LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

Sobre Grafos de Intervalo Representados como Interseções de Caminhos de Tamanho Unitário em Formato de ⌞

Kedson Alves Silva
Universidade Federal Fluminense
R. Passo da Pátria, 152-470 - São Domingos, Niterói, RJ, Brasil
alves_kedson@id.uff.br

Uéverton dos Santos Souza
Universidade Federal Fluminense
R. Passo da Pátria, 152-470 - São Domingos, Niterói, RJ, Brasil
ueverton@ic.uff.br

RESUMO

Os grafos EPG representam a classe de grafos de aresta-interseção de caminhos sobre uma grade, sendo EPG o acrônimo para "*Edge-intersection Paths on a Grid*". O estudo desses grafos teve início em 2009 e, desde então, foram obtidos diversos resultados sobre a complexidade do reconhecimento de suas subclasses. Os grafos ⌞-EPG constituem uma subclasse dos grafos EPG, na qual cada caminho pode assumir apenas o formato de "⌞", além dos segmentos "−" e "|". A complexidade do reconhecimento dessa subclasse foi demonstrada ser NP-completa, [Cameron et al., 2016]. Os grafos ⌞-EPG unitário constituem uma subclasse dos grafos ⌞-EPG, onde todos os segmentos dos caminhos possuem tamanho único. Neste artigo, além de definirmos a classe de grafos ⌞-EPG unitário, focamos na classe de grafos de intervalo, para a qual fornecemos uma caracterização por subgrafos proibidos para grafos de intervalo que são ⌞-EPG unitário.

PALAVRAS CHAVE. ⌞-EPG unitário, Caracterização por subgrafos proibidos, Complexidade computacional.

Tópicos (TAG – Teoria e Algoritmos em Grafos, OC – Otimização Combinatória)

ABSTRACT

The EPG graphs represent the class of edge-intersection graphs of paths on a grid. The study of these graphs began in 2009, and since then, several results have been obtained regarding the complexity of recognizing their subclasses. The ⌞-EPG graphs constitute a subclass of EPG graphs, in which each path can only assume the format of "⌞", in addition to the segments "−" and "|". The complexity of recognizing this subclass has been shown to be NP-complete [Cameron et al., 2016]. The unit ⌞-EPG graphs constitute a subclass of the ⌞-EPG graphs, where all segments of the paths have a unique size. In this article, besides defining the class of unit ⌞-EPG graphs, we focus on the interval graphs class, for which we provide a characterization by forbidden subgraphs for interval graphs that are unit ⌞-EPG.

KEYWORDS. Unit ⌞-EPG. Forbidden subgraph characterization. Computational complexity.

Paper topics (TAG – Theory and Algorithms in Graphs, OC– Combinatorial Optimization)

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

1. Introdução

Neste artigo, os grafos considerados são grafos simples, finitos e não direcionados, tipicamente representados por $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. Se existe uma aresta $xy \in E$, dizemos que os vértices $x, y \in V$ são *adjacentes*. A vizinhança aberta de um vértice v é denotada por $N(v)$ e corresponde ao conjunto de vértices adjacentes a ele. Por sua vez, a vizinhança fechada, conhecida como $N[v]$, pode ser definida como $N[v] = N(v) \cup v$. Dizemos que os vértices $x, y \in V$ são *gêmeos verdadeiros* se $N[x] = N[y]$. Uma *componente conexa* de um grafo é um subgrafo conexo maximal, ou seja, não está contido em nenhum outro subgrafo conexo, e onde há um caminho entre quaisquer dois vértices desse subgrafo. Um *vértice de corte* é um vértice no qual a sua remoção resulta no aumento do número de componentes conexas no grafo.

Nos demais termos utilizados no texto, adotamos uma notação padrão comumente empregada em trabalhos científicos. Por exemplo, C_n representa um grafo ciclo com n vértices. H_n representa um ciclo induzido (*hole*), com n vértices, onde $n \geq 4$. K_n indica um grafo completo ou clique com n vértices. Um grafo bipartido completo com partes de tamanho r e s é representado por $K_{r,s}$. Um conjunto independente com n vértices é representado por I_n. $G[N(v)]$ denota um subgrafo induzido pela vizinhança do vértice v. Por fim, uma *tripla asteroidal* em um grafo são três vértices distintos e não adjacentes dois a dois, onde existe um caminho entre cada par desses vértices que não passa a vizinhança do terceiro.

Os Grafos EPG foram definidos formalmente por Golumbic et al. [2009], e são um modelo de grafos de interseção de caminhos sobre uma grade, onde EPG é o acrônimo para *Edge-intersection Paths on a Grid*. Uma representação EPG de um grafo $G = (V, E)$ é denotada por $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$, onde $\mathcal{G}$ é uma grade retangular e P é um conjunto de caminhos em $\mathcal{G}$. Cada caminho $P_v \in P$ corresponde a um vértice $v \in V$, e dois caminhos $P_x, P_y \in P$ compartilham uma mesma aresta em $\mathcal{G}$ se, e somente se, existe uma aresta $xy \in E$. Quando ocorre esse compartilhamento de aresta, dizemos que os caminhos $P_x, P_y \in P$ se *aresta-intersectam*. Dizemos que um caminho $P_v \in P$ possui *dobra* se pelo menos dois segmentos consecutivos de P_v estão dispostos em direções distintas da grade. Chamamos simplesmente de *segmento* um caminho que não possui dobras. Um *segmento redundante* é um segmento que não aresta-intersecta nenhum caminho e não corresponde a um vértice isolado. Se todo caminho P_x de uma representação H possui no máximo k dobras, dizemos que H é uma representação B_k-EPG.

Dado um caminho P_v em uma representação EPG, definimos $point_l(P_v)$ como o ponto mais baixo e mais à esquerda da grade que está contido em P_v, $point_r(P_v)$ como o ponto mais baixo e mais à direita da grade que está contido em P_v, e $point_t(P_v)$ como o ponto mais alto e mais à esquerda da grade que está contido em P_v.

