LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

MODELO EXATO PARA O PROBLEMA DA GRADE DE HORÁRIO ESCOLAR CONSIDERANDO CUSTO PEDAGÓGICO E PREFERÊNCIAS DOCENTES: REALIDADE DOS INSTITUTOS FEDERAIS

Filipe Eringer Garruth, Leandro Colombi Resendo
Instituto Federal do Espírito Santo - Serra
ES-010 Km-6,5 - Manguinhos, Serra - ES, 29173-087
filipe.eg@gmail.com, leandro@ifes.edu.br

RESUMO

Neste estudo, apresentamos uma formulação de Programação Linear Inteira (PLI) para resolver o problema de agendamento de horários escolares nos institutos federais de ensino, onde professores lecionam tanto no ensino médio quanto no superior. A principal contribuição desse trabalho é a introdução do conceito de Custo Pedagógico, que incorpora restrições pedagógicas à função objetivo. A abordagem também considera preferências dos docentes, como evitar aulas em certos dias ou horários. Além disso, propomos um tratamento específico para aulas geminadas, utilizando restrições lógicas. As funções de Custo Pedagógico e Custo Docente permitiram incluir preferências de horários específicas. A solução proposta otimiza o atendimento das solicitações pedagógicas, dos docentes e dos alunos. Apesar do grande número de restrições que pode tornar o problema infactível. A formulação proposta é flexível, permitindo a inclusão de novas regras para atender a diferentes cenários e necessidades.

PALAVRAS CHAVE. Programação Linear Inteira, Alocação de grade de horários, restrições pedagógicas.

Tópicos: PM – Programação Matemática; AdP&ED – PO na Administração Pública e Educação

ABSTRACT

In this study, we present an Integer Linear Programming (ILP) formulation to solve the problem of scheduling school timetables in federal educational institutes, where teachers teach in both secondary and higher education. The main contribution of this work is the introduction of the concept of Pedagogical Cost, which incorporates pedagogical restrictions into the objective function. The approach also considers teachers' preferences, such as avoiding classes on certain days or times. Furthermore, we propose a specific treatment for twinned classes using logical constraints. The Pedagogical Cost and Teaching Cost functions made it possible to include specific time preferences. The proposed solution optimizes the fulfillment of pedagogical requests from teachers and students. Despite the large number of restrictions that can make the problem infeasible, the proposed formulation is flexible, allowing the inclusion of new rules to meet different scenarios and needs.

KEYWORDS. Integer Linear Programming, Timetabling Problem, pedagogical constraints.

Paper topics: PM – Mathematical Programming; AdP&ED – OR in Public Administration and Education

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

1. Introdução

A alocação eficiente de recursos é uma tarefa importante em diversos setores de instituições públicas e privadas, desde a programação de aulas em escolas e universidades, o planejamento de horários de transporte público e a gestão de tarefas em ambientes empresariais [Bettinelli et al., 2015]. Uma área de pesquisa com aplicação nesse contexto é o que se convencionou chamar de *Timetabling Problem*, ou problema da grade de horários. De acordo com [Zhang et al., 2010], o *Timetabling Problem* é um problema de otimização complexo que envolve a distribuição de recursos limitados, como salas, professores, veículos ou máquinas, a um conjunto de atividades, considerando diversas restrições dependendo do cenário investigado. A tarefa de alocar recursos de maneira eficiente enfrenta obstáculos decorrentes das restrições impostas pelo ambiente e pelas preferências das partes envolvidas. Estas restrições desempenham um papel fundamental na modelagem do problema, pois determinam as limitações que o cenário deve atender.

Segundo [Yusop, 2022], em instituições educacionais, horários bem planejados podem melhorar a experiência dos alunos e a produtividade dos professores. Na literatura acadêmica é possível encontrar vários trabalhos tratando do problema de grade de horário escolar. Comumente, tais trabalhos tratam da alocação de pessoas (tipicamente professores e alunos) e recursos (salas de aula e laboratórios) aos horários de aula disponíveis da semana, nos ambientes de escolas de ensino médio ou graduação [Ceschia et al., 2023]. Na taxonomia encontrada para o problema, existem três classes distintas para o problema da grade de horário: ensino médio (*high-school*), graduação (*University Course*) e agendamento de prova (*University Examination*) [Ceschia et al., 2023; Chen et al., 2021; Babaei et al., 2015; Tan et al., 2021]. Porém, no Brasil, a rede dos Institutos Federais trabalha com um cenário onde se tem ensino médio, técnico, graduação, cursos de curta duração (FIC - Formação Inicial Continuada) e pós-graduação compartilhando professores, salas e horários, sendo esse ambiente pouco explorado na literatura.

Nesse trabalho, usaremos como estudo de caso o cenário do Campus Cachoeiro de Itapemirim do Instituto Federal do Espírito Santo. O campus possui todas as modalidades de ensino preconizadas pelos Institutos Federais. Porém, por se tratar dos cursos mais críticos para a construção do horário, consideraremos apenas o ensino médio integral, com aulas nos turnos matutino e vespertino, os cursos técnicos, no turno noturno, e a graduação, nos três turnos.

