LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

# Uma formulação de programação linear inteira mista para o sequenciamento de recuperadoras em pátios de minério visando à minimização do atraso total

**Eduardo Matosinhos Florinda**[1], **Marcone Jamilson Freitas Souza**[1,2], **Luciano Perdigão Cota**[1,3]

[1]Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação
Universidade Federal de Ouro Preto, CEP: 35402-136, Ouro Preto, MG, Brasil

[2]Universidade Federal de Ouro Preto
Campus Universitário, Morro do Cruzeiro, CEP: 35402-136, Ouro Preto, MG, Brasil

[3]Instituto Tecnológico Vale
Campus Universitário, Morro do Cruzeiro, CEP: 35402-206, Ouro Preto, MG, Brasil

eduardo.florinda@aluno.ufop.edu.br, marcone@ufop.edu.br, luciano.p.cota@itv.org

**RESUMO**

Os pátios de estocagem são componentes essenciais da cadeia logística da mineração. Em geral, utilizam-se recuperadoras nesses pátios para retomar o minério das pilhas, transferindo-o para correias transportadoras com o objetivo de conduzi-lo a outros locais. A programação das operações de recuperação de pilhas em pátios de minério é um problema de sequenciamento em máquinas paralelas não-relacionadas, com tempos de preparação dependentes da sequência, data de entrega e elegibilidade de máquinas. Este estudo propõe uma formulação de programação linear inteira mista para minimizar o atraso total. A formulação foi implementada no resolvedor Gurobi e testada em um conjunto de instâncias de pequeno porte, geradas a partir de dados operacionais do Porto de Tubarão. Os resultados indicaram que o resolvedor foi capaz de encontrar a solução ótima para instâncias com até 10 tarefas e 4 recuperadoras.

**PALAVRAS CHAVE. Sequenciamento de recuperadoras. Atraso total. Mineração. Programação linear inteira mista.**

**Tópicos: PO na Indústria. Outras aplicações em PO.**

**ABSTRACT**

Stockyards are essential components of the mining logistics chain. In general, reclaimers are used in these stockyards to reclaim the ore from the stockpiles, transferring it to conveyor belts to take it to other locations. The scheduling of stockpile reclaim operations in ore stockyards is a scheduling problem on unrelated parallel machines, with setup times dependent on the sequence, due date, and machine eligibility. This study proposes a mixed-integer linear programming formulation to minimize the total tardiness. The formulation was implemented in the Gurobi solver and tested on small instances generated from operational data from the Port of Tubarão. The results showed that the solver was able to find the optimal solution for instances with up to 10 jobs and four reclaimers.

**KEYWORDS. Reclaimer schedule. Total tardiness. Mining industry. Mixed-integer linear programming.**

**Paper topics: OR in Industry. Other applications in OR.**

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

## 1. Introdução

Os pátios de estocagem constituem componentes essenciais da cadeia logística da mineração, influenciando de forma significativa no seu desempenho [Servare Junior et al., 2018]. Além disso, atuam como intermediários entre as fases de beneficiamento e o subsequente carregamento em navios ou vagões de trens. Após a conclusão do beneficiamento do minério, os produtos são encaminhados por meio de correias transportadoras até os pátios de estocagem. Nessas áreas, são organizados em pilhas para facilitar o desaguamento parcial. Esta etapa é essencial, uma vez que os produtos permanecem úmidos devido à água adicionada durante o processo de beneficiamento. Além de desempenhar essa função de desaguamento, o armazenamento de material nos pátios também assume uma importância vital ao absorver as flutuações de demanda no transporte e na produção [da Silva, 2015].

Geralmente, nos pátios de estocagem de minério são utilizadas recuperadoras para retomar o minério das pilhas. Estes equipamentos realizam a recuperação da pilha e transferem o minério para as correias transportadoras com o propósito de conduzi-lo para outros locais, como carregadores de navios, outros pátios de estocagem e carregadores de vagões. Uma programação, também conhecida como sequenciamento, eficaz de recuperadoras para a retomada das pilhas no pátio pode contribuir significativamente para a redução dos custos operacionais [Benbrik et al., 2024]. Além disso, o sequenciamento adequado de recuperadoras pode contribuir para a minimização de penalidades no atraso da entrega das tarefas, como multas contratuais em decorrência de atrasos na partida de um navio.