O estudo de grafos EPG é motivado não apenas pela aplicabilidade geral dos grafos, mas também pelo desenvolvimento de *layouts* de circuitos digitais e circuitos VLSI, [Sinden, 1966]. Nesse contexto, as representações EPG podem ser utilizadas na modelagem dos circuitos, onde a otimização de uma representação pode estar associada à otimização de uma placa durante o processo industrial.

As representações B_1-EPG possuem caminhos que são representados pelos seguintes formatos: "$\llcorner$", "$\lrcorner$", "$\ulcorner$", "$\urcorner$", "$-$", e "$|$". Os grafos S-EPG são uma subclasse dos grafos B_1-EPG, onde restringimos os formatos dos caminhos, e S pode ser um dos seguintes conjuntos: $\{\llcorner\}$, $\{\llcorner, \lrcorner\}$, $\{\llcorner, \urcorner\}$, $\{\llcorner, \lrcorner, \urcorner\}$, além de outras variações obtidas pela rotação desses caminhos em 90°, tornando-as redundantes. Todos os conjuntos também incluem segmentos no formato de "$-$", e "$|$". Os grafos S-EPG são abordados em vários trabalhos, como os de Cameron et al. [2016] e Epstein et al. [2020].

Quanto ao problema de reconhecimento dos grafos EPG, sabemos que a classe de gra-

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

fos B_0-EPG pode ser reconhecida em tempo polinomial, já que equivale aos grafos de intervalo [Lekkeikerker e Boland, 1962]. A classe B_1-EPG é de reconhecimento NP-Completo [Heldt et al., 2014], assim como a classe B_2-EPG [Pergel e Rzażewski, 2017]. Por fim, Cameron et al. [2016] demonstrou que é NP-completo reconhecer grafos S-EPG para todo $S \in \{\{\llcorner\}, \{\llcorner, \lrcorner\}, \{\llcorner, \urcorner\}, \{\llcorner, \lrcorner, \urcorner\}\}$.

Com este trabalho, nosso objetivo é direcionar o foco para uma subclasse específica de grafos $\llcorner$-EPG ($\{\llcorner\}$-EPG), denominada $\llcorner$-EPG unitário (ver Definição 1), onde realizamos uma análise sobre a caracterização desses grafos através de subgrafos proibidos para determinadas classes específicas de grafos.

2. Resultados Preliminares

Nesta seção, apresentamos a definição dos grafos $\llcorner$-EPG unitário, juntamente com algumas características fundamentais que serão consideradas neste trabalho. Além disso, demonstramos resultados mais gerais para tais representações.

Definição 1. *(Grafos $\llcorner$-EPG unitário). Seja G um grafo. G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário se, e somente se, G possui uma representação $\llcorner$-EPG $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$, onde para todo $P_i, P_j \in P$, P_i e P_j possuem segmentos de mesmo tamanho.*

Definição 2. *(Caminhos Gêmeos). Seja $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ uma representação $\llcorner$-EPG unitária de um grafo G. Dois caminhos $P_i, P_j \in P$ são considerados gêmeos se possuem o mesmo número de segmentos e se tais segmentos ocupam as mesmas posições em $\mathcal{G}$.*

Definição 3. *(Caminhos Quase-Gêmeos). Seja $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ uma representação $\llcorner$-EPG unitária de um grafo G. Dois caminhos $P_i, P_j \in P$ são considerados quase-gêmeos se P_i é um caminho que possui dobra, enquanto P_j é um caminho que não possui dobra (ou seja, é um segmento). Além disso, P_j está posicionado exatamente sobre as mesmas arestas da grade onde o segmento de P_i de mesmo sentido está posicionado.*

Lema 4. *Seja $G = (V, E)$ um grafo e $x, y \in V$ dois vértices gêmeos verdadeiros em G. Se os subgrafos $G - x$ ou $G - y$ são $\llcorner$-EPG unitários, então G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, supomos que exista uma representação $\llcorner$-EPG unitária de $G - x$. Dado que os vértices x e y possuem a mesma vizinhança, podemos representar o caminho equivalente ao vértice x sobre as mesmas arestas da grade em que o caminho P_y está disposto. Portanto, concluímos que G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário. □

Observação 5. *Dada uma representação $\llcorner$-EPG unitária $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ de um grafo G, se existem dois caminhos $P_i, P_j \in P$, onde P_i e P_j são gêmeos, então seus respectivos vértices $v_i, v_j \in V(G)$ são gêmeos verdadeiros. Além disso, se G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário e $v_x, v_y \in V(G)$ são gêmeos verdadeiros, então existe pelo menos uma representação $\llcorner$-EPG unitária na qual P_x e P_y são gêmeos.*

A partir deste ponto, sempre que mencionarmos um grafo em nossos resultados, estaremos nos referindo a um grafo livre de vértices gêmeos verdadeiros. Da mesma forma, quando nos referirmos a uma representação $\llcorner$-EPG unitária, considere que estamos tratando de uma representação livre de caminhos gêmeos e quase-gêmeos. Mostramos no Lema 9 que se existe uma representação $\llcorner$-EPG unitária, então existe uma representação livre de caminhos quase-gêmeos.

Antes de prosseguirmos, apresentamos alguns resultados da literatura considerados em nossos estudos. Asinowski e Ries [2012] demonstraram, para os grafos B_1-EPG, os resultados apresentados nos Lemas 6 e 7. De maneira similar, o resultado do Observação 8 foi estabelecido por

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

Cameron et al. [2016] para grafos ⌞-EPG. Considerando que os grafos EPG possuem a propriedade de hereditariedade, concluímos que esses resultados também se aplicam aos grafos ⌞-EPG unitário. Considere o grafo $4 - wheel$ ($4 - roda$) como um grafo formado por um ciclo de tamanho quatro, com um vértice adicional adjacente a todos os vértices do ciclo.