O foco principal deste trabalho reside no desenvolvimento de um modelo de Programação Linear Inteira (PLI) voltado para resolver o problema de alocação de horários. Na construção do horário, além das restrições físicas, devem ser consideradas as solicitações pessoais dos professores. Essas solicitações são fundamentais para o bem-estar dos profissionais. Tais restrições podem ser encontradas na literatura e podem ser tratadas como restrições *hard*, quando são obrigatórias, ou como restrições *soft*, quando o professor gostaria que fossem atendidas [Feizi-Derakhshi et al., 2012]. Nesse trabalho, trataremos dessas restrições como *soft*. Além disso, na graduação, é comum o agrupamento de aulas; assim, uma das contribuições deste trabalho é a forma como tratamos as restrições de aulas geminadas. Diferente dos trabalhos encontrados na literatura [Daskalaki et al., 2004], aqui propomos um conjunto de restrições lógicas linearizáveis para tratar esse tipo de restrição. Por fim, outra contribuição, inspirada no agendamento de horários de provas [Amaral e Pais, 2016], é a proposição de um conjunto de restrições chamadas de **Custo Pedagógico**, que devem ser otimizadas.

2. Revisão de literatura

A programação de horários educacionais, em essência, envolve a alocação de encontros entre professores e alunos em dias, horários e salas de aula. Apesar da aparente simplicidade desse processo, é preciso destacar que cada instituição possui suas próprias regras, convenções e particularidades, o que torna cada problema específico praticamente único [Ceschia et al., 2023].

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

De acordo com [Schaerf, 1999], existem três classificações para o *Educational Timetabling Problem*. São elas: ***Highschool Timetabling (HTT):*** que tem como restrições básicas evitar que os professores tenham aula com duas turmas ao mesmo tempo e que dois professores não estejam na mesma turma ao mesmo tempo; ***Course Timetabling (CTT):*** comumente busca minimizar a sobreposição de aulas de cursos de graduação que compartilham estudantes em comum; ***Examination Timetabling (ETT):*** busca evitar a sobreposição de exames de cursos que possuem estudantes em comum, distribuindo os exames para os estudantes o máximo possível. Uma formulação matemática clássica na literatura para o HTT é apresentada por [Schaerf, 1999]. Esta formulação é classificada como complexa pelo autor e considera três tipos de elementos: tempos, recursos (alunos, turmas, professores e salas) e eventos. O modelo inclui 15 tipos de restrições, abrangendo desde a distribuição de aulas/palestras ao longo da semana até os tempos ociosos dos alunos, preferências e indisponibilidades. Cada restrição pode ser categorizada como forte (obrigatória) ou fraca (não obrigatória). Para o CTT padrão, o *survey* de [Ceschia et al., 2023] apresenta um modelo onde um conjunto de eventos, períodos e salas são fornecidos. Além disso, um conjunto de dias é definido e cada período é um intervalo de tempo pertencente a um dia. Algumas características das salas também são consideradas, como o número de assentos. A função objetivo dessa formulação penaliza situações em que um estudante está comparecendo a um evento no último período de um dia, comparecendo a três (ou mais) eventos em intervalos de tempo consecutivos no mesmo dia, ou comparecendo a apenas um evento em um dia.

A versão clássica do ETT, proposta por [Carter et al., 1996], considera como restrição apenas os conflitos entre exames que envolvem estudantes em comum. Salas de aula ou locais de aplicação não são considerados nesse problema. O objetivo dessa formulação é maximizar a distância entre exames que possuam estudantes em comum. Destacamos que, neste trabalho, foi usada parte dessa ideia para definir o Custo Pedagógico do horário.

2.1. Métodos de solução encontrados

A seguir, apresentamos alguns trabalhos encontrados na literatura, classificando-os pelos métodos de solução adotados para cada tipo de problema.

Métodos Exatos

O trabalho de [Kristiansen et al., 2015] apresentou o primeiro método exato para instâncias de elaboração de horários escolares do ensino médio no formato XHSTT (*XML High School TimeTabling*, que é um formato de arquivo XML utilizado para representar problemas de horários de escolares). Neste trabalho, conseguiram produzir duas novas soluções ótimas e comprovar a otimalidade de quatro soluções previamente conhecidas. Para as instâncias não resolvidas de forma ótima, obtiveram melhorias em nove instâncias investigadas. Em [Fonseca et al., 2017], os autores aprimoraram o trabalho de [Kristiansen et al., 2015], corrigindo algumas desproporcionalidades e propondo uma formulação estendida baseada em fluxo. Como resultado, a relaxação linear da formulação foi melhorada, resultando em uma redução média de 32% nas lacunas de aulas dos professores. No trabalho de [Tassopoulos et al., 2020], foi desenvolvido um modelo de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) para lidar com os desafios de planejamento de horários em escolas gregas. A aplicação desse modelo foi realizada por meio das ferramentas Gurobi e CPLEX. Duas abordagens metodológicas distintas foram adotadas na formulação do problema. A primeira adotou um modelo "monolítico", que incorporava todas as restrições, tanto as fortes quanto as fracas. A segunda estratégia desmembrou o problema em seis subproblemas distintos. Os resultados computacionais evidenciaram que o segundo método se revelou eficiente na obtenção de soluções ótimas, ao passo que o primeiro método não alcançou resultados satisfatórios.

