LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

# ALGORITMO ILS PARA O PROBLEMA DE LOCALIZAÇÃO DE $p$-*HUBS* AVESSO AO RISCO COM ALOCAÇÃO MÚLTIPLA

**Aldo Vieira Pinto** [1,2], **Elisangela Martins de Sá** [2], **Sérgio Ricardo de Souza** [2]
[1] Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais
Rua Afonso Sardinha, 90, CEP: 36494-018, Ouro Branco, MG, Brasil
[2] Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Av. Amazonas, 7675, CEP: 30510-000, Belo Horizonte, MG, Brasil
aldo.vieira@ifmg.edu.br, elisangelamartins@cefetmg.br, sergio@cefetmg.br

**RESUMO**

Este artigo propõe uma formulação para o problema de localização de hubs do tipo $p$-mediana com múltiplas alocações sob condições de incerteza. Para lidar com as incertezas nos custos e nas demandas, é proposto um modelo com aversão ao risco, que utiliza o *Conditional Value at Risk* (CVaR). Este artigo propõe também um algoritmo baseado na metaheurística *Iterated Local Search* (ILS) para o problema. A partir de experimentos computacionais realizados utilizando cenários gerados a partir dos conjuntos de instâncias da literatura, verifica-se que a metaheurística ILS possibilita, nestes casos, obter boas soluções com pouca variabilidade e com baixo tempo computacional. Experimentos computacionais com o *solver* CPLEX, por outro lado, mostram que o problema se torna intratável, por questão de tempo computacional e disponibilidade de memória, mesmo para instâncias com poucos nós e poucos cenários.

**PALAVRAS CHAVE. Localização de *hubs*. Alocação múltipla. Otimização sob incertezas. Medida CVaR de Aversão ao Risco. Algoritmo ILS.**

**Tópicos: MH – Metaheurísticas, OC – Otimização Combinatória.**

**ABSTRACT**

This article proposes a formulation for the p-median hub location problem with multiple allocations under uncertainty conditions. A risk-averse model is proposed to deal with uncertainties in costs and demands, which uses Conditional Value at Risk (CVaR). This article also proposes an algorithm based on the Iterated Local Search (ILS) metaheuristic for the problem. Based on the performed computational experiments using scenarios generated from sets of instances in the literature, it can be seen that the ILS metaheuristic makes it possible, in these cases, to obtain good solutions with little variability and low computational time. On the other hand, computational experiments with the CPLEX solver show that the problem becomes intractable due to large runtime and excessive memory usage, even for instances with few nodes and few scenarios.

**KEYWORDS. Hub location. Multiple-allocation. Optimization under uncertainty. CVaR Measure of Risk Aversion. ILS algorithm.**

**Paper topics: MH - Metaheuristics, OC- Combinatorial optimization.**

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

## 1. Introdução

Ao se projetar uma rede, a instalação de conexões diretas entre cada par de origem e destino pode ser impraticável por conta de restrições orçamentárias ou operacionais. Projetar, então, a rede no formato eixo-raio pode reduzir o número de conexões, bem como o custo de transporte, por meio de economias de escala entre os *hubs*, devido à consolidação e redistribuição do fluxo pelos *hubs* [Farahani et al., 2013]. Estes nós recebem as demandas de diferentes nós de origem, que são enviadas para uma rede de nós *hubs* e, em seguida, distribuídas para os nós de destino.

O problema não capacitado de $p$ medianas de *hubs* com alocação múltipla (UMApHMP - *Uncapacitated Multiple Allocation* $p$*-hub Median Problem*) busca localizar $p$ *hubs* não-capacitados, com múltiplas alocações, ou seja, os nós não *hubs* podem ser alocados a mais de um *hub*, a fim de minimizar a soma dos custos de transporte para atender a todas as demandas.

Por envolver decisões estratégicas relacionadas com altos investimentos financeiros e de manutenção operacional, as incertezas nos custos ou nas demandas podem tornar as decisões baseadas na solução do problema determinístico pouco realistas. De acordo com Alem e Morabito [2015], há na literatura da pesquisa operacional várias abordagens de problemas de otimização que consideram incertezas nos dados. A Otimização Estocástica, em que os parâmetros incertos são modelados por meio de uma distribuição de probabilidade conhecida ou razoavelmente bem estimada, é uma das principais abordagens a tratar essa questão.

Com relação aos estudos que consideram a incerteza em problemas de localização de *hubs*, Marianov e Serra [2003] tratam de um problema no contexto do transporte aéreo sob efeitos de congestionamento com restrições probabilísticas. Yang [2009] apresenta um modelo de programação estocástica de dois estágios para abordar a localização de *hubs* de carga aérea e o planejamento de rotas de vôo sob variações sazonais de demanda. Já Contreras et al. [2011] consideram problemas com incertezas na demanda e custos de transporte, com objetivo de otimização de valor de esperado.

Para o caso de modelos estocásticos de localização de *hubs*, a maioria dos estudos existentes na literatura é neutra frente ao risco, ou seja, o objetivo é minimizar o custo total esperado. Estes modelos que otimizam o custo em média podem levar a resultados indesejáveis, como altos custos de transporte ou longos tempos de viagem, de maneira tal que a qualidade das soluções pode não ser satisfatória. Em modelos avessos ao risco, por outro lado, agrega-se medidas de variabilidade à função objetivo, permitindo um controle do grau de aversão ao se alterar os parâmetros das funções de medida de risco. Modelos avessos ao risco têm sido amplamente utilizados em várias áreas, incluindo logística humanitária [Ozbay et al., 2019] e otimização de portfólio financeiro [Paç e Pınar, 2014].

Kargar e Mahmutoğulları [2022] abordam modelos neutros e avessos ao risco para o problema UMApHMP, com uma estrutura da rede cujas alocações se dá por meio de caminhos que permitem nós não-*hubs* como nós intermediários e em quantidade arbitrária. Uma vez que o problema se torna computacionalmente intratável à medida que o número de cenários aumenta, os autores propõem um algoritmo de agrupamento baseado em árvore de cenários para resolvê-lo. Essa técnica tem sido empregada em outras variantes de problemas de localização de *hubs*, integrada com a decomposição de Benders, como em Ghaffarinasab et al. [2023].