Lema 6. *(Asinowski e Ries [2012]). Seja G um grafo B_1-EPG. Então $G[N(v)]$ é livre de tripla asteroidal, para todo $v \in V(G)$.*

Lema 7. *(Asinowski e Ries [2012]). Seja G um grafo B_1-EPG. Então $G[N(v)]$ não contém H_k, $k \geq 5$, para todo $v \in V(G)$.*

Observação 8. *(Cameron et al. [2016]). 4-wheel está em $[\llcorner, \ulcorner, \urcorner]$, mas não está em $[\llcorner, \ulcorner]$ ou $[\llcorner, \urcorner]$.*

Em 1962, Lekkeikerker e Boland forneceram uma caracterização por meio de subgrafos proibidos para grafos de intervalo, cujas estruturas estão representadas na Figura 1. Algumas dessas estruturas são essenciais em nossas demonstrações, portanto, familiarizar-se com elas é crucial para uma compreensão completa do nosso trabalho. É importante destacar que o grafo *2 net* é comumente referido apenas como *net*, enquanto o grafo *3 tent* é chamado de *3-sun*.

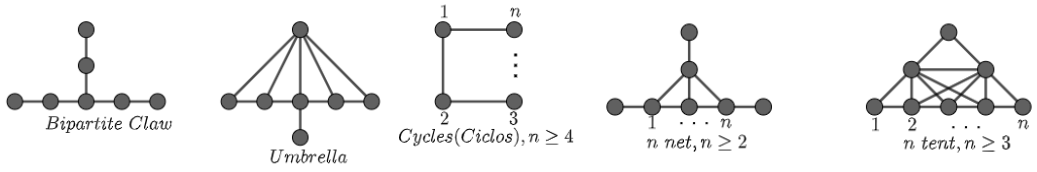


Figura 1: Estruturas proibidas para grafos de intervalo.

Lema 9. *Seja $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ uma representação ⌞-EPG unitária de um grafo G. Se H contém caminhos que são quase-gêmeos, então existe uma outra representação ⌞-EPG unitária H' de G tal que nenhum caminho em H' é quase-gêmeo de outro.*

Demonstração. Dada a representação ⌞-EPG unitária H, seja $P_i \in P$ um caminho horizontal sem dobras quase-gêmeo, com i sendo o $point_l(P_i)$. Denotamos por c_i a coluna da grade em que i está localizado. Adicionamos novas linhas/colunas entre às já existentes na grade de representação, dobrando o número de linhas e colunas da grade. Para todo caminho $P_j \in P$, onde j está à esquerda de i, mova P_j uma coluna para a esquerda na nova grade. Dessa forma, nenhum caminho P_k da representação possui $point_r(P_k)$ sobre a coluna c_i, assim como nenhum caminho $P_{k'}$ possui $point_l(P_{k'})$ sobre a coluna à esquerda de c_i. Consequentemente, podemos mover o caminho P_i uma coluna para a esquerda na nova grade, removendo assim sua condição de quase-gêmeo.

Observe que nenhum novo caminho é criado, nenhum caminho é removido, e nenhum caminho se move mais do que uma unidade na nova grade. Como uma unidade na grade anterior corresponde a duas unidades na nova grade, todos os caminhos que se aresta-intersectavam antes desta operação ainda se aresta-intersectam, pois os movimentos foram de uma unidade da grade e as aresta-interseções eram de pelo menos duas unidades da grade. Além disso, nenhum caminho realiza uma nova aresta-interseção, já que todos os caminhos que foram movidos se deslocaram a mesma quantidade de unidades da grade. Portanto, a nova representação continua representando o mesmo grafo.

Repita essas operações enquanto existirem quase-gêmeos horizontais. O caso de quase-gêmeos verticais pode ser resolvido de modo similar. Seja H' a representação resultante após a eliminação de todos os caminhos quase-gêmeos. Podemos concluir que H' ainda é uma ⌞-EPG unitária de G, livre de quase-gêmeos, e é equivalente a H, encerrando assim a prova. □

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

Corolário 10. *Se G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário, então $G[N(v)]$ é um subgrafo de intervalo, para todo $v \in V(G)$.*

Demonstração. Os resultados dos Lemas 6 e 7, juntamente com a Observação 8, são aplicáveis aos grafos $\llcorner$-EPG e, portanto, podem ser estendidos aos grafos $\llcorner$-EPG unitário. Como consequência, podemos afirmar que $G[N(v)]$ é livre de tripla asteroidal e não contém ciclo induzido H_k como subgrafo, para $k \geq 4$. Isso implica que $G[N(v)]$ é cordal e livre de tripla asteroidal, o que confere a ele a propriedade de ser um grafo de intervalo [Lekkeikerker e Boland, 1962]. □

Lema 11. *Dado um grafo G livre de vértices gêmeos-verdadeiros, um vértice $v \in V(G)$, e uma componente conexa Q de $G[N(v)]$. Se $G \in \llcorner$-EPG unitário, então, em toda representação $\llcorner$-EPG unitária $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ de G, os caminhos que representam os vértices de Q aresta-intersectam o mesmo segmento de P_v.*

Demonstração. Suponha, para efeito de contradição, que exista uma representação $\llcorner$-EPG unitária H onde há caminhos que representam os vértices de Q aresta-intersectando P_v em seu segmento vertical e outros em seu segmento horizontal. Como Q é conexo, devem existir pelo menos dois caminhos P_x e P_y que representam dois vértices adjacentes $x, y \in Q$, onde P_x aresta-intersecta o segmento horizontal de P_v, enquanto P_y aresta-intersecta o segmento vertical de P_v. Note que, para P_x e P_y compartilharem uma mesma aresta da grade, eles devem ter o mesmo ponto de dobra, o que implicaria que representam vértices gêmeos-verdadeiros. Isso contradiz o fato de que o grafo considerado é livre de vértices gêmeos-verdadeiros.