Métodos Heurísticos

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

O trabalho de [Babaei et al., 2015] afirma que as abordagens baseadas em métodos exatos não apresentam boa eficiência na resolução do CTT. Por outro lado, a exploração do espaço de soluções é mais eficiente ao aplicar métodos metaheurísticos e técnicas inteligentes na análise desse tipo de problema. Mesmo assim, não se pode considerar uma abordagem metaheurística como o melhor método para resolver o problema CTT, uma vez que os conjuntos de dados utilizados são diversos e a forma de aplicar esse tipo de método difere. Em [Leite et al., 2019], é proposto um algoritmo baseado em coloração de grafos para iniciar a solução e a metaheurística *Simulated Annealing* (SA) para otimizá-la. No trabalho foram testados dois algoritmos de otimização. O primeiro é o SA original, enquanto o segundo, denominado FastSA, baseia-se no SA, mas emprega um critério de aceitação modificado que fixa o exame selecionado assim que o número de movimentos aceitos do exame no vizinho anterior é zero.

3. Características do Cenário e Modelo Proposto

A construção da grade de horários passa pelo atendimento a restrições que podem ser classificadas em duas categorias: Restrições Fortes e Restrições Fracas.

As **Restrições Fortes (*hard*)** são aquelas que garantem que uma solução seja viável. Em termos práticos, as restrições fortes são geralmente relacionadas a requisitos essenciais que não podem ser comprometidos de forma alguma. Destacamos como restrições fortes as restrições físicas e algumas restrições pedagógicas. Por exemplo, na graduação, as aulas costumam ser geminadas, com dois ou três tempos, e a violação dessa regra inviabiliza as aulas de laboratório.

As **Restrições Fracas (*soft*)** são importantes, mas permitem alguma flexibilidade. Elas podem ser violadas em circunstâncias específicas. Essas restrições serão associadas à função objetivo do modelo proposto neste trabalho. Além das preferências de horário dos professores, o Custo Pedagógico também foi considerado uma restrição fraca. Esse custo se inspira nos critérios estabelecidos por [Amaral e Pais, 2016] para o agendamento de exames, adaptados para o problema em questão. Assim, o modelo buscará minimizar a ocorrência de algumas situações consideradas pedagogicamente indesejáveis, por exemplo: uma disciplina não deve ser alocada sempre no último (ou no primeiro) horário; e deve ser evitada aula da mesma disciplina em dois dias seguidos.

O modelo apresentado aqui considera as características do campus investigado, mas reflete a realidade da maioria dos Institutos Federais no Brasil. Os elementos básicos do modelo são:

- *Professor:* Neste contexto, levamos em conta apenas o número de aulas que cada professor ministra para cada turma, sem considerar as especificidades das disciplinas. Sendo um conjunto de 82 professores, representados por $P = \{P1, P2, P3, ..., P82\}$.

- *Dia da Semana:* Abrangendo de segunda a sexta-feira.

- *Turma*: Refere-se a cada grupo de alunos matriculados em um período, série ou módulo específico de um curso. As 43 turmas são representadas por $T = \{T1, T2, T3, ..., T43\}$.

- *Horário*: Refere-se a cada intervalo de tempo disponível para a alocação de uma aula durante o dia. Esses tempos são divididos em três períodos: matutino (tempos de 1 a 6), vespertino (de 7 a 12) e noturno (de 13 a 16).

Na Tabela 1 apresentamos as notações, parâmetros e variáveis do modelo posto.

Restrições básicas

A Expressão 1 garante que em cada horário de uma turma, apenas um professor será alocado:

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

Tabela 1: Estrutura básica do modelo proposto

	Notações	Descrição
Conjuntos	P	Conjunto de professores, onde $p \in P = \{P1, P2, P3, ..., P82\}$
	D	Conjunto de dias da semana, onde $d \in D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
	T	Conjunto de turmas onde os professores deverão ministrar aulas, com $t \in T = \{T1, T2, T3, ..., T43\}$
	H	Conjunto de horários disponíveis em cada dia, onde $h \in H = \{1, 2, 3, 4, ..., 16\}$
	$PT[p,t]$	Matriz com o número de aulas de cada professor em cada turma, com $p \in P$ e $t \in T$
Var. de decisão	$x_{d,h}^{p,t}$	Variável binária que indica se o professor p está alocado na turma t no dia d no horário h
	$CustoP_{d}^{p,t}$	Variável inteira que define o Custo Pedagógico a ser minimizado na função objetivo
	$CustoD_{p,t}$	Variável inteira que define o Custo Docente a ser minimizado na função objetivo

$$\sum_{p \in P} x_{d,h}^{p,t} \leq 1; \quad \forall d \in D, \forall h \in H, \forall t \in T. \tag{1}$$

A Inequação 2 garante que cada professor pode estar alocado, no máximo, a uma turma em cada horário e em cada dia:

$$\sum_{t \in T} x_{d,h}^{p,t} \leq 1; \quad \forall d \in D, \forall h \in H, \forall p \in P. \tag{2}$$