O presente artigo propõe uma formulação para o problema de localização de *hubs* sob condições avessas ao risco mediante o *Conditional Value at Risk* (CVaR), baseado em Kargar e Mahmutoğulları [2022], que será denotado por UMApHMP-CVaR, bem como propõe um algoritmo baseado na meta-heurística *Iterated Local Search* (ILS) [Stützle, 1998] para a sua solução.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira. A Seção 2 apresenta o problema objeto de interesse. A Seção 3 detalha o algoritmo proposto. Os experimentos computacionais são apresentados na Seção 4. A Seção 5 aponta as considerações finais e propostas de trabalhos futuros.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

## 2. Formulação do Problema

Considere $G = (N, E)$ um grafo, em que $N$ é o conjunto de nós e $E$ é o conjunto de arestas. O UMApHMP-CVaR supõe que os custos e os fluxos de demanda são incertos. Além disso, a decisão de localização dos hubs é tomada em um primeiro estágio, com base apenas nas informações disponíveis no momento em que a decisão é tomada (hipótese de não-antecipatividade), enquanto as decisões de roteamento de fluxo de demanda são tomadas em um segundo estágio, quando os dados incertos se tornam conhecidos. Além disso, a aversão ao risco devido a incertezas é modelada usando o CVaR.

O CVaR é uma medida de risco de uma variável aleatória no nível $\beta$, com $0 \leq \beta < 1$, dada pelo valor esperado condicional dessa variável aleatória a $100(1-\beta)\%$ dos cenários mais pessimistas. Por esta razão o CVaR é conhecido na literatura como uma medida avessa ao risco. Demonstra-se em Rockafellar e Uryasev [2002] que, para uma variável aleatória $X$:

$$\text{CVaR}_\beta(X) = \inf_{\eta \in \mathbb{R}} \left\{ \eta + \frac{1}{1-\beta} \mathbb{E}[(X-\eta)_+] \right\}$$

em que a função não linear $(\cdot)_+$ é definida como $(t)_+ = \max\{0, t\}$. Mostra-se, em Shapiro et al. [2009], que o CVaR é uma função convexa definida em $X$. Além disso, apesar da presença de funções não lineares, um modelo usando esta medida de risco é facilmente linearizável.

O problema UMApHMP-CVaR busca selecionar $p$ nós no conjunto de nós $N$ para se tornarem *hubs*, de forma a minimizar o CVaR do custo total de transporte, assumindo que não são permitidas conexões diretas entre nós não hubs e que pode haver no máximo dois hubs em cada caminho. A formulação e a notação utilizadas neste trabalho são baseadas na formulação proposta por Kargar e Mahmutoğulları [2022], com a adição de algumas restrições, que utilizam como base as formulações propostas por Ernst e Krishnamoorthy [1998] e Alumur et al. [2012] para o caso determinístico.

Assume-se que é dado um espaço de probabilidade $\Omega$, com probabilidade $\pi^\omega$ para o cenário $\omega \in \Omega$. O parâmetro $c_{ij}^\omega$ é o custo por unidade roteada na aresta $(i,j) \in E$ e $w_{ij}^\omega$ é o fluxo a ser enviado do nó $i \in N$ para o nó $j \in N$ no cenário $\omega \in \Omega$. Além disso, seja $\alpha \in (0,1)$ o fator de desconto constante no transporte realizado nas conexões entre *hubs*. Supondo que $k$ e $l$ são nós *hubs* e $i$ e $j$ são nós não *hubs*, o custo de transporte de uma unidade de fluxo através da rota $i \to k \to l \to j$ no cenário $\omega \in \Omega$ é calculado como $c_{ik}^\omega + \alpha c_{kl}^\omega + c_{lj}^\omega$. O modelo também usa $O_i^\omega$ para representar o fluxo total originado no nó $i \in N$, ou seja, $O_i^\omega = \sum_{j \in N} w_{ij}^\omega$.

A formulação utiliza as variáveis de decisão $H_k$ binárias, de modo que $H_k = 1$ se o nó $k \in N$ é um hub e $H_k = 0$, caso contrário; as variáveis $Z_{ik}^\omega$, que representam o fluxo enviado do nó $i \in N$ para o *hub* $k \in N$ no cenário $\omega$; as variáveis $Y_{ikl}^\omega$, que representam o fluxo originado no nó $i \in N$ e roteado através da conexão entre os *hubs* $k, l \in N$ no cenário $\omega$; e a variável $X_{ilj}^\omega$, que representa o fluxo originado no nó $i \in N$ e enviado do *hub* $l \in N$ para o nó $j \in N$ no cenário $\omega$.

Dado um nível de risco $0 \leq \beta < 1$, a formulação para o problema é dada, então, por:

$$\min \quad \eta + \frac{1}{1-\beta} \sum_{\omega \in \Omega} \pi^\omega (C^\omega - \eta)_+ \tag{1}$$

$$\text{s. a} \quad C^\omega = \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} c_{ik}^\omega Z_{ik}^\omega + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} \alpha c_{kl}^\omega Y_{ikl}^\omega + \sum_{i \in N} \sum_{l \in N} \sum_{j \in N} c_{lj}^\omega X_{ilj}^\omega, \ \forall \omega \in \Omega \tag{2}$$

$$\sum_{k \in N} H_k = p \tag{3}$$

$$\sum_{k \in N} Z_{ik}^\omega = O_i^\omega, \quad \forall i \in N, \omega \in \Omega \tag{4}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

$$\sum_{l \in N} X^{\omega}_{ilj} = w^{\omega}_{ij}, \quad \forall i, j \in N, \omega \in \Omega \tag{5}$$

$$\sum_{\substack{l \in N \\ l \neq k}} Y^{\omega}_{ikl} + \sum_{j \in N} X^{\omega}_{ikj} = \sum_{\substack{l \in N \\ l \neq k}} Y^{\omega}_{ilk} + Z^{\omega}_{ik}, \quad \forall i, k \in N, \omega \in \Omega \tag{6}$$

$$Z^{\omega}_{ik} \leq O^{\omega}_{i} H_k, \quad \forall i, k \in N, \omega \in \Omega \tag{7}$$

$$X^{\omega}_{ilj} \leq w^{\omega}_{ij} H_l, \quad \forall i, j, l \in N, \omega \in \Omega \tag{8}$$

$$\sum_{l \in N} Y^{\omega}_{ikl} \leq Z^{\omega}_{ik}, \quad \forall i, k \in N, \omega \in \Omega \tag{9}$$

$$Z^{\omega}_{ik}, Y^{\omega}_{ikl}, X^{\omega}_{ilj} \geq 0, \quad \forall i, j, k, l \in N, \omega \in \Omega \tag{10}$$

$$H_k \in \{0, 1\}, \quad \forall k \in N. \tag{11}$$

$$\eta \in \mathbb{R} \tag{12}$$

A função objetivo (1) minimiza o CVaR no nível $\beta$ da variável aleatória discreta dada pelo custo total de transporte, isto é, minimiza a média dos $100(1-\beta)\%$ maiores custos. As restrições (2) calculam, para cada cenário $\omega \in \Omega$, o custo do transporte como a soma do custo de transporte dos nós de origem até o primeiro *hub*, dentre *hubs* e do último *hub* ao nó de destino. A restrição (3) garante que o número de *hubs* ativados seja $p$. As restrições de conservação de fluxo (4), (5) e (6) garantem que o fluxo seja roteado adequadamente para cada par origem-destino. As restrições (7) e (8) garantem que o fluxo seja roteado através de *hubs* instalados. As restrições (9) garantem que os nós intermediários de cada caminho mínimo são *hubs* ativados e que cada rota passa por no máximo dois *hubs* intermediários. As restrições (10) a (12) estabelecem o domínio das variáveis de decisão.