□

Corolário 12. *Dada uma representação $\llcorner$-EPG unitária H de um grafo cordal G, livre de segmentos redundantes, e um caminho P_x nessa representação, se P_x contém uma dobra, então o vértice $x \in V(G)$, representado por P_x em H, é um vértice de corte em G.*

Demonstração. Como P_x dobra, então existe pelo menos um caminho P_v que aresta-intersecta P_x em seu segmento vertical, e existe um caminho P_h que aresta-intersecta P_x em seu segmento horizontal. Suponha que x não seja um vértice de corte. Logo, há um caminho mínimo entre v e h (os vértices representados por P_v e P_h em H, respectivamente) que não passa por x. Como G é cordal, todos os vértices desse caminho mínimo devem ser adjacentes a x. Isso levaria a uma contradição, pois os vértices desse caminho mínimo formariam uma componente conexa na vizinhança de x. Assim, pelo Lema 11, P_v e P_h deveriam aresta-intersectar o mesmo segmento de P_x. □

Corolário 13. *Dado um grafo G e um vértice $v \in V(G)$ que contenha um conjunto S em sua vizinhança que induz um I_3. Se G pertence à classe $\llcorner$-EPG unitária, então o vértice v é um vértice de corte de G, onde os vértices de S estão em pelo menos duas componentes conexas distintas de $G[N(v)]$.*

Demonstração. Seja P_v o caminho em uma representação $\llcorner$-EPG unitária de G, livre de segmentos redundantes, onde P_v representa o vértice v. Suponhamos que v não seja um vértice de corte. Então, pelo Corolário 12, sabemos que P_v não dobra. Conforme o Corolário 10, a subrepresentação formada pelos segmento que aresta-intersectam P_v constitui uma representação de intervalo. Portanto, ao adicionar P_v a este conjunto, ainda temos uma representação de intervalo. Como todos os caminhos possuem o mesmo tamanho, essa representação é uma representação de intervalo unitário, o que contradiz a propriedade de que grafos de intervalo unitário são livres de $K_{1,3}$ [Roberts, 1969].

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

Portanto, se v possui um I_3 em sua vizinhança, então P_v precisa dobrar, representando um vértice de corte, além disso, a remoção de v divide S em pelo menos duas componentes de G.

□

O lema a seguir reveste-se de grande importância para a demonstração de nossos resultados, tanto pela liberdade que proporciona na manipulação de uma representação ⌞-EPG unitária, quanto pelo método empregado em sua prova, o qual se revelou de considerável utilidade.

Lema 14. *Seja G um grafo conexo ⌞-EPG unitário. Existe uma representação H de G onde, para cada linha/coluna l de H, o grafo induzido pelos vértices representados por caminhos com arestas em l é um subgrafo conexo de G.*

Demonstração. Considere H como uma representação ⌞-EPG unitária de G que não satisfaz essa característica. Para demonstrar o lema, vamos construir uma nova representação ⌞-EPG unitária, denotada por H'. Começaremos inserindo um caminho P_v presente em H na grade de representação de H'. Sem perda de generalidade, assumimos que P_v tem um segmento sobre a linha l em H, e definimos l' como a linha em H' onde o segmento correspondente de P_v é posicionado.

Identificamos o conjunto F que contém os caminhos de H que possuem um segmento sobre l, e que os vértices representados por $F \cup P_v$ induzem um subgrafo conexo. Então, adicionamos os caminhos de F em H' sobre a linha l', preservando suas posições relativas em H. Adicionalmente, os caminhos que aresta-intersectam P_v em H' devem compartilhar com ele a mesma proporção de arestas da grade que compartilham em H. Procedemos duplicando o número de linhas e colunas na grade de H', adicionando uma nova linha/coluna entre cada par já existente. Isso significa que os caminhos em H' terão agora o dobro de arestas em comparação com H.

Em seguida, deslocamos uma coluna para a esquerda na nova grade de H' todos os caminhos $P_k \in F$ que possuem $point_l(P_k)$ situado à esquerda de $point_r(P_v)$. Para os caminhos de F que não atendem a esse critério, duplicamos novamente o número de linhas e colunas da grade de H', adicionando uma nova linha/coluna entre cada par já existente. Em seguida, deslocamos esses caminhos uma coluna para a direita na nova grade.

Perceba que devido à adição de novas linhas/colunas na grade, as aresta-interseções são conservadas. Além disso, observe que todos os segmentos verticais dos caminhos de F são posicionados, ao final da operação, sobre colunas que não existiam na grade original onde foram inicialmente inseridos.

Continuamos selecionando um caminho $P_{v'}$ já inserido em H', que possui algum caminho que o aresta-intersecta em H que ainda não foi inserido em H'. Repetimos o procedimento selecionando o conjunto F' dos caminhos de H que possuem segmento sobre a coluna onde o segmento vertical de $P_{v'}$ está posicionado e que os vértices representados por $F' \cup P_{v'}$ induzem um subgrafo conexo. Realizamos as operações definidas adicionando os caminhos de F' em H' na coluna da grade em que $P_{v'}$ possui seu segmento vertical, com o mesmo tamanho dos caminhos já inseridos e mantendo as aresta-interseções proporcionais às de H. No entanto, modificamos as movimentações dos caminhos após a duplicação de linhas/colunas da grade, deslocando os caminhos $P_{k'} \in F'$ em que $point_t(P_{k'})$ está acima de $point_l(P_{v'})$ uma unidade na nova grade para cima, e os demais caminhos uma unidade na nova grade para baixo após a segunda duplicação de linhas/colunas da grade. Perceba que podemos continuar com esse processo enquanto ainda houver caminhos em H que não foram inseridos em H'.

Após concluir as operações, podemos verificar que todos os caminhos assumiram a forma de "⌞". Nenhuma nova aresta-interseção foi criada durante a adição dos caminhos, pois ao adicioná-los, eles apenas aresta-intersectam os mesmos caminhos que aresta-intersectavam em H. Além

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

disso, todas as aresta-interseções de H são contempladas em H': para todo caminho inserido em H', todos os caminhos que aresta-intersectam um de seus segmento já são adicionados juntamente a ele (exceto no primeiro caminho, onde isso ocorre na próxima operação). Portanto, se um caminho adicionado tem uma dobra, então ele representa um vértice de corte. Consequentemente, em uma operação futura, todos os caminhos que aresta-intersectam seu outro segmento são adicionados. Assim, podemos concluir que H e H' são representações equivalentes.