A sequência de recuperação das pilhas é influenciada por vários fatores, incluindo a taxa de recuperação das recuperadoras, a data de entrega dos produtos e a elegibilidade das recuperadoras para recuperar pilhas específicas, entre outros. Dentro deste contexto, o sequenciamento é um processo de organização da ordem de execução das tarefas, garantindo o cumprimento das restrições físicas do pátio. A programação das operações de recuperação de pilhas em pátios de minério pode ser classificado como uma variante do problema de sequenciamento em máquinas paralelas não-relacionadas com tempos de preparação dependentes da sequência, data de entrega e elegibilidade de máquinas, em que as tarefas representam as operações de recuperação de pilhas de minério e as máquinas são as recuperadoras.

O intervalo de tempo entre a conclusão da recuperação de uma pilha e o início da recuperação da próxima caracteriza o tempo de preparação (ou *setup* em inglês). Devido a restrições de localização das máquinas, nem todas as pilhas são acessíveis por todas as recuperadoras, o que implica na necessidade de considerar a elegibilidade destas máquinas. Além disso, os produtos a serem recuperados possuem uma data de entrega a ser atendida. O objetivo é minimizar os atrasos em seus atendimentos.

Na literatura são encontrados estudos tratando o problema de sequenciamento de recuperadoras, como em [Jesus-Junior et al., 2024] e [Benbrik et al., 2024]. Contudo, a variante deste problema, tratada neste estudo, possui características ainda não consideradas simultaneamente, como a minimização do atraso na entrega das tarefas e a elegibilidade das recuperadoras.

Para preencher esta lacuna, este trabalho propõe uma formulação de programação linear inteira mista (MILP, das iniciais em inglês *Mixed-integer linear programming*) para representar o problema de sequenciamento de recuperadoras e resolvê-lo utilizando um resolvedor matemático. O problema tratado neste estudo possui ampla aplicação prática em pátios de minério. Além da aplicabilidade prática, trata-se de um problema pertencente à classe NP-difícil [Garey and Johnson, 1979], o que significa que ainda não se conhece um algoritmo eficiente para sua solução em tempo determinístico polinomial, possuindo, portanto, uma grande relevância teórica.

O restante do artigo é organizado como segue. Na Seção 2 é realizada a revisão bibli-

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

ográfica de trabalhos da literatura que tratam o problema de sequenciamento de recuperadoras. Na Seção 3 apresenta a caracterização do problema sob estudo. Na Seção 4 é descrita a formulação MILP proposta. Na Seção 5 são apresentados os experimentos computacionais. Por fim, na Seção 6 são realizadas as conclusões deste trabalho.

## 2. Revisão bibliográfica

O sequenciamento eficiente de recuperadoras constitui um aspecto crítico da gestão de recursos em terminais de exportação de granéis sólidos, pois afetam diretamente o desempenho desses terminais [Benbrik et al., 2024]. Boland and Savelsbergh [2011] enfatizaram a importância da gestão eficiente de terminais de granéis. Apesar de sua extrema importância, a pesquisa sobre este tema está em estágio inicial, evidenciada pela escassez de artigos que tratam de maneira abrangente o problema do sequenciamento de recuperadoras.

Até onde se tem conhecimento, Hu and Yao [2012] foram os primeiros a investigar o problema de sequenciamento de empilhadeiras e recuperadoras (*S-R scheduling problem*) em terminais de minério de ferro. O problema foi formulado como uma instância de programação inteira mista. Se concentraram em minimizar o *makespan* para um conjunto específico de tarefas, utilizando um algoritmo genético. Essas tarefas incluem tanto o processo de empilhamento quanto o de recuperação de pilhas. Além disso, foi considerada a elegibilidade de máquinas, uma vez que os equipamentos podem ou não ter acesso a áreas de armazenamento específicas de cada pilha. Adicionalmente, propuseram um *lower bound* para o *S-R scheduling problem*, a fim de substituir a solução exata como referência para comparação de soluções. Essa abordagem se torna necessária, dado o fato de o problema ser NP-difícil.

Para uma melhor compreensão dos desafios inerentes ao sequenciamento de recuperadoras, Angelelli et al. [2016] propuseram um modelo abstrato de sequenciamento inspirado na operação de recuperadoras no pátio de um terminal de exportação de carvão. Nesse modelo, são consideradas a elegibilidade das máquinas, o tempo de *setup* e que as recuperadoras são idênticas, ou seja, possuem a mesma velocidade de locomoção e de recuperação. O objetivo é minimizar o *makespan*. Os pesquisadores investigaram diversas variantes desse modelo, levando em conta restrições de precedência, bem como a possibilidade de decidir sobre a localização das pilhas no pátio. A complexidade de cada variante foi analisada, sendo apresentadas provas de complexidade para algumas delas e algoritmos polinomiais para outras. Para uma das variantes foi desenvolvido um algoritmo de aproximação com fator constante.