Para linearizar a função objetivo, considere as variáveis auxiliares $V^{\omega}$ para representar $(C^{\omega} - \eta)_{+}$, para $\omega \in \Omega$. A formulação linearizada para o UMApHMP-CVaR é, portanto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \eta + \frac{1}{1-\beta} \sum_{\omega \in \Omega} \pi^{\omega} V^{\omega} \\ \text{s. a} \quad & V^{\omega} \geq C^{\omega} - \eta, \ \ \forall\, \omega \in \Omega \\ & V^{\omega} \geq 0, \ \ \forall\, \omega \in \Omega \\ & (3) - \ (12). \end{aligned}$$

## 3. Descrição do Algoritmo Proposto

Esta seção descreve em detalhes o algoritmo proposto para solucionar o UMApHMP-CVaR, a partir da proposição apresentada para o caso determinístico introduzida em Pinto et al. [2023].

### 3.1. Representação da Solução e Avaliação da Função Objetivo

Uma solução para o UMApHMP-CVaR é representada por um vetor $s$ de inteiros, tendo dimensão $n$, que é o número de nós da rede. As primeiras $p$ posições indicam os *hubs* ativados e as demais posições os *hubs* inativos. Por exemplo, para $n = 7$ e $p = 3$, o vetor solução $s = [2, 4, 5, 7, 6, 1, 3]$ indica que os *hubs* 2, 4 e 5 estão ativados.

Este trabalho utiliza a versão do algoritmo de Floyd-Warshal descrita em de Carvalho [2017], para o cálculo do caminho mínimo para cada cenário. Este algoritmo garante apenas caminhos mínimos com até dois *hubs*, em que estes hubs são nós intermediários.

Assim, dada uma solução *hubs* $s$, para cada cenário $\omega \in \Omega$, o algoritmo recebe uma matriz chamada $custo^{\omega}$, em que o custo do arco $(i, i)$ no cenário $\omega$ é zero; para $i \neq j$, o custo no cenário $\omega$ entre $s[i]$ e $s[j]$ é $c^{\omega}_{s[i]s[j]}$, se $1 \leq i \leq p$ ou $1 \leq j \leq p$, enquanto que os demais arcos recebem

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

um valor correspondente a infinito. A saída é a matriz de custos mínimos $\text{CM}^\omega$ referente ao cenário $\omega$. O pseudocódigo do algoritmo é apresentado no Algoritmo 1. O laço das linhas (1)-(10) calcula a matriz $d$, que representa o menor caminho de um *hub* até todos os nós, utilizando um *hub* como nó intermediário. Já no laço das linhas (11)-(20) é calculado e armazenado na matriz $\text{CM}^\omega$ o menor custo entre cada par de nós, avaliando a passagem por cada *hub*, tendo já sido calculado o menor caminho deste *hub* ao nó destino. Como, em geral, $p < n$, conclui-se que esse algoritmo é de complexidade $O(n^2 p)$.

**Algoritmo 1** Algoritmo de Caminho Mínimo

**Entrada:** $s, n, p, \omega, custo^\omega$
1: **para** $k = 1, \ldots, p$ **faça**
2: **para** $l = 1, \ldots, n$ **faça**
3: $d_{s[k],s[l]} = \infty$
4: **para** $m = 1, \ldots, p$ **faça**
5: **se** $d_{s[k],s[l]} > \alpha * custo^\omega_{s[k],s[m]} + custo^\omega_{s[m],s[l]}$ **então**
6: $d_{s[k],s[l]} = \alpha * custo^\omega_{s[k],s[m]} + custo^\omega_{s[m],s[l]}$
7: **fim se**
8: **fim para**
9: **fim para**
10: **fim para**
11: **para** $i = 1, \ldots, n$ **faça**
12: **para** $j = 1, \ldots, n$ **faça**
13: $\text{CM}^\omega_{s[i],s[j]} = \infty$
14: **para** $k = 1, \ldots, p$ **faça**
15: **se** $\text{CM}^\omega_{s[i],[j]} > custo^\omega_{s[i],s[k]} + d_{s[k],s[j]}$ **então**
16: $\text{CM}^\omega_{s[i],[j]} \leftarrow custo^\omega_{s[i],s[k]} + d_{s[k],s[j]}$
17: **fim se**
18: **fim para**
19: **fim para**
20: **fim para**
**Saída:** $\text{CM}^\omega$

O custo total $C^\omega(s)$ associado à solução $s$ no cenário $\omega \in \Omega$ é dado por

$$C^\omega(s) = \sum_{i,j=1}^{n} \text{CM}^\omega_{s[i],s[j]} \cdot w^\omega_{s[i],s[j]}.$$

O CVaR no nível $\beta$ é, então, calculado, usando o procedimento proposto por Rockafellar e Uryasev [2002]. Os custos de todos os cenários são ordenados, de forma que $C^1 < C^2 < \cdots < C^{|\Omega|}$, em que a probabilidade de $C^k$ é igual a $p_k$. Seja $k_\beta$ o único índice tal que $\sum_{k=1}^{k_\beta} p_k \geq \beta > \sum_{k=1}^{k_\beta - 1} p_k$. Então $\text{CVaR}_\beta(C)$ é dado por:

$$\text{CVaR}_\beta(C) = \frac{1}{1-\beta}\left(\left(\sum_{k=1}^{k_\beta} p_k - \beta\right) C^{k_\beta} + \sum_{k=k_\beta+1}^{|\Omega|} p_k C^k\right).$$

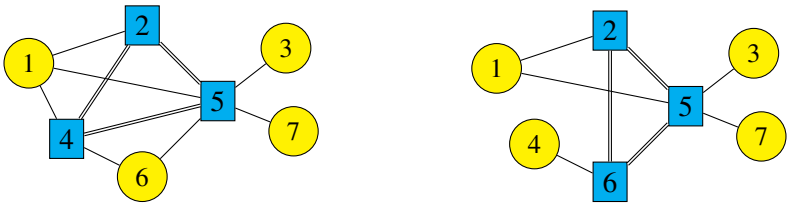
**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

### 3.2. Construção da Solução Inicial

Será utilizado um procedimento de Construção Gulosa, enumerando-se os *hubs* em ordem crescente segundo os valores da função de avaliação $g(t) = \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{j \in N} c_{tj}^{\omega} \cdot w_{tj}^{\omega}$. Esta função possibilita classificar os *hubs* melhor posicionados em relação a todos os demais, considerando a soma dos custos de transporte, sem considerar economia de escala, para todas as demandas originadas no nó em todos os cenários. Os $p$ nós com menores valores são os *hubs* escolhidos.