Para finalizar, demonstraremos que após a adição de todos os caminhos, H' satisfaz a característica desejada. Supomos por contradição que em H' existe uma linha l_1 e dois conjuntos de caminhos F_1 e F_2, onde todos os caminhos desses conjuntos possuem segmentos sobre l_1. Além disso, os vértices representados pelos caminhos de F_1 induzem um subgrafo conexo, assim como os vértices representados pelos caminhos de F_2. No entanto, a união dos conjuntos de vértices representados pelos caminhos de $F_1 \cup F_2$ não induz um subgrafo conexo.

Digamos que o primeiro caminho pertencente a $F_1 \cup F_2$ adicionado sobre a linha l_1 pertence ao conjunto F_1, e seja P_{F_2} o primeiro caminho do conjunto F_2 adicionado a H'. Ora, se os vértices representados pelos caminhos de $F_1 \cup P_{F_2}$ não induzem um subgrafo conexo, então, quando P_{F_2} foi inserido em H', ele aresta-intersectou um caminho em seu segmento vertical, o que contradiz a construção. De acordo com a construção, quando P_{F_2} foi adicionado, seu segmento horizontal deveria ter sido posicionado sobre uma linha de H' adicionada uma operação antes, logo não pode existir outro caminho com segmento sobre ela. Concluímos assim nossa prova. □

3. Grafos de Intervalo ⌞-EPG unitário

Nesta seção, exploraremos os grafos de intervalo, uma classe especial de grafos cordais caracterizados pela ausência de tripla asteroidal [Lekkeikerker e Boland, 1962]. Para isso, considere P_5 como um caminho induzido de cinco vértices e um *touro* como um subgrafo induzido representado por um ciclo de três vértices com dois vértices adicionais, cada um dos quais conectado a exatamente um vértice diferente do ciclo.

Lema 15. *Seja G um grafo de intervalo conexo. Se G contém $I_3 = \{v_1, v_2, v_3\}$ como subgrafo induzido, então G também contém P_5, $K_{1,3}$, ou touro como subgrafo induzido.*

Demonstração. Este lema pode ser observado de forma direta. Considere um I_3 minimalmente conexo, definido como um subgrafo induzido conexo que contém o I_3 e é minimal, ou seja, não contém outro conjunto independente de tamanho três como subgrafo induzido. Consideramos então uma representação de intervalo de G em uma reta r. Sem perda de generalidade, assumimos a ordem dos intervalos representando os vértices do I_3 da esquerda para a direita como S_{v_1}, S_{v_2} e S_{v_3}. Dado que S_{v_1} e S_{v_2} são conexos, então há um caminho mínimo entre esses dois intervalos. Como tal caminho é mínimo, então é composto por exatamente um intervalo, que denominamos S_{c_1}. Além disso, S_{v_2} e S_{v_3} também são conexos, implicando na existência de um intervalo S_{c_2} que conecta S_{v_2} a S_{v_3}. Nota-se que se S_{c_1} for igual a S_{c_2}, então há um $K_{1,3}$ induzido. Se forem diferentes e não compartilharem um ponto na reta r, temos um P_5 como subgrafo induzido. Por fim, se forem diferentes mas compartilharem um ponto na reta r, teremos um *touro* como subgrafo induzido. □

Lema 16. *$K_{1,5} \notin$ grafos ⌞-EPG unitário.*

Demonstração. Seja $K_{1,5}$ o grafo formado pelos vértices a, b, c, d, e adjacentes ao vértice universal v. Em uma representação ⌞-EPG unitária, P_v deveria ser formado por no máximo dois segmentos, um horizontal e um vertical. Supondo por contradição que $K_{1,5} \in$ grafos ⌞-EPG unitário. Pelo princípio da casa dos pombos, deve existir pelo menos um segmento de P_v (sem perda de

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

generalidade, consideremos o segmento horizontal) que aresta-intersecta pelo menos três caminhos representando três vértices do conjunto independente, digamos P_a, P_b e P_c. Podemos observar que os segmentos horizontais de P_v, P_a, P_b e P_c devem estar sobre a mesma linha da grade de representação. Além disso, como a representação deve ser unitária, todos os segmentos devem possuir o mesmo tamanho, o que implicaria em uma subrepresentação de intervalo unitário. Contradição. Os vértices v, a, b e c induzem um $K_{1,3}$ e os grafos de intervalo unitário são grafos de intervalo livres de $K_{1,3}$ [Roberts, 1969]. Logo, $K_{1,5} \notin$ grafos $\llcorner$-EPG unitário. □

Lema 17. *Seja G um grafo. Se G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário, então $G[N(v)]$ não possui $K_{1,3}$, P_5 ou touro como subgrafo induzido, para todo $v \in V(G)$.*

Demonstração. Supomos, por contradição, que $G \in \llcorner$-EPG unitário e que existe um vértice $v \in V(G)$ tal que $G[N(v)]$ possua um $K_{1,3}$, um P_5 ou um *touro* induzido. Pelo Lema 11, como essas estruturas são conexas, os respectivos caminhos que representam seus vértices devem intersectar o mesmo segmento de P_v, o que resulta em uma contradição. Tais estruturas possuem um I_3 induzido, e, como mostrado no Lema 16, é impossível representá-lo sobre o mesmo segmento de P_v. □

O lema a seguir desempenha um papel crucial na estrutura lógica de nossas demonstrações, assegurando que cada etapa do raciocínio esteja solidamente fundamentada.

Lema 18. *Seja G um grafo cordal livre de net. Se G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário e contém um vértice v tal que $N(v)$ é livre de I_3, então existe uma representação $\llcorner$-EPG unitária de G, tal que P_v não dobra.*

Demonstração. Considere $H = \langle \mathcal{G}, P \rangle$ uma representação $\llcorner$-EPG unitária de G, livre de segmentos redundantes, na qual o caminho P_v dobra. Em virtude da dobra em P_v, existem dois conjuntos disjuntos de caminhos, $K_1, K_2 \in P$, onde K_1 são os caminhos que aresta-intersectam P_v em seu segmento vertical, enquanto K_2 são os caminhos que aresta-intersectam P_v em seu segmento horizontal. É importante relembrar que, como $N(v)$ não contém I_3, os vértices representados por K_1 induzem uma clique, assim como os vértices representados por K_2. Além disso, não pode existir três componentes conexas no subgrafo induzido pela vizinhança de v.