Kalinowski et al. [2017] ampliaram o modelo abstrato proposto por Angelelli et al. [2016]. Nesta nova versão, para ficar coerente com a natureza dinâmica do problema, os autores supõem que cada pilha está disponível somente a partir de uma determinada data. Isso se deve ao fato de que o espaço no pátio é limitado e as pilhas são empilhadas e recuperadas ao longo do tempo, resultando no reaproveitamento do espaço liberado pela recuperação completa de uma pilha para o empilhamento de outra. Para essa nova variante, considerou-se apenas uma recuperadora. Foram propostos algoritmos de aproximação com fator constante, e também um algoritmo *branch-and-bound* para a obtenção de soluções exatas para instâncias pequenas do problema.

Motivados pelas operações práticas das recuperadoras, Wang et al. [2018] consideraram dois problemas. O primeiro permite que as recuperadoras operem simultaneamente na mesma pilha, enquanto o segundo proíbe tal operação simultânea. Ambos os problemas são classificados como NP-difíceis. Para o primeiro problema, foi desenvolvido um esquema de aproximação de tempo totalmente polinomial (FPTAS). Para o segundo problema, foi proposto um algoritmo de aproximação 2 para múltiplas máquinas e uma aproximação 3/2 para o caso de duas máquinas. Os experimentos computacionais realizados permitiram avaliar a eficácia dos algoritmos de aproximação.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

Ünsal [2020] trata um problema complexo de sequenciamento de recuperadoras, caracterizado por restrições de não cruzamento, tempos de preparação dependentes da sequência, restrições de elegibilidade e relações de precedência, inspirado pela operação de recuperação em terminais de granéis sólidos. As variantes deste problema, com e sem operações de empilhamento, foram analisadas. Para cada variante, foram estabelecidos limites inferiores e superiores. Um limite inferior forte foi obtido ao relaxar a restrição de não cruzamento e resolver o problema resultante até a otimalidade. Ademais, foi desenvolvida uma nova formulação de programação por restrições para fornecer um limite superior para o problema. Experimentos computacionais demonstraram que essa abordagem é capaz de gerar sequenciamentos quase ideais para diferentes configurações de pátios de estocagem em menos de um minuto.

Benbrik et al. [2024] tratam um problema que considera atividades periódicas de manutenção preventiva das recuperadoras. Foram considerados dois casos para resolver este problema. O primeiro envolve a otimização do manuseio de materiais em um sistema composto por dois pátios e uma máquina recuperadora. Para este caso, foram desenvolvidas duas novas formulações MILP para orientar as decisões de sequenciamento e maximizar a produtividade. Para o segundo caso, que representa uma situação mais complexa, envolvendo um sistema com três pátios e duas recuperadoras, foi desenvolvida uma nova formulação MILP com o mesmo objetivo. A eficácia das formulações matemáticas propostas foi testada utilizando instâncias geradas aleatoriamente com base em um caso do mundo real.

Jesus-Junior et al. [2020] e Jesus-Junior et al. [2024] tratam o problema de sequenciamento de recuperadoras de minério no Porto de Tubarão da Vale. O problema envolve um conjunto de navios que devem ser carregados com pilhas de minério pré-definidas, cada uma contendo um tipo específico de produto e quantidade de minério. As pilhas são armazenadas em pátios de estocagem e recuperadas por recuperadoras de minério, que posteriormente embarcam o minério nos navios atracados. O objetivo é sequenciar as operações das recuperadoras para minimizar a soma dos tempos de atracação dos navios. Para resolver o problema, foi desenvolvido um algoritmo baseado em *GRASP*, utilizando o *Basic Variable Neighborhood Descent* como método de busca local. O algoritmo foi testado em instâncias reais e se mostrou capaz de fornecer soluções de alta qualidade para auxiliar a tomada de decisão.

Na Tabela 1 é apresentado um quadro comparativo entre os trabalhos citados e a nossa proposta. Foram avaliadas as seguintes características:

1. Tempo de preparação dependente da sequência: Foi analisada a dependência do tempo de preparação entre as tarefas. Em alguns trabalhos, este tempo é considerado constante. No entanto, é relevante considerar a versão em que esse tempo varia, dado o contexto em que o tempo de preparação representa a movimentação das recuperadoras para acessar as pilhas.

2. Máquinas não-relacionadas: As máquinas são consideradas não-relacionadas porque o tempo de execução de cada tarefa varia entre as máquinas. Ao incluir essa característica, é possível representar um cenário em que as recuperadoras possuem diferentes taxas de recuperação.