### 3.3. Estrutura de Vizinhança e Busca Local

O procedimento de busca local proposto usa a troca sistemática de vizinhança, aplicando o movimento de troca de *hub*, que faz a troca de um nó *hub* com um nó não-hub. A Figura 1 apresenta um exemplo. Uma solução vizinha de $s = [2, 4, 5, 7, 6, 1, 3]$ é dada por $s' = [2, 6, 5, 7, 4, 1, 3]$, na qual o nó $4$ deixa de ser *hub* e o nó $6$ passa a ser *hub*.




(a) Solução $s$ (b) Solução vizinha $s'$ de $s$

Figura 1: Solução $s$ e solução vizinha $s'$ de $s$ [Pinto et al., 2023].

A busca local recebe uma solução $s$ e inteiros $i$ e $j$, com $1 \leq i \leq p < j \leq n$, e realiza a troca dos nós nas posições $i$ e $j$ usando a função *movimento-troca-hub-naohub*$(i, j, s)$. A busca local é realizada em toda a vizinhança da solução corrente $s$, via estratégia de descida baseada no critério de Melhor Vizinho, em que, uma vez identificada a melhor solução vizinha da solução corrente $s$, esta solução vizinha passa a ser a nova solução corrente, caso seja melhor que a solução corrente existente. Repete-se o procedimento de exploração da vizinhança a partir da nova solução, até que o melhor vizinho não seja melhor que a solução corrente. Assim, o método é encerrado quando um ótimo local é obtido.

### 3.4. Metaheurística *Iterated Local Search* (ILS)

A metaheurística *Iterated Local Search* (*ILS*) reúne intensificação com a exploração da região corrente através de busca local e diversificação com perturbações na solução ótima local corrente [Stützle, 1998; Lourenço et al., 2002].

Uma implementação do ILS para a solução do problema UMApHMP-CVaR é apresentado no Algoritmo 2. Neste algoritmo, uma solução inicial $s_0$ é gerada (linha 1), sendo refinada com a estratégia de busca local do Melhor Vizinho (linha 2). No laço principal de repetição do algoritmo (linhas 4-14), que para após *IterMax* iterações sem melhora, efetua-se uma perturbação na solução corrente (na linha 6) e uma busca local na solução perturbada (linha 7), obtendo-se $s''$. Caso a solução $s''$ tenha melhorado o valor de função de avaliação, ela passa a ser a solução corrente (linha 9), atualiza-se, então, a *MelhorIter* e o nível de perturbação retorna para 1. Não havendo melhora, aumenta-se em 1 unidade o *nível* de perturbação (linha 12). Este valor foi limitado a $70\%$ de $p$ para evitar um reinício aleatório da solução.

A perturbação de nível igual a $k$ para o UMApHMP-CVaR é baseada no procedimento de perturbação descrito em Pinto et al. [2023], que consiste na troca aleatória de $k$ nós *hub* por $k$ nós não *hub*. Como exemplo deste procedimento, considere a solução $s = [2, 4, 5, 7, 6, 1, 3]$, para $n = 7$ e $p = 3$. Uma perturbação de nível $k = 2$ de $s$ pode gerar $s'' = [3, 6, 5, 7, 4, 1, 2]$.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

**Algoritmo 2** ILS - Iterated Local Search

**Entrada:** $f(\cdot), \mathcal{N}(\cdot), \mathit{IterMax}, s$
$s_0 \leftarrow \mathit{SolucaoInicial}$
$s \leftarrow \mathit{BuscaLocal}(s_0, f(\cdot), \mathcal{N}(\cdot))$
$\mathit{iter} \leftarrow 0, \mathit{MelhorIter} \leftarrow \mathit{iter}, \mathit{nível} \leftarrow 1$
**enquanto** $\mathit{iter} - \mathit{MelhorIter} < \mathit{IterMax}$ e $\mathit{nível} < 0,7 \cdot p$ **faça**
    $\mathit{iter} \leftarrow \mathit{iter} + 1$
    $s' \leftarrow \mathit{perturbacao}(s, \mathit{nível})$
    $s'' \leftarrow \mathit{BuscaLocal}(s')$
    **se** $f(s'') < f(s)$ **então**
        $s \leftarrow s''$
        $\mathit{MelhorIter} \leftarrow \mathit{iter},\ \mathit{nível} \leftarrow 1$
    **senão**
        $\mathit{nível} \leftarrow \mathit{nível} + 1$
    **fim se**
**fim enquanto**
**Saída:** $s$

O procedimento de perturbação desmembra o vetor-solução $s$ de tamanho $n$ em dois vetores: (i) $s_h$, com as $p$ primeiras posições; e (ii) $s_{nh}$, com as $n - p$ últimas posições. Em seguida, $s_h$ e $s_{nh}$ são embaralhados. Então, as $k$ primeiras posições de $s_h$ são trocadas pelas $k$ primeiras posições de $s_{nh}$. Por fim, constrói-se a solução perturbada $s'$ com as $p$ primeiras posições de $s_h$ e com as $n - p$ últimas vindas do vetor $s_{nh}$.

## 4. Experimentos Computacionais

Esta seção apresenta os resultados dos experimentos computacionais realizados e está organizada como segue. A Subseção 4.1 descreve os conjuntos de instâncias utilizados nos experimentos realizados. A Subseção 4.2 detalha o procedimento utilizado para a configuração dos parâmetros do algoritmo. A Subseção 4.3 mostra as tabelas com os resultados dos experimentos.

### 4.1. Instâncias da Literatura

Este trabalho utiliza os conjuntos de instâncias CAB (*Civil Aeronautics Board*), introduzido em O'Kelly [1987] e TR (*Turkish network*), retirados de Tan e Kara [2007] e Alumur et al. [2009] e cujas planilhas estão disponíveis em `http://ie.bilkent.edu.tr/~bkara/Turkish%20network.xls` para os experimentos computacionais. Os valores do fator de desconto utilizados para as instâncias CAB são $\alpha = 0,4$ e $\alpha = 0,8$. Para as instâncias TR, $\alpha = 0,9$ é o valor fornecido empiricamente por uma empresa de entrega de cargas que também utiliza o transporte rodoviário. Os demais parâmetros são baseados em Kargar e Mahmutoğulları [2022]. Para o nível de risco do CVaR, utiliza-se os fatores $\beta = 0,8$ e $\beta = 0,9$. Para a geração de cenários, dois níveis de variação para os custos e fluxos entre cada par de nós foram considerados. O nível *Low* gera valores de custo multiplicando valores gerados de forma aleatória no intervalo $[0,9; 1,1]$, com distribuição uniforme pelos valores nominais $\hat{c}_{ij}$. O nível $High$ utiliza os intervalos $[0,5; 1,5]$. O mesmo procedimento gera as demandas para cada cenário. Foram geradas instâncias com 10, 25, 50 e 100 cenários. Os cenários em cada instância são equiprováveis.