A Equação 3 determina o número de aulas atribuídas a cada professor em cada turma, com base em uma matriz representada por $PT[p,t]$:

$$\sum_{d \in D, h \in H} x_{d,h}^{p,t} = PT[p,t]; \quad \forall p \in P, \forall t \in T. \tag{3}$$

A Equação 4 é aplicada para delimitar a alocação das aulas em horários específicos. Neste modelo, esse tipo de restrição foi utilizado para designar adequadamente o turno de cada turma. Na restrição apresentada abaixo, o modelo assegura que as aulas das turmas de 1 a 4 sejam programadas para o período da manhã, isto é, nos intervalos de tempo de 1 a 6:

$$\sum_{p \in P} x_{d,h}^{p,t} = 0; \quad \forall t \in \{1...4\}, \forall h \in \{7...16\}, \forall d \in D. \tag{4}$$

Para impor restrições a outras turmas e turnos, basta substituir o conjunto que representa as turmas e o conjunto que representa as aulas que a turma não pode estar alocada.

3.1. Restrições para aulas geminadas

Devido à necessidade de alguns cursos, neste modelo consideramos a alocação de aulas consecutivas. Um professor com duas aulas em uma turma pode escolher ministrá-las em dois intervalos de tempo consecutivos. O mesmo se aplica a um professor com três aulas: ele pode optar por uma aula de dois tempos consecutivos e uma aula avulsa em outro dia ou uma aula de 3 tempos. Se um professor tiver quatro aulas em uma turma, pode escolher entre dar duas aulas consecutivas de dois tempos em dias diferentes ou uma aula de dois tempos em um dia e outras duas aulas isoladas em dias distintos. Nesse contexto, o professor deve indicar a necessidade do agrupamento de aulas na sua disciplina. O modelo é capaz de acomodar pedidos de aulas consecutivas de dois e três tempos. Foram aplicadas restrições lógicas para resolver essa demanda específica, e o conjunto

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

dessas restrições é explicado a seguir. A Tabela 2 apresenta os novos elementos (parâmetros e variáveis) que devem ser inseridos no modelo para tratar essas demandas.

Tabela 2: Estrutura para o tratamento de aulas geminadas

	Notações	Descrição
Matrizes	$G2[p,t]$	Matriz que indica se o professor p possui aula geminada de dois tempos na turma t.
	$G22[p,t]$	Matriz que indica se o professor p possui duas aulas geminadas de dois tempos na turma t.
	$G3[p,t]$	Matriz que indica se o professor p possui aula geminada de três tempos na turma t.
Var. de Decisão	$y2_d^{p,t}$	Variável binária que indica se o professor p tem aula geminada de dois tempos na turma t no dia d.
	$y2a_d^{p,t}$, $y2b_d^{p,t}$	Variáveis binárias que indicam se o professor p possui duas aulas geminada de dois tempos, sendo uma variável para cada aula na turma t no dia d.
	$y3_d^{p,t}$	Variável binária que indica se o professor p possui uma aula geminada de três tempos na turma t no dia d.

Uma Aula Geminada com Dois Tempos

A Restrição 5 assegura que a aula geminada ocorra em apenas um dia, enquanto a Restrição 6 garante que o modelo aloque as aulas de forma consecutiva, resultando em uma seção de aula geminada de dois tempos.

$$\sum_{d \in D} y2_d^{p,t} = 1; \quad \forall p \in P, \forall t \in T : G2[p,t] = 1. \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Se } (y2_d^{p,t} = 1) \textbf{ então } \big((x_{d,1}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,2}^{p,t} = 1) \textbf{ ou} \\ ((x_{d,2}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,3}^{p,t} = 1) \textbf{ ou ... ou} \\ (x_{d,15}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,16}^{p,t} = 1)\big); \\ \forall d \in D, \forall p \in P, \forall t \in T : G2[p,t] = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Duas Aulas Geminadas com Dois Tempos

Para representar essa demanda, foi desenvolvida a matriz $G22[p,t]$, onde o valor 1 é atribuído quando o professor p possui duas aulas geminadas de dois tempos na turma t. Para diferenciar os dias em que cada seção de aula geminada de dois tempos ocorre, foram introduzidas as variáveis $y2a_d^{p,t}$ e $y2b_d^{p,t}$, que assumem o valor 1 quando o professor p tem uma aula geminada de dois tempos na turma t no dia d, conforme indicado pelas Equações 7 e 8.

$$\sum_{d \in D} y2a_d^{p,t} = 1; \quad \forall p \in P, \forall t \in T : G22[p,t] = 1. \tag{7}$$

$$\sum_{d \in D} y2b_d^{p,t} = 1; \quad \forall p \in P, \forall t \in T : G22[p,t] = 1. \tag{8}$$

A Restrição 9 garante que as seções de aulas geminadas de dois tempos aconteçam em dias distintos, enquanto a Restrição 10 realiza a alocação das aulas de forma consecutiva.