Conforme o Corolário 12, é possível afirmar que P_v é um caminho que representa um vértice de corte. Isso implica que a operação $H \setminus P_v$ resulta na divisão dos caminhos de H em uma componente C_1, onde $C_1 \supseteq K_1$, e outra componente C_2, onde $C_2 \supseteq K_2$.

Em H, seja L_1 o conjunto de todos os caminhos que possuem um segmento sobre a coluna da grade em que o segmento vertical de P_v está posicionado, e seja L_2 o conjunto de todos os caminhos que possuem um segmento sobre a linha da grade em que o segmento horizontal de P_v está posicionado. Considere também a propriedade estabelecida pelo Lema 14, que afirma que existe uma representação $\llcorner$-EPG unitária de G onde, dada uma linha/coluna da grade, o subgrafo induzido pelos vértices representados pelos caminhos que possuem segmento sobre essa linha/coluna é um subgrafo conexo. Assumimos que H satisfaz tal propriedade.

Os caminhos de L_1 que se aresta-intersectam compartilham arestas apenas sobre a linha da grade em que o segmento vertical de P_v está posicionado, uma vez que possuem no máximo uma dobra. Portanto, os vértices de G representados pelos caminhos de $L_1 \cup P_v$ induzem um subgrafo de intervalo unitário, visto que a subrepresentação $\llcorner$-EPG unitária livre de segmentos redundantes induzida por $L_1 \cup P_v$ forma uma representação de intervalo unitário. O mesmo pode ser dito para os vértices representados pelos caminhos de $L_2 \cup P_v$.

Dessa forma, podemos fazer a seguinte afirmação:

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

Afirmação 19. *Os vértices de G representados por $L_1 \cup L_2 \cup P_v$ induzem um subgrafo de intervalo unitário.*

Para mostrarmos que essa afirmação é verdadeira, sejam V_v os vértices de G representados por L_1 e V_h os vértices de G representados por L_2. Perceba que os subgrafos induzidos por $V_v \cup v$ e $V_h \cup v$ são livres de $K_{1,3}$, já que são subgrafos de intervalo unitário. Seja G_s o subgrafo induzido por $V_v \cup V_h \cup v$. Logo, G_s também é livre de $K_{1,3}$, visto que v é um vértice de corte e $N(v)$ é livre de I_3. Para mostrarmos que G_s é um subgrafo de intervalo, provaremos que não existe nenhuma estrutura proibida para grafos de intervalo neste subgrafo, ver Figura 1. Suponhamos que alguma dessas estruturas exista. Como os subgrafos induzidos por $V_v \cup v$ e $V_h \cup v$ são livres dessas estruturas e v é o vértice que une esses dois subgrafos em G_s, então v deve fazer parte dessa estrutura. Logo, como *ciclos* e *n-tents* não possuem vértices de corte, então não podem ser a estrutura proibida. O único vértice de corte na estrutura *umbrella* possui I_3 em sua vizinhança, portanto essa estrutura também não pode existir em G_s. Diante disto, as únicas estruturas proibidas que poderiam existir são a *bipartite claw* ou a *n-net*, para $n \geq 3$. Porém, podemos observar que se v fosse um vértice de corte de alguma dessas estruturas, como $N(v)$ é livre de I_3, então em $V_v \cup v$ ou $V_h \cup v$ existiria um $K_{1,3}$. Dessa forma, concluímos que nenhuma dessas estruturas pode existir em G_s, logo G_s é um subgrafo de intervalo. Como G_s também é livre de $K_{1,3}$, então G_s é um subgrafo de intervalo unitário.

Seja H_{C_1} a subrepresentação $\llcorner$-EPG unitária induzida pelos caminhos de C_1 e H_{C_2} a subrepresentação $\llcorner$-EPG unitária induzida pelos caminhos de C_2. Modificaremos os caminhos de H_{C_1} de forma que seus segmentos verticais se tornem horizontais e os segmentos horizontais se tornem verticais. Para isso, selecionamos todos os caminhos de H_{C_1} e os giramos em $90°$ no sentido horário, em seguida, refletimos toda a subrepresentação H_{C_1} verticalmente. Observe que todos os caminhos que possuem dobras estão novamente no formato de "$\llcorner$". Os segmentos dos caminhos de K_1 que aresta-intersectam P_v em H possuem agora orientação horizontal (ver Figura 2).

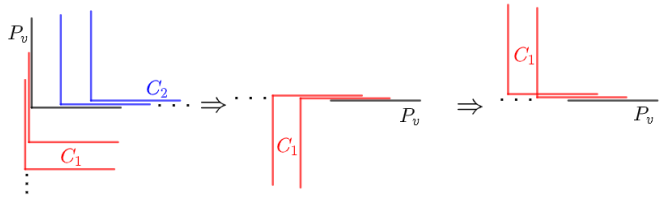


Figura 2: Movimentação da componente C_1.

A seguir, construiremos uma representação $\llcorner$-EPG unitária H' equivalente a H da seguinte maneira: Considere o subgrafo de intervalo unitário induzido pelos vértices representados pelos caminhos de $L_1 \cup L_2 \cup P_v$. Iniciamos adicionando uma representação $\llcorner$-EPG unitária desse subgrafo em H', onde todos os caminhos são representados como segmentos horizontais, e tal representação logicamente existe. Perceba que, para todos os caminhos já adicionados em H' que possuem dobras em H, os caminhos que o aresta-intersectam em H_{C_1} (após as operações mencionadas anteriormente) e H_{C_2} têm seus segmentos horizontais já representados em H'. Logo, podemos inserir os caminhos ainda não representados de H_{C_1} e H_{C_2} seguindo o mesmo método apresentado na prova do Lema 14, pois, se algum caminho na subrepresentação induzida por $L_1 \cup L_2 \cup P_v$ dobra, então ele representa um vértice de corte. Portanto, a aplicação do método mencionado é possível. Como todos os caminhos que aresta-intersectavam P_v foram inseridos inicialmente, concluímos que, ao final da construção de H', P_v não dobra, o que encerra nossa prova. □

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

Teorema 20. *Seja G um grafo de intervalo conexo. Se $G[N(v)]$ é livre de I_5, $K_{1,3}$, P_5 e touro como subgrafo induzido para todo $v \in V(G)$, então G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário.*

Demonstração. Nossa prova será por indução em relação a k, onde k é o número de subgrafos induzidos $K_{1,3}$ em G. Chamaremos os $K_{1,3}$ de *claws*.