Denota-se por CAB-High-$m$-$p$-$\alpha$-$\beta$ e TR-High-$m$-$p$-$\alpha$-$\beta$ as instâncias com $m$ cenários gerados com nível de variação *High*, com $p$ *hubs* a serem ativados, fator de desconto $\alpha$ e nível de risco $\beta$ para o conjunto CAB e TR com 25 e 81 nós, respectivamente. Notação análoga vale para as instâncias geradas com variação *Low*.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

Tabela 1: Resultados para as instâncias CAB com 25 nós e 10 cenários e 30 execuções do algoritmo ILS.

| Instâncias | CPLEX | | | ILS | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Valor Ótimo | Tempo (s) | *hubs* Ativados | gap(%) médio | gap(%) maior | Tempo(s) |
| CAB-High-10-3-0,4-0,8* | 7142721699,8704 | 33646,6406 | 2, 12, 21 | 0,00 | 0,00 | 0,1723 |
| CAB-High-10-3-0,4-0,9 | 7157152825,8273 | 32748,7188 | 2, 12, 21 | 0,00 | 0,00 | 0,1693 |
| CAB-High-10-3-0,8-0,8 | 8021651732,0918 | 28282,0938 | 2, 12, 21 | 0,00 | 0,00 | 0,1891 |
| CAB-High-10-3-0,8-0,9 | 8054040177,4383 | 31711,5156 | 2, 12, 21 | 0,00 | 0,00 | 0,1821 |
| CAB-High-10-5-0,4-0,8 | 5679846408,6503 | 35067,7813 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,7010 |
| CAB-High-10-5-0,4-0,9* | 5694957552,2388 | 39725,7813 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,44 | 0,88 | 0,6147 |
| CAB-High-10-5-0,8-0,8 | 6869468238,4973 | 37110,0625 | 2, 4, 12, 17, 21 | 0,00 | 0,00 | 0,6861 |
| CAB-High-10-5-0,8-0,9 | 6900159728,0342 | 60080,8906 | 2, 4, 12, 17, 21 | 0,00 | 0,00 | 0,7682 |
| CAB-Low-10-3-0,4-0,8 | 7429884685,4193 | 8484,5313 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,1833 |
| CAB-Low-10-3-0,4-0,9 | 7452266363,0214 | 13768,3906 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,1741 |
| CAB-Low-10-3-0,8-0,8* | 8769382644,4520 | 14171,7500 | 12, 17, 21 | 0,00 | 0,00 | 0,1859 |
| CAB-Low-10-3-0,8-0,9 | 8798042981,7231 | 15799,4375 | 12, 17, 21 | 0,00 | 0,00 | 0,1972 |
| CAB-Low-10-5-0,4-0,8 | 5834877296,0666 | 2537,5469 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,6333 |
| CAB-Low-10-5-0,4-0,9 | 5846189222,0822 | 3401,2188 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,6297 |
| CAB-Low-10-5-0,8-0,8 | 7853346275,5738 | 11495,5781 | 1, 4, 7, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,6751 |
| CAB-Low-10-5-0,8-0,9* | 7862042184,7247 | 24269,8125 | 1, 4, 7, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,7188 |
| Médias | — | 24518,86 | — | 0,03 | 0,06 | 0,4300 |

O algoritmo ILS proposto foi implementado na linguagem `C++` e, para a resolução do modelo matemático, foi utilizado o solver CPLEX 22.1.1, configurado com uma *thread* e demais configurações padrão, por meio da biblioteca *Concert Technology* usando a linguagem `C++`. As execuções se deram em um computador Intel(R) Core(TM) i7-11390HU, 3.40 GHz, com 16 GB de RAM e sistema operacional Windows 11.

### 4.2. Configurações dos Parâmetros do Algoritmo ILS aplicado ao UMApHMP-CVaR

A calibração do parâmetro *IterMax* a ser utilizado na execução do algoritmo implementado foi feita por meio do software IRACE (*Iterated Racing for Automatic Algorithm Configuration*, [López-Ibáñez et al., 2016]), com *budget* de número máximo de 5000 execuções e demais configurações *default*. Do conjunto de 96 instâncias, 20% delas foram selecionadas para o treinamento, com distribuição uniforme no conjunto de nós (CAB e TR), no número de cenários, tipos de perturbação - *High* e *Low*, nos valores de $p$, $\alpha$ e $\beta$. Elas são identificadas com o símbolo $(*)$ junto ao nome da instância nas tabelas de resultados da próxima subseção. No arquivo de parâmetros, o intervalo de inteiros indicado para tal parâmetro foi $\mathit{IterMax} \in (1, 15)$. Após a execução, o IRACE retornou, como melhor configuração, $\mathit{IterMax} = 9$.

### 4.3. Resultados dos Experimentos

Para as instâncias com 10 cenários, todas as instâncias do tipo CAB foram resolvidas por meio do CPLEX e do ILS. Os resultados estão na Tabela 1, que apresenta os valores ótimos de função objetivo (FO) obtidos por meio do CPLEX, o tempo de execução do *solver* e os *hubs* ativados na solução ótima, bem como os tempos médios e *gaps* médios e maiores *gaps* encontrados nas 30 execuções do algoritmo ILS. Para o cálculo do *gap*, em valores percentuais, tem-se:

$$\textit{gap médio}(\%) = \frac{\text{Valor médio} - \text{Valor da melhor solução encontrada}}{\text{Valor da melhor solução encontrada}} \times 100,$$

em que "Valor da melhor solução encontrada" é o valor de FO da solução ótima, quando fornecida pelo *solver*, ou da melhor solução encontrada pela heurística e, para calcular o *maior gap*, utiliza-se o Maior Valor Encontrado de função objetivo em vez do Valor Médio.

Nas 30 execuções do algoritmo ILS com as instâncias CAB para 10 cenários, apenas na instância CAB-High-10-5-0,4-0,9 o valor ótimo não foi atingido para algumas execuções. Porém,

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

este resultado apresenta poucos ótimos locais que não eram soluções ótimas e, além disso, relativamente próximos ao ótimo global. Os tempos médios de execução do CPLEX e da heurística foram de $24518,86$ segundos e $0,43$ segundos, respectivamente. O tempo do CPLEX é de aproximadamente $57$ mil vezes o tempo da heurística.