$$y2a_d^{p,t} + y2b_d^{p,t} \leq 1; \quad \forall p \in P, \forall t \in T : G22[p,t] = 1. \tag{9}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

$$\textbf{Se } (y2a_d^{p,t} = 1) \textbf{ ou } (y2b_d^{p,t} = 1) \textbf{ então } \big((x_{d,1}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,2}^{p,t} = 1) \textbf{ ou } ((x_{d,2}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,3}^{p,t} = 1) \textbf{ ou ... ou } (x_{d,15}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,16}^{p,t} = 1)\big); \quad \forall d \in D, \forall p \in P, \forall t \in T : G22[p,t] = 1. \tag{10}$$

Uma Aula Geminada com Dois Tempos e uma Aula Geminada com Três Tempos

A matriz $G3[p,t]$ segue a mesma lógica das matrizes mencionadas anteriormente, indicando ao modelo se o professor p possui uma aula geminada de três tempos na turma t. Da mesma forma, a variável $y3_d^{p,t}$ é definida como 1 quando o professor p tem uma aula geminada de três tempos na turma t no dia d, conforme apresentado na Equação 11. A Restrição 12 garante a alocação consecutiva das aulas.

$$\sum_{d \in D} y3_d^{p,t} = 1; \quad \forall p \in P, \forall t \in T : G3[p,t] = 1. \tag{11}$$

$$\textbf{Se } (y3_d^{p,t} = 1) \textbf{ então } \big((x_{d,1}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,2}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,3}^{p,t} = 1) \textbf{ ou } ((x_{d,2}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,3}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,4}^{p,t} = 1) \textbf{ ou ... ou } (x_{d,14}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,15}^{p,t} = 1 \textbf{ e } x_{d,16}^{p,t} = 1)\big); \quad \forall d \in D, \forall p \in P, \forall t \in T : G3[p,t] = 1. \tag{12}$$

Se um professor possuir cinco ou mais aulas em uma turma específica e optar por ministrar uma aula geminada de três tempos em um dia e outra de dois tempos em outro dia, a Restrição 13 garante que apenas uma aula geminada seja agendada em um único dia.

$$y2_d^{p,t} + y3_d^{p,t} \leq 1; \quad \forall p \in P, \forall t \in T, \forall d \in D : G2[p,t] = 1 \wedge G3[p,t] = 1. \tag{13}$$

3.2. Restrições para o Custo Pedagógico (CP)

O modelo proposto tem como objetivo organizar a grade de horários levando em consideração as diretrizes pedagógicas da instituição. Para garantir isso, são aplicadas penalidades às situações pedagogicamente indesejáveis no horário. Chamaremos estas situações de Custo Pedagógico (CP). Assim, a função objetivo tentará minimizar a ocorrência dessas situações, otimizando o Custo Pedagógico.

No modelo proposto, foram incorporadas duas dessas situações, onde serão definidas as variáveis $CustoP1_d^{p,t}$ e $CustoP2_d^{p,t}$. Essa divisão permite atribuir custo a cada uma das restrições independentemente.

CP1: Mais de uma aula de um professor para a mesma turma no mesmo dia

A Expressão 14 foi formulada para evitar a ocorrência de duas ou mais aulas ministradas pelo mesmo professor para a mesma turma no mesmo dia. Essa restrição foi considerada para os professores que não optaram por ministrar aulas geminadas. Inicialmente, foi atribuída uma penalidade de valor 3 para essa situação.

$$\textbf{Se } \left(\sum_{h \in H} x_{d,h}^{p,t} \geq 2\right) \textbf{ então } CustoP1_d^{p,t} = 3; \quad \forall d \in D, \forall t \in T, \forall p \in P : G2[p,t] = 0 \wedge G22[p,t] = 0. \tag{14}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

Analogamente, a Expressão 15 trata da situação em que o professor possui aulas geminadas com 3 tempos. No entanto, esta restrição permite a alocação de até duas aulas do mesmo professor para a mesma turma no mesmo dia sem penalidades, evitando que o modelo penalize todas as aulas geminadas de dois tempos já definidas anteriormente.

$$\textbf{Se } \left(\sum_{h\in H} x_{d,h}^{p,t} \geq 3\right) \textbf{ então } CustoP1_d^{p,t} = 3; \quad \forall d \in D, \forall t \in T, \forall p \in P : \\ G3[p,t] = 0. \tag{15}$$

CP2: Aulas de um mesmo professor para a mesma turma em dias seguidos

A Expressão 16 foi elaborada para evitar a atribuição de aulas do mesmo professor para a mesma turma em dias consecutivos. Nesse contexto, uma penalidade de valor 1 foi atribuída inicialmente, dado que essa restrição é considerada menos importante em comparação à anterior.

$$\textbf{Se } \left(\sum_{h\in H} x_{d-1,h}^{p,t} \geq 1\right) \textbf{ e } \left(\sum_{h\in H} x_{d,h}^{p,t} \geq 1\right) \textbf{ então } CustoP2_d^{p,t} = 1; \\ \forall d \in \{2..5\}, \forall t \in T, \forall p \in P. \tag{16}$$

3.3. Restrições para as Preferências dos Docentes (PD)

Na função objetivo proposta, também consideramos as preferências dos professores, buscando atendê-las sempre que possível. Assim como as restrições de Custo Pedagógico, foram definidas outras quatro variáveis, uma para cada situação abordada, sendo $CustoD1_{p,t}$, $CustoD2_{p,t}$, $CustoD3_{p,t}$ e $CustoD4_{p,t}$.