Base da indução: Se $k = 0$, então G é um grafo de intervalo unitário [Roberts, 1969], portanto G é um grafo $\llcorner$-EPG unitário.

Hipótese de indução: Por hipótese, o enunciado é válido para todo $k' \leq k$. Portanto, se G possui no máximo k *claws*, então G é $\llcorner$-EPG unitário.

Passo indutivo: Seja G um grafo que possui $k+1$ *claws*. Selecionamos a primeira *claw* $C \in G$ com vértice central v e identificamos as componentes conexas na vizinhança de v. Pelo Lema 15, sabemos que a vizinhança de v não é conexa, caso contrário, teríamos um $K_{1,3}$, um P_5, ou um *touro* na vizinhança de v. Assim, v é um vértice de corte e sua vizinhança é dividida em pelo menos duas componentes conexas e, no máximo quatro, já que não existe $K_{1,5}$ em G, e cada componente é livre de I_3. Dividiremos agora G em dois subgrafos G' e G'' de acordo com os seguintes casos (ver também Figure 3):

- Se a vizinhança de v pode ser dividida em duas componentes conexas disjuntas, então, com a remoção de v, os vértices de G podem ser particionados em duas componentes conexas disjuntas, C_1 e C_2, cada uma contendo uma das componentes conexas da vizinhança de v. Assim, G' será formado por $v \cup C_1$, enquanto G'' por $v \cup C_2$.
- Se a vizinhança de v pode ser dividida em três componentes conexas disjuntas, então, com a remoção de v, os vértices de G podem ser particionados em três componentes conexas disjuntas, C_1, C_2 e C_3, cada uma contendo uma das componentes conexas da vizinhança de v. Se alguma dessas componentes vizinhas de v possuir um I_2 como subgrafo induzido, assumimos que ela esteja na componente C_3, então G' será formado por $v \cup C_3$, e G'' será formado por $v \cup C_1 \cup C_2$. Caso nenhuma das componentes possua um I_2, então a divisão permanece a mesma.
- Se a vizinhança de v pode ser dividida em quatro componentes conexas disjuntas, então, com a remoção de v, os vértices de G podem ser particionados em quatro componentes conexas disjuntas, C_1, C_2, C_3 e C_4, cada uma contendo uma das componentes conexas da vizinhança de v. G' será formado por $v \cup C_1 \cup C_2$ e G'' por $v \cup C_3 \cup C_4$.

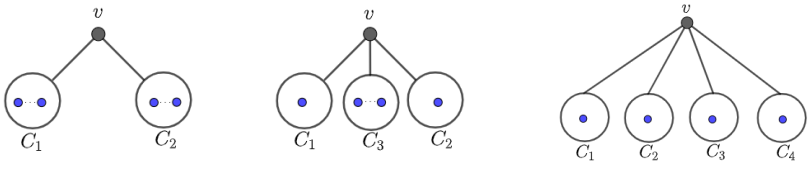


Figura 3: Possíveis casos da vizinhança de v.

Perceba que dividimos G em dois subgrafos, onde cada um possui menos de $k+1$ *claws*, já que tanto G' quanto G'' são subgrafos induzidos de G nos quais não existe a *claw* com o vértice central v. Assim, pela hipótese de indução, G' e G'' são $\llcorner$-EPG unitário. Seja H' a representação $\llcorner$-EPG unitária de G' e H'' a representação $\llcorner$-EPG unitária de G''. Podemos notar que tanto em G'

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

quanto em G'', v não possui um I_3 em sua vizinhança. Assim, de acordo com o Lema 18, presumimos que tanto em H' quanto em H'', P_v não dobra. Portanto, utilizando a mesma abordagem para provar o Lema 14, podemos combinar H' e H'' adicionando uma dobra, por exemplo, em $P_v \in H'$ e, posteriormente, adicionando os demais caminhos de H''. Isso conclui nossa prova.

□

3.1. Grafos com Vértice Universal ⌞-EPG unitário

Com o resultado demonstrado anteriormente, podemos definir os grafos com vértice universal ⌞-EPG unitário da seguinte forma:

Corolário 21. *Seja G um grafo com vértice universal v. Se $G[N(v)]$ é livre de C_4, C_5, I_5, $K_{1,3}$, P_5 e touro como subgrafo induzido, então G é um grafo ⌞-EPG unitário.*

Demonstração. Analisando o trabalho de Lekkeikerker e Boland [1962], concluímos que todas as estruturas proibidas para grafos de intervalo possuem *ciclos*, P_5, $K_{1,3}$ ou *touro* como subgrafo induzido (ver Figura 1). Diante disso, concluímos que $G[N(v)]$ é livre de todas as estruturas proibidas para grafos de intervalo, já que é livre de C_4, C_5, I_5, $K_{1,3}$, P_5 e *touro*. Portanto, $G[N(v)]$ é um subgrafo de intervalo. Como v é adjacente a todos os demais vértices do grafo, G também é um grafo de intervalo. Isso pode ser facilmente verificado ao analisar uma representação de intervalo de $G[N(x)]$ e, em seguida, adicionar um intervalo representando o vértice v que cobre todos os demais intervalos. Assim, G é um grafo de intervalo conexo onde $G[N(x)]$ é livre de I_5, $K_{1,3}$, P_5 e *touro* para todo $x \in V(G)$. Portanto, pelo Teorema 20, G é um grafo ⌞-EPG unitário. □

4. Árvores ⌞-EPG unitário

Nesta seção, abordamos a classe dos grafos árvore, definidos como grafos conexos e acíclicos. Para isso, considere a estrutura *bipartite claw* representada na Figura 1. A seguir, apresentamos uma caracterização por meio de subgrafos proibidos para grafos árvore ⌞-EPG unitário.