Para as instâncias CAB com $25$ cenários, testes preliminares mostraram que o CPLEX, com um tempo limite de $36$ horas, não chega a encontrar a solução ótima, apresentando *gap* de otimalidade em torno de $7\%$. Da mesma forma, para as instâncias TR com $10$ cenários, testes preliminares mostraram que um tempo limite de $24$ horas no CPLEX não produz sequer uma solução viável. Para $25$ cenários, o CPLEX tem uma parada prematura por falta de memória. Assim, para estas instâncias, optou-se por apresentar apenas os resultados encontrados pela metaheurística ILS. As Tabelas 2 e 3 mostra os valores da melhor solução encontrada nas $30$ execuções e os *hubs* nela ativados, bem como os tempos médios encontrados nas $30$ execuções do algoritmo ILS para as instâncias CAB e para as instâncias TR, respectivamente. Os *gaps* foram calculados tendo como referência a melhor solução encontrada pela heurística.

Os resultados mostram que o tempo de resolução destas instâncias é baixo, mesmo para instância com 81 nós e 100 cenários. O maior valor de tempo médio encontrado foi para a instância TR-High-100-10-0,9-0,9, que foi igual a 2437,5513 segundos. Além disso, a heurística apresenta uma grande estabilidade, já que os *gaps* médios e maior são iguais a zero na maioria dos casos e, nos casos em que estes *gaps* são estritamente positivos, eles são muito próximos de zero.

Foi realizada uma análise estatística a fim de avaliar se há diferença nas distribuições dos tempos de execução e dos *gaps* nas 30 execuções do ILS em relação ao nível de incerteza (variação) nos dados e ao nível de risco $\beta$. Foi considerado um nível de significância de $5\%$. O teste de Normalidade de Shapiro-Wilk [Montgomery, 2009] rejeitou a normalidade dos tempos e dos *gaps*. Assim, aplicou-se o teste de Wilcoxon [Montgomery, 2009]. O resultado do teste mostra que não há evidências suficientes para concluir que há diferença entre as medianas dos tempo de execução dos dois níveis de variação. O teste de Wilcoxon não pareado para o conjunto dos *gaps médios* indica diferença significativa no conjunto dos *gaps*. Isto indica que uma maior amplitude na variação dos dados acarreta uma maior variabilidade nos ótimos locais encontrados pela heurística.

Considerando agora os grupos das instâncias com nível de risco $\beta = 0,8$ e $\beta = 0,9$, o Teste de Wilcoxon aponta que não há evidências suficientes para concluir que a diferença entre as medianas dos tempo de execução e dos *gaps* nos dois grupos. Isto sugere que o fator de risco $\beta$ não impacta no tempo de execução, nem na qualidade das soluções apresentadas.

Todos os códigos e as instâncias utilizadas nos experimentos deste trabalho estão disponíveis no repositório `https://github.com/AldoVieiraPinto/SBPO2024/`.

## 5. Considerações Finais

Este artigo apresentou uma formulação do problema UMApHMP sob incertezas com aversão ao risco por meio da medida CVaR.

Os resultados dos experimentos computacionais da aplicação da metaheurística ILS ao problema UMApHMP-CVaR com instâncias dos conjuntos CAB e TR e da implementação do modelo no CPLEX mostram que essa metaheurística apresentou um bom desempenho em relação à obtenção da solução ótima ou de soluções com valor de função objetivo bem próximo do valor ótimo, com tempo computacional muito inferior ao do solver CPLEX, nos casos em que o número de nós é pequeno e há poucos cenários. Quando considera-se instâncias com maior número de nós ou um maior número de cenários, o CPLEX apresenta tempo computacional muito grande ou término de execução por falta memória. Assim, a heurística ILS possibilita, nestes casos, obter soluções com pouca variabilidade em tempo computacional viável.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

Tabela 2: Resultados para as instâncias CAB com 25 nós e 25, 50 e 100 cenários e 30 execuções do algoritmo ILS.

| **Instâncias** | **Melhor Solução encontrada** | | **ILS** | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Valor de Função Objetivo** | ***hubs* Ativados** | **gap(%)** | | **Tempo(s)** |
| | | | **médio** | **maior** | |
| CAB-High-25-3-0,4-0,8 | 7364999032,1838 | 4, 12, 18 | 0,00 | 0,00 | 0,5021 |
| CAB-High-25-3-0,4-0,9 | 7425341381,5543 | 4, 12, 18 | 0,00 | 0,00 | 0,5417 |
| CAB-High-25-3-0,8-0,8 | 8429707526,5227 | 4, 19, 25 | 0,35 | 0,44 | 0,4366 |
| CAB-High-25-3-0,8-0,9 * | 8459471809,7622 | 4, 19, 25 | 0,45 | 0,54 | 0,4634 |
| CAB-High-25-5-0,4-0,8 | 5741488030,0913 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 1,9715 |
| CAB-High-25-5-0,4-0,9 | 5788887933,9308 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 1,9786 |
| CAB-High-25-5-0,8-0,8 * | 7009318083,1933 | 4, 7, 12, 17, 20 | 0,00 | 0,00 | 1,9952 |
| CAB-High-25-5-0,8-0,9 | 7043644255,7197 | 4, 7, 12, 17, 20 | 0,00 | 0,00 | 2,0736 |
| CAB-Low-25-3-0,4-0,8 | 7412638526,7188 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,4918 |
| CAB-Low-25-3-0,4-0,9 * | 7426147875,4452 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,5141 |
| CAB-Low-25-3-0,8-0,8 | 8766992155,9516 | 12, 17, 21 | 0,01 | 0,07 | 0,5120 |
| CAB-Low-25-3-0,8-0,9 | 8780815692,6111 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,5363 |
| CAB-Low-25-5-0,4-0,8 * | 5820266764,8663 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 1,7716 |
| CAB-Low-25-5-0,4-0,9 | 5831253481,5233 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 1,7690 |
| CAB-Low-25-5-0,8-0,8 | 7795761671,0368 | 4, 7, 12, 17, 24 | 0,00 | 0,00 | 2,0010 |
| CAB-Low-25-5-0,8-0,9 | 7815454273,1330 | 4, 7, 12, 17, 24 | 0,00 | 0,00 | 2,0213 |
| CAB-High-50-3-0,4-0,8 | 7344848237,1391 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,9429 |
| CAB-High-50-3-0,4-0,9 | 7460490996,5075 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,9827 |
| CAB-High-50-3-0,8-0,8 * | 8433391899,2629 | 5, 12, 17 | 0,03 | 0,31 | 0,9486 |
| CAB-High-50-3-0,8-0,9 | 8544757318,1525 | 5, 12, 17 | 0,45 | 0,54 | 0,8855 |
| CAB-High-50-5-0,4-0,8 | 5718387615,2861 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 3,5240 |
| CAB-High-50-5-0,4-0,9 | 5818041887,2294 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 3,6873 |
| CAB-High-50-5-0,8-0,8 | 7164035749,0535 | 4, 5, 10, 12, 17 | 0,03 | 0,31 | 3,5277 |
| CAB-High-50-5-0,8-0,9 * | 7216509910,6530 | 4, 5, 12, 13, 17 | 0,00 | 0,00 | 3,4299 |
| CAB-Low-50-3-0,4-0,8 * | 7408293624,8819 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,8911 |
| CAB-Low-50-3-0,4-0,9 | 7427088884,9087 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 0,9129 |
| CAB-Low-50-3-0,8-0,8 | 8764615760,3191 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 1,0947 |
| CAB-Low-50-3-0,8-0,9 | 8777569547,5397 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 1,1167 |
| CAB-Low-50-5-0,4-0,8 | 5822498325,3671 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 3,3036 |
| CAB-Low-50-5-0,4-0,9 * | 5833379691,1637 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 3,2615 |
| CAB-Low-50-5-0,8-0,8 | 7823323678,5269 | 1, 4, 7, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 3,5975 |
| CAB-Low-50-5-0,8-0,9 | 7843041193,4410 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 3,7588 |
| CAB-High-100-3-0,4-0,8 | 7467610212,7822 | 4, 12, 18 | 0,00 | 0,00 | 1,9884 |
| CAB-High-100-3-0,4-0,9 * | 7601512800,0350 | 4, 12, 18 | 0,05 | 0,12 | 1,9302 |
| CAB-High-100-3-0,8-0,8 | 8539116452,9026 | 4, 12, 18 | 0,00 | 0,00 | 2,2245 |
| CAB-High-100-3-0,8-0,9 | 8659944827,5700 | 4, 12, 18 | 0,00 | 0,00 | 2,7786 |
| CAB-High-100-5-0,4-0,8 * | 5806822051,0368 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 7,2382 |
| CAB-High-100-5-0,4-0,9 | 5917820157,6955 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 6,5363 |
| CAB-High-100-5-0,8-0,8 | 7177644451,2339 | 2, 4, 12, 13, 17 | 0,00 | 0,00 | 7,1011 |
| CAB-High-100-5-0,8-0,9 | 7269701721,9312 | 2, 4, 12, 13, 17 | 0,00 | 0,00 | 8,4475 |
| CAB-Low-100-3-0,4-0,8 | 7435856726,8723 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 1,8040 |
| CAB-Low-100-3-0,4-0,9 | 7462752324,1028 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 1,9306 |
| CAB-Low-100-3-0,8-0,8 | 8800978138,0687 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 2,2083 |
| CAB-Low-100-3-0,8-0,9 * | 8833373099,9504 | 4, 12, 17 | 0,00 | 0,00 | 2,0293 |
| CAB-Low-100-5-0,4-0,8 | 5846149910,5646 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 6,6140 |
| CAB-Low-100-5-0,4-0,9 | 5868681703,7721 | 4, 7, 12, 14, 17 | 0,00 | 0,00 | 6,6651 |
| CAB-Low-100-5-0,8-0,8 * | 7846804262,5392 | 4, 7, 12, 17, 24 | 0,00 | 0,00 | 7,2240 |
| CAB-Low-100-5-0,8-0,9 | 7868209649,7360 | 4, 7, 12, 17, 24 | 0,00 | 0,00 | 7,3320 |
| Médias | — | — | 0,0187 | 0,0308 | 2,6977 |