PD1: Evitar que um professor lecione o último horário de um dia e o primeiro do dia seguinte.

A Restrição 17 foi estabelecida para prevenir a ocorrência de aulas ministradas pelo mesmo professor no último horário de um dia e o primeiro horário do dia seguinte, respeitando um período de descanso do docente. Uma penalidade de valor 3 foi atribuída para essa situação.

$$\textbf{Se } \left(\sum_{h\in H} x_{d,16}^{p,t} \geq 1\right) \textbf{ e } \left(\sum_{h\in H} x_{d+1,1}^{p,t} \geq 1\right) \textbf{ então } CustoD1_{p,t} = 3; \\ \forall d \in \{1..4\}, \forall t \in T, \forall p \in P \tag{17}$$

PD2: Quando o professor não pode dar aula no final da manhã e início da tarde

Para ilustrar a capacidade do modelo em atender às preferências dos professores, tomamos como exemplo uma restrição pessoal de um conjunto de docentes. Nesse caso específico, os professores não podem ser designados para o último horário da manhã ($h = 6$) ou para o primeiro horário da tarde ($h = 7$). Essa condição está modelada na Restrição 18, para um conjunto de professores $k*$. Para essa solicitação, foi atribuída uma penalidade de valor 1.

$$\textbf{Se } \left(\sum_{d\in D} x_{d,6}^{k*,t} \geq 1\right) \textbf{ ou } \left(\sum_{d\in D} x_{d,7}^{k*,t} \geq 1\right) \textbf{ então } CustoD_{k*,t} = 1; \quad \forall t \in T. \tag{18}$$

PD3: Quando o professor não pode dar aula nos dois primeiros horários do dia

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

Outra situação que surge no campus é a restrição de que o professor $k*$ não pode ser designado para os dois primeiros horários do dia. Essa condição está modelada na Restrição 19.

$$\textbf{Se} \left(\sum_{h \in \{1,2\}} x_{d,h}^{k*,t} \geq 1 \right) \textbf{então } CustoD_{k*,t} = 1; \quad \forall t \in T, \forall d \in D. \tag{19}$$

PD4: Quando o professor não dá aulas em dias específicos

Um exemplo clássico no problema de alocação de horários surge quando um professor, ou grupo de professores, opta por não ministrar aulas em um dia específico da semana. Para lidar com essa preferência, elaboramos a Restrição 20. Tomamos como exemplo um conjunto de professores $k*$ que não deseja lecionar em um dia específico ($d*$).

$$\textbf{Se} \left(\sum_{h \in H} x_{d*,h}^{k*,t} \geq 1 \right) \textbf{então } CustoD_{k*,t} = 1; \quad \forall t \in T. \tag{20}$$

3.4. Função objetivo

Como mencionado, a função objetivo do modelo visa minimizar as penalidades associadas a certas situações que definimos como Custo Pedagógico e Preferência Docente. O modelo apresentado aqui inclui duas restrições de Custo Pedagógico e quatro restrições de Preferência Docente. Para evitar sobreposição de custos foi definida uma variável para cada situação que deve ser minimizada. A função objetivo do modelo é apresentada na Expressão 21.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} CustoP1_d^{p,t} + \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} CustoP2_d^{p,t} + \\ \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} CustoD1_{p,t} + \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} CustoD2_{p,t} + \\ \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} CustoD3_{p,t} + \sum_{t \in T} \sum_{p \in P} CustoD4_{p,t}; \end{aligned} \tag{21}$$

4. Resultados

O modelo proposto na Seção 3 foi implementado utilizando o software IBM ILOG CPLEX 20.1.0. Destacamos que as expressões lógicas na apresentação do modelo foram implementadas como estão descritas e foram linearizadas pelo Cplex. As instâncias foram executadas em um computador equipado com 20GB de memória RAM e um processador Intel Core i7 com 2.80 GHz. O sistema operacional em uso foi o Microsoft Windows 11.

Para um *benchmark* de comparação do tempo computacional e resultados alcançados, implementamos o modelo utilizando uma função objetivo simples, cujo propósito era apenas organizar a grade de horários conforme as restrições, sem a consideração de minimização dos custos pedagógicos e preferências dos docentes. Essa função objetivo está definida na Expressão 22. Note que o resultado na somatória é o número total de aulas da grade de horário, sendo esse um valor constante. Assim, a tarefa do modelo seria apenas criar uma grade de horário factível. Com essa função objetivo, o modelo alcançou um resultado viável em 30 minutos.

$$\text{maximize} \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \sum_{d \in D} \sum_{h \in H} x_{d,h}^{p,t}; \tag{22}$$

Para o restante dos experimentos, estabelecemos um limite de processamento de 60 minutos, sendo apresentado o Gap caso o modelo não encontre a solução ótima dentro desse tempo.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

A Tabela 3 apresenta os resultados dos experimentos realizados, considerando a função objetivo descrita na Expressão 21. Os experimentos tiveram o objetivo de avaliar os resultados considerando variações dos pesos da função objetivo e transformando elementos da função objetivo em restrições. Em cada experimento, na linha 'Custo', é apresentado o peso dado a cada parcela da Função Objetivo; na linha 'Quantidade (gerada)', é indicado o número de fatores gerados para cada custo associado, pedagógico ou docente; na linha 'Não atendidas', mostra a quantidade de solicitações de cada parcela que não foi atendida. Adicionalmente, o 'custo hard' significa que a parcela correspondente da função objetivo foi transformada em restrição e deve ser atendida obrigatoriamente. Para exemplificar, no Experimento Exp01, a solução ótima foi obtida em 3050 segundos. Para o fator da função objetivo CP1 (Mais de uma aula de um professor para a mesma turma no mesmo dia), foram geradas 33910 parcelas, das quais apenas 49 não foram atendidas. Adicionalmente, nota-se que todos os outros elementos da função objetivo, seja CP ou PD, tiveram suas demandas 100% atendidas.

No experimento denominado Exp02, ajustamos o valor do custo de CP1 para tentar priorizar sua resolução, visto que, no experimento anterior, CP1 foi a única restrição que apresentou casos de não atendimento. Como resultado, observamos uma leve redução na quantidade de restrições não atendidas em CP1. No entanto, também houve um pequeno aumento nas restrições não atendidas em CP2 e PD4, conforme evidenciado na linha correspondente ao Exp02 na Tabela 3. Esse experimento foi interrompido com 1 hora de processamento e obteve uma Gap de 4,34%, sendo esse um valor considerado baixo.

No Experimento Exp03 os custos dos fatores foram configurados com 1, dando mesmo nível de prioridade para todas das demandas pedagógicas se docentes. Observamos que o modelo encontrou a solução ótima em menos tempo do que nos experimentos anteriores, resultando em uma leve redução na quantidade de restrições não atendidas em CP1 e um pequeno aumento na quantidade não atendida em CP2 e PD4 em comparação com o Exp01. Os resultados deste experimento estão detalhados na linha correspondente ao Exp03 na Tabela 3.

No Exp04, modificamos os fatores CP1 e CP2 para torná-los obrigatórios, isto é, esses foram transformados em restrições. Como nos experimentos anteriores sempre houve fatores CP1 ou CP2 não atendidos, como esperado, a solução nesse caso foi infactível. Por outro lado, no Exp05, transformando as restrições de Preferências Docentes (PD) para serem obrigatórias, enquanto deixamos as restrições de Custo Pedagógico (CP) com custo 1, a solução obtida foi equivalente à solução encontrada no Exp01, porém com aproximadamente metade do tempo computacional.

Os experimentos realizados mostram que transformar solicitações de preferências em restrições pode tornar o modelo infactível. No caso de instâncias com muitas solicitações, como nas instâncias apresentadas, ficaria inviável identificar o conjunto de restrições que esta tornando infactível. Assim, a estratégia de custo pedagógica e preferência docente se apresentou promissora para maximizar o atendimento dessas solicitações, mantendo a factibilidade da instância.

5. Conclusão

Neste artigo, propomos uma formulação de Programação Linear Inteira (PLI) para resolver o problema de agendamento de horários escolares em um campus da rede de institutos federais de ensino. Uma das principais características dessa rede de ensino, para a construção da grade de horário, é o fato dos professores atuarem no ensino médio e superior.

A principal contribuição desse trabalho consiste na introdução do conceito de Custo Pedagógico. A ideia da proposta consistem em transformar restrições que são comumente solicitadas pela equipe pedagógica, em parte da função objetivo. Assim, tais restrições seriam atendidas sempre que possível. Usando a mesma estratégia, também tratamos alguns exemplos de preferências docentes, como solicitações pessoais para evitar aulas em dias ou horários específicos.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

Tabela 3: Resultados dos experimentos

	Tempo(s)	Gap	Parâmetros da F.O.	CP1	CP2	PD1	PD2	PD3	PD4
Exp01	3050	-	Custo	1	3	3	2	2	1
			Quantidade (gerada)	33910	14104	14104	129	215	430
			Não atendidas	49	0	0	0	0	0
Exp02	3600	4.34%	Custo	4	3	3	2	2	1
			Quantidade (gerada)	33910	14104	14104	129	215	430
			Não atendidas	44	3	0	0	0	2
Exp03	2174	-	Custo	1	1	1	1	1	1
			Quantidade (gerada)	33910	14104	14104	129	215	430
			Não atendidas	46	2	0	0	0	1
Exp04	inviável	-	Custo	hard	hard	1	1	1	1
			Quantidade (gerada)	33910	14104	14104	129	215	430
			Não atendidas	-	-	-	-	-	-
Exp05	1823	-	Custo	1	1	hard	hard	hard	hard
			Quantidade (gerada)	33910	14104	14104	129	215	430
			Não atendidas	49	0	-	-	-	-

Além dessa estratégia para tratar solicitações, destacamos como outra contribuição desse trabalho o tratamento proposto para as aulas geminadas. Aqui foram usadas restrições lógicas para tratar diferentes situações de aulas geminadas.