Teorema 22. *Seja G uma árvore. Se G é livre de $K_{1,5}$, então $G \in$ ⌞-EPG unitário.*

Demonstração. Provaremos este resultado por indução no valor de n, onde n é o número de *bipartite claws* induzidas em G.

Base da indução: Se $n = 0$, então G é um grafo de intervalo, pois G é cordal e, concluímos do trabalho de Lekkeikerker e Boland [1962], que o único subgrafo proibido para grafos de intervalo que G poderia ter é *bipartite claw*, por definição. Consequentemente, por G ser uma árvore livre de $K_{1,5}$, $G[N(v)]$ é livre de I_5, $K_{1,3}$, P_5 e *touro* como subgrafo induzido para todo $v \in V(G)$. Portanto, pelo Teorema 20, $G \in$ ⌞-EPG unitário.

Hipótese de indução: Por hipótese, o enunciado é válido para todo $n' \leq n$. Portanto, se G possui no máximo n *bipartite claws*, então G é ⌞-EPG unitário.

Passo indutivo: Seja G árvore com $n+1$ *bipartite claws*. Dividiremos G em dois subgrafos G' e G'' de forma que tanto G' quanto G'' possuam, no máximo, n *bipartite claws*. Seja B_c a primeira *bipartite claw* de G e seja x o vértice com três vizinhos nessa *bipartite claw*. Note que x é um vértice de corte (já que G é uma árvore), portanto, sua remoção divide G em pelo menos três componentes conexas (e no máximo quatro, já que não existe $K_{1,5}$ em G), digamos as componentes C_1, C_2 e C_3, cada uma contendo dois vértices de B_c.

Definimos G' como sendo formado por $x \cup C_1 \cup C_2$ e G'' como sendo formado por $x \cup C_3$. Se existir uma quarta componente C_4 em $G - x$, então G'' será formado por $x \cup C_3 \cup C_4$. Como B_c foi dividido em duas partes, assim como G, pela hipótese G' e G'' são ⌞-EPG unitário, pois

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en

possuem no máximo n *bipartite claws* cada, já que tanto G' quanto G'' são subgrafos induzidos de G nos quais não existe uma *bipartite claw* com o vértice central x.

Seja H' a representação $\llcorner$-EPG unitária de G' e H'' a representação $\llcorner$-EPG unitária de G'', mostraremos agora que é possível unir H' e H'', criando uma representação $\llcorner$-EPG unitária do grafo G, denominada H. Observamos que G é cordal e livre de *net*, portanto, pelo Lema 18, podemos assumir que, tanto em H' quanto em H'', o caminho P_x não dobra. Logo, H pode ser criada a partir de H', onde adicionamos uma dobra em P_x e, como feito na prova do Lema 14, adicionamos os demais caminhos de H'', o que conclui nossa prova. □

5. Conclusões e Agradecimentos

Neste trabalho, definimos a classe de grafos $\llcorner$-EPG unitário e apresentamos resultados gerais sobre as características das representações $\llcorner$-EPG unitária desses grafos. Além disso, fornecemos uma caracterização por subgrafo proibido para: grafos de intervalo $\llcorner$-EPG unitário, grafos com vértice universal $\llcorner$-EPG unitário e árvores $\llcorner$-EPG unitário. Nossas caracterizações obtêm um conjunto finito de subgrafos proibidos, o que permite desenvolver algoritmos polinomiais para reconhecer essas classes de grafos. Como trabalhos futuros, buscamos oferecer uma caracterização completa para grafos $\llcorner$-EPG unitário, o que pode representar um resultado ainda mais relevante no estudo de grafos EPG.

Gostaríamos de expressar nossa profunda gratidão à CAPES, CNPq, FAPERJ, MCTI e Governo Federal pelo apoio concedido a este trabalho.

Referências

Asinowski, A. e Ries, B. (2012). Some properties of edge intersection graphs of single-bend paths on a grid. *Discrete Mathematics*, 312(2):427–440.

Cameron, K., Chaplick, S., e Hoàng, C. T. (2016). Edge intersection graphs of L-shaped paths in grids. *Discrete Applied Mathematics*, 210:185–194. ISSN 0166-218X. LAGOS'13: Seventh Latin-American Algorithms, Graphs, and Optimization Symposium, Playa del Carmen, México — 2013.

Epstein, D., Golumbic, M. C., Lahiri, A., e Morgenstern, G. (2020). Hardness and approximation for L-EPG and B1-EPG graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 281:224–228. ISSN 0166-218X. LAGOS'17: IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, C.I.R.M., Marseille, France - 2017.

Golumbic, M. C., Lipshteyn, M., e Stern, M. (2009). Edge intersection graphs of single bend paths on a grid. *Networks: An International Journal*, 54(3):130–138.

Heldt, D., Knauer, K., e Ueckerdt, T. (2014). Edge-intersection graphs of grid paths: The bend-number. *Discrete Applied Mathematics*, 167:144–162. ISSN 0166-218X.

Lekkeikerker, C. e Boland, J. (1962). Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line. *Fundamenta Mathematicae*, 51(1):45–64. URL `http://eudml.org/doc/213681`.

Pergel, M. e Rzażewski, P. (2017). On edge intersection graphs of paths with 2 bends. *Discrete Applied Mathematics*, 226:106–116.

Roberts, F. S. (1969). Indifference graphs. proof techniques in graph theory. In *Proceedings of the Second Ann Arbor Graph Conference, Academic Press, New York*.

Sinden, F. W. (1966). Topology of Thin Film RC Circuits. *Bell System Technical Journal*, 45(9): 1639–1662.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193624
https://proceedings.science/p/193624?lang=en