Para trabalhos posteriores, sugere-se investigar com mais profundidade o desempenho do método em instâncias de maior dimensão, bem como buscar outras alternativas de construção inicial e ainda outras variantes do ILS, como o *Smart* ILS. Além disso, sugere-se verificar o desempenho da heurística para outras medidas avessas ao risco, como o *Mean*-CVaR ou medidas neutras ao risco, como o valor esperado.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

Tabela 3: Resultados para as instâncias TR com 81 nós e 10, 25, 50 e 100 cenários e 30 execuções do algoritmo ILS.

| Instâncias | Melhor Solução encontrada | | ILS | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Valor de Função Objetivo | *hubs* Ativados | gap(%) | | Tempo(s) |
| | | | médio | maior | |
| TR-High-10-6-0,9-0,8 | 42756753010,8267 | 3, 23, 41, 50, 71, 80 | 0,0247 | 0,0824 | 57,3101 |
| TR-High-10-6-0,9-0,9 | 42790768682,1028 | 3, 23, 41, 50, 71, 80 | 0,1328 | 0,8690 | 61,0841 |
| TR-High-10-10-0,9-0,8 | 38122937362,9351 | 1, 3, 12, 27, 35, 38, 41, 52, 54, 71 | 0,0418 | 0,4179 | 259,4213 |
| TR-High-10-10-0,9-0,9 * | 38224760775,8398 | 1, 3, 12, 27, 35, 38, 41, 52, 54, 71 | 0,1058 | 0,9608 | 265,8248 |
| TR-Low-10-6-0,9-0,8 * | 50473829690,6649 | 1, 6, 21, 34, 60, 64 | 0,00 | 0,00 | 56,5364 |
| TR-Low-10-6-0,9-0,9 | 50503082495,1490 | 1, 6, 21, 34, 60, 64 | 0,0120 | 0,0299 | 52,6274 |
| TR-Low-10-10-0,9-0,8 | 47833297278,5627 | 1, 3, 6, 21, 25, 34, 38, 45, 54, 55 | 0,00 | 0,00 | 222,2833 |
| TR-Low-10-10-0,9-0,9 | 47833688092,6350 | 1, 3, 6, 21, 25, 34, 38, 45, 54, 55 | 0,00 | 0,00 | 225,0140 |
| TR-High-25-6-0,9-0,8 | 43334395821,2413 | 1, 3, 6, 21, 41, 58 | 0,00 | 0,00 | 137,1533 |
| TR-High-25-6-0,9-0,9 | 43721240829,9588 | 3, 6, 21, 41, 58, 68 | 0,00 | 0,00 | 160,7389 |
| TR-High-25-10-0,9-0,8 | 38663909155,6310 | 3, 6, 21, 34, 41, 45, 54, 58, 68, 80 | 0,0123 | 0,0760 | 602,4594 |
| TR-High-25-10-0,9-0,9 * | 38727418903,1851 | 3, 6, 21, 34, 41, 45, 54, 58, 68, 80 | 0,0332 | 0,2727 | 604,8594 |
| TR-Low-25-6-0,9-0,8 | 50466737465,9871 | 1, 6, 21, 35, 41, 60 | 0,00 | 0,00 | 152,7393 |
| TR-Low-25-6-0,9-0,9 * | 50487429200,4976 | 1, 6, 21, 35, 41, 60 | 0,00 | 0,00 | 148,9618 |
| TR-Low-25-10-0,9-0,8 | 47918575870,7784 | 1, 3, 6, 21, 25, 34, 35, 38, 41, 52 | 0,00 | 0,00 | 594,6453 |
| TR-Low-25-10-0,9-0,9 | 47930098640,9519 | 1, 3, 6, 21, 25, 34, 35, 38, 41, 52 | 0,00 | 0,00 | 581,7376 |
| TR-High-50-6-0,9-0,8 | 43611648656,9693 | 1, 3, 6, 21, 41, 71 | 0,00 | 0,00 | 341,2284 |
| TR-High-50-6-0,9-0,9 * | 43851239545,2178 | 1, 3, 6, 21, 41, 71 | 0,00 | 0,00 | 326,1991 |
| TR-High-50-10-0,9-0,8 | 38660803741,2439 | 1, 3, 6, 12, 27, 41, 45, 54, 60, 71 | 0,00 | 0,00 | 1231,1099 |
| TR-High-50-10-0,9-0,9 | 38814971581,4429 | 1, 3, 6, 12, 27, 28, 41, 45, 54, 71 | 0,00 | 0,00 | 1164,2330 |
| TR-Low-50-6-0,9-0,8 | 50426208750,5236 | 1, 6, 21, 41, 45, 60 | 0,00 | 0,00 | 257,9643 |
| TR-Low-50-6-0,9-0,9 | 50491059283,1653 | 1, 6, 21, 41, 45, 60 | 0,00 | 0,00 | 263,9948 |
| TR-Low-50-10-0,9-0,8 * | 47934045143,1780 | 1, 3, 6, 21, 25, 34, 35, 38, 41, 52 | 0,0096 | 0,1441 | 1122,5188 |
| TR-Low-50-10-0,9-0,9 | 47988733867,1522 | 1, 3, 6, 21, 25, 34, 35, 38, 41, 52 | 0,00 | 0,00 | 1104,2473 |
| TR-High-100-6-0,9-0,8 * | 43602880533,8333 | 1, 3, 6, 21, 41, 60 | 0,0183 | 0,1375 | 601,3585 |
| TR-High-100-6-0,9-0,9 | 43951316054,7818 | 1, 3, 21, 38, 41, 71 | 0,0442 | 0,2082 | 574,7417 |
| TR-High-100-10-0,9-0,8 | 38780558016,0968 | 1, 3, 6, 21, 41, 45, 46, 54, 60, 71 | 0,00 | 0,00 | 2373,2094 |
| TR-High-100-10-0,9-0,9 | 39069173992,6133 | 1, 3, 6, 21, 41, 45, 46, 52, 54, 71 | 0,00 | 0,00 | 2437,5513 |
| TR-Low-100-6-0,9-0,8 | 50568739900,5727 | 1, 6, 21, 41, 45, 60 | 0,00 | 0,00 | 573,3325 |
| TR-Low-100-6-0,9-0,9 | 50646739362,7879 | 1, 6, 21, 41, 45, 58 | 0,00 | 0,00 | 562,1144 |
| TR-Low-100-10-0,9-0,8 | 48018868552,5908 | 1, 3, 6, 21, 25, 34, 35, 38, 41, 55 | 0,0041 | 0,0071 | 2330,3952 |
| TR-Low-100-10-0,9-0,9 * | 48068297211,5641 | 1, 3, 6, 21, 25, 34, 38, 41, 45, 55 | 0,00 | 0,00 | 2389,2448 |
| Médias | — | — | 0,0137 | 0,1002 | 682,4012 |