As funções de Custo Pedagógico e Custo Docente possibilitam a inclusão de preferências específicas quanto aos horários de aula e dias. Por exemplo, excluindo as solicitações de aulas geminadas, atribuíram-se custos para evitar que um professor tivesse mais de uma aula na mesma turma. Outra configuração que evitamos, demandada pelos alunos, foi que um professor desse aula na mesma turma em dias seguidos. Diferente dos custos pedagógicos e solicitações dos docentes, as aulas geminadas foram tratadas como restrições impositivas, pois a violação dessas pode comprometer a viabilidade das aulas, como, por exemplo, em situações de aulas de laboratório.

Dados as características do estudo de caso, considerando o grande número de professores, turmas e diversidade de cursos, os resultados numéricos demonstram que as solicitações pedagógicas e docentes podem gerar milhares de restrições. A combinação dessas restrições, em muitos casos torna o problema infactível, sendo inviável encontrar a combinação exata de restrições que leva a essa infactibilidade de solução. Assim, a solução proposta conseguiu gerar uma grade de horário maximizando o atendimento das solicitações da equipe pedagógica, docentes e alunos.

O problema da grade de horário escolar possui infindáveis variações de solicitações pedagógica e docentes. Aqui apresentamos algumas situações e uma estratégia de modelagem para maximizar o atendimento dessas solicitações. Porém, a generalização da formulação proposta flexibiliza a inserção de novas regras para atender diferentes cenários e demandas.

6. Agradecimento

Os autores agradecem a FAPES/UnAC (Nº FAPES 1228/2022 P 2022-CD0RQ, Nº SIAFEM 2022-CD0RQ) pelo apoio financeiro dado por meio do Sistema UniversidaES.

Referências

Amaral, P. e Pais, T. C. (2016). Compromise ratio with weighting functions in a tabu search multi-criteria approach to examination timetabling. *Computers & Operations Research*, 72:160–174.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br

Babaei, H., Karimpour, J., e Hadidi, A. (2015). A survey of approaches for university course timetabling problem. *Computers & Industrial Engineering*, 86:43–59. ISSN 0360-8352. Applications of Computational Intelligence and Fuzzy Logic to Manufacturing and Service Systems.

Bettinelli, A., Cacchiani, V., Roberti, R., e Toth, P. (2015). An overview of curriculum-based course timetabling. *Top*, 23:313–349.

Carter, M. W., Laporte, G., e Lee, S. Y. (1996). Examination timetabling: Algorithmic strategies and applications. *Journal of the operational research society*, 47:373–383.

Ceschia, S., Di Gaspero, L., e Schaerf, A. (2023). Educational timetabling: Problems, benchmarks, and state-of-the-art results. *European Journal of Operational Research*, 308(1):1–18.

Chen, M. C., Goh, S. L., Sabar, N. R., Kendall, G., et al. (2021). A survey of university course timetabling problem: perspectives, trends and opportunities. *IEEE Access*, 9:106515–106529.

Daskalaki, S., Birbas, T., e Housos, E. (2004). An integer programming formulation for a case study in university timetabling. *European journal of operational research*, 153(1):117–135.

Feizi-Derakhshi, M.-R., Babaei, H., e Heidarzadeh, J. (2012). A survey of approaches for university course timetabling problem. In *Proceedings of 8th international symposium on intelligent and manufacturing systems, Sakarya University Department of Industrial Engineering, Adrasan, Antalya, Turkey*, p. 307–321.

Fonseca, G. H., Santos, H. G., Carrano, E. G., e Stidsen, T. J. (2017). Integer programming techniques for educational timetabling. *European Journal of Operational Research*, 262(1):28–39. ISSN 0377-2217.

Kristiansen, S., Sørensen, M., e Stidsen, T. R. (2015). Integer programming for the generalized high school timetabling problem. *Journal of Scheduling*, 18:377–392.

Leite, N., Melício, F., e Rosa, A. C. (2019). A fast simulated annealing algorithm for the examination timetabling problem. *Expert systems with applications*, 122:137–151.

Schaerf, A. (1999). A survey of automated timetabling. *Artificial intelligence review*, 13:87–127.

Tan, J. S., Goh, S. L., Kendall, G., e Sabar, N. R. (2021). A survey of the state-of-the-art of optimisation methodologies in school timetabling problems. *Expert Systems with Applications*, 165:113943.

Tassopoulos, I. X., Iliopoulou, C. A., e Beligiannis, G. N. (2020). Solving the greek school timetabling problem by a mixed integer programming model. *Journal of the Operational Research Society*, 71(1):117–132.

Yusop, N. (2022). A systematic literature review: Optimization timetable in education to support work-life balance (wlb). *Journal of Computing Research and Innovation*, 7(2):316–326.

Zhang, D., Liu, Y., MHallah, R., e Leung, S. C. (2010). A simulated annealing with a new neighborhood structure based algorithm for high school timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 203(3):550–558. ISSN 0377-2217.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193641
https://proceedings.science/p/193641?lang=pt-br