3. Data de entrega: Cada tarefa possui uma data planejada de entrega específica e uma penalidade de atraso, utilizada para penalizar eventuais atrasos no cumprimento do prazo.

4. Minimização da soma ponderada dos atrasos: Foi identificado se cada estudo da literatura busca minimizar este objetivo.

5. Elegibilidade: As restrições de elegibilidade das máquinas foram consideradas em todos os trabalhos sobre o problema em questão. Essas restrições têm como objetivo respeitar as

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

limitações de localização das máquinas, uma vez que nem todas as pilhas são acessíveis por todas as recuperadoras.

6. MILP: Por fim, foi verificado se os trabalhos citados propuseram uma formulação MILP para representar o problema.

Tabela 1: Comparação das características consideradas neste trabalho em relação a outros da literatura.

| Trabalho | Tempo de preparação dependente da sequência | Máquinas não-relacionadas | Data de entrega | Minimização da soma ponderada dos atrasos | Elegibilidade | MILP |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Hu and Yao [2012] | ✓ | | | | ✓ | ✓ |
| Angelelli et al. [2016] | | | | | ✓ | |
| Kalinowski et al. [2017] | | | | | ✓ | ✓ |
| Wang et al. [2018] | | | | | ✓ | |
| Ünsal [2020] | ✓ | | | | ✓ | ✓ |
| Benbrik et al. [2024] | ✓ | | | | ✓ | ✓ |
| Jesus-Junior et al. [2024] | ✓ | ✓ | | | ✓ | |
| **Este trabalho** | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

## 3. Caracterização do problema

O problema de sequenciamento de recuperadoras em estudo pode ser modelado como um problema de sequenciamento em máquinas paralelas não-relacionadas com tempos de preparação dependentes da sequência e restrições de elegibilidade em máquinas. Ele é caracterizado por se ter um conjunto de tarefas $N$ associadas a um conjunto de pilhas de minério $P$ e um conjunto de recuperadoras $RC$, com as características abaixo:

a) Cada tarefa $j \in N$ está associada a uma única pilha de minério $a \in P$;

b) Cada tarefa $j \in N$ possui uma data planejada de entrega, $d_j$, e uma penalidade por atraso $w_j$;

c) Cada tarefa deve ser alocada a uma única recuperadora;

d) O tempo de processamento, ou execução, $p_{ij}$, de uma tarefa $j \in N$ em uma recuperadora $i \in RC$ é dado por $p_{ij} = \frac{q_j}{v_i}$, sendo $q_j$ a quantidade de minério, em toneladas, a ser recuperado na tarefa $j$ e $v_i$ é a taxa de recuperação da recuperadora $i \in RC$, em t/h;

e) Existe um tempo de *setup*, $S_{ijk}$, para se processar a tarefa $k \in N$ após a tarefa $j \in N$ na recuperadora $i \in RC$. Este tempo de *setup* refere-se ao deslocamento da recuperadora após a conclusão de uma tarefa para acessar a próxima tarefa;

f) Para facilitar a modelagem do problema é definida uma tarefa fictícia, denominada tarefa 0, que será a primeira a ser executada em todas as recuperadoras. Desta forma, existe um tempo de preparação $S_{i0j}$ para processar a tarefa $j \in N$ na primeira posição da recuperadora $i \in RC$. O tempo de processamento da tarefa fictícia em uma recuperadora $i \in RC$ é zero;

g) Ao começar a ser recuperada, uma tarefa $j \in N$ não pode ter sua recuperação interrompida e posteriormente retomada pela mesma recuperadora ou por outra;

h) Todas as tarefas estão disponíveis no instante 0;

i) Cada recuperadora $i \in RC$ possui uma velocidade de locomoção, em m/min, e uma velocidade de giro, em g/min. Ambas são representadas pela variável $S_{ijk}$;

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

j) Uma recuperadora $i \in RC$ é elegível para recuperar uma tarefa $j \in N$ do pátio, e escreve-se, $e_{ij} = 1$, se essa recuperadora $i$ locomove-se sobre os trilhos de uma berma que delimita o pátio. Caso contrário, $e_{ij} = 0$. Uma berma é uma área que delimita dois pátios adjacentes.

O objetivo do problema é encontrar um sequenciamento das $|N|$ tarefas nas $|RC|$ recuperadoras de forma a minimizar a soma ponderada dos atrasos na programação das tarefas.

Para melhor compreensão do problema, considere um pátio de dimensões reduzidas mostrado na Figura 1, com duas recuperadoras (RC