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq, processo 409785/2023-7), à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG, processo APQ-00417-21), ao Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG) e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG) pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho.

## Referências

Alem, D. e Morabito, R. (2015). Planejamento da produção sob incerteza: programação estocástica versus otimização robusta. *Gestão & Produção*, 22:539–551.

Alumur, S. A., Kara, B. Y., e Karasan, O. E. (2009). The design of single allocation incomplete hub networks. *Transportation Research Part B: Methodological*, 43:936–951.

Alumur, S., Nickel, S., e da Gama, F. S. (2012). Hub location under uncertainty. *Transportation Research Part B: Methodological*, 46:529–543.

Contreras, I., Cordeau, J.-F., e Laporte, G. (2011). Stochastic uncapacitated hub location. *European Journal of Operational Research*, 212(3):518–528.

de Carvalho, R. (2017). *Heurísticas Paralelas aplicadas a problemas de alocação de concentradores*. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br

Ernst, A. e Krishnamoorthy, M. (1998). Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. *European Journal Operational Research*, 104:100–112.

Farahani, R. Z., Hekmatfar, M., Arabani, A. B., e Nikbakhsh, E. (2013). Hub location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications. *Computers & Industrial Engineering*, 64:1096–1109.

Ghaffarinasab, N., Çavus, Ö., e Kara, B. Y. (2023). A mean-cvar approach to the risk-averse single allocation hub location problem with flow-dependent economies of scale. *Transportation Research Part B: Methodological*, 167:32–53.

Kargar, K. e Mahmutoğulları, A. (2022). Risk-averse hub location: Formulation and solution approach. *Computers & Operations Research*, 1443.

López-Ibáñez, M., Dubois-Lacoste, J., Cáceres, L. P., Birattari, M., e Stützle, T. (2016). The IRACE package: Iterated racing for automatic algorithm configuration. *Operations Research Perspectives*, 3:43–58.

Lourenço, H., Martin, O., e Stützle, T. (2002). Iterated local search. In Glover, F. e Kochenberger, G., editors, *Handbook of Metaheuristics*, p. 43–58. International Series in Operations Research & Management Science.

Marianov, V. e Serra, D. (2003). Location models for airline hubs behaving as m/d/c queues. *Computers & Operations Research*, 30(7):983–1003.

Montgomery, D. C. (2009). *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley & Sons, 7 th edition.

O'Kelly, M. (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities. *European Journal of Operational Research*, 32:393–404.

Ozbay, E., Çavuş, Ö., e Kara, B. (2019). Shelter site location under multi-hazard scenarios. *Computers & Operations Research*, 106:102–118.

Paç, A. B. e Pınar, M. Ç. (2014). Robust portfolio choice with cvar and var under distribution and mean return ambiguity. *Transactions in Operations Research*, 22(3):875–891.

Pinto, A. V., Martins de Sá, E., e de Souza, S. R. (2023). Metaheurística *Smart* ils aplicada ao problema de localização de p concentradores com alocação múltiplas. *Anais do LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 55.

Rockafellar, T. e Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7):1443–1471.

Shapiro, A., Dentcheva, D., e Ruszczyński, A. (2009). *Lectures on Stochastic Programming*. Society for Industrial and Applied Mathematics. URL `https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898718751`.

Stützle, T. (1998). *Local Search Algorithms for Combinatorial Problems: Analysis, Improvements, and New Applications*. Phd thesis, Darmstadt University of Technology.

Tan, P. Z. e Kara, B. Y. (2007). A hub covering model for cargo delivery systems. *Networks: An International Journal*, 49(1):28–39.

Yang, T.-H. (2009). Stochastic air freight hub location and flight routes planning. *Applied Mathematical Modelling*, 33(12):4424–4430.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193595
https://proceedings.science/p/193595?lang=pt-br