL <https://doi.org/10.1137/090751797>.
- Frasca, P. e Rossi, F. (2022). Caratheodory Solutions and their Associated Graphs in Opinion Dynamics with Topological Interactions *. In *MTNS 2022 - 25th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, volume 55, p. 436–441, Bayreuth, Germany. URL <https://hal.science/hal-03940367>.
- Grippo, L., Pastine, A., Torres, P., Valencia-Pabon, M., e Vera, J. (2021). On the p_3 -hull number of kneser graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 28. URL <https://doi.org/10.37236/9903>.
- Hon, W.-K., Kloks, T., e Liu, H.-H. (2016). On the p_3 -convexity of some classes of graphs with few p_4 s and permutation graphs. In *Proceedings of the Australasian Computer Science Week Multiconference, ACSW '16*, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery. ISBN 9781450340427. URL <https://doi.org/10.1145/2843043.2843055>.
- Keiler, L., Lima, C. V., Maia, A. K., Sampaio, R., e Sau, I. (2021). Target set selection with maximum activation time. *Procedia Computer Science*, 195:86–96. ISSN 18770509. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877050921021530>.
- Obradović, N., Peters, J., e Ružić, G. (2005). Minimum chromaticity of circulant graphs. *Discrete Mathematics*, 299(1-3):288–296. ISSN 0012365X. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X05002827>.
- Shaheen, R., Mahfud, S., e Kassem, A. (2022). Irreversible k -Threshold Conversion Number of Circulant Graphs. *Journal of Applied Mathematics*, 2022(1):1250951. ISSN 16870042. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2022/1250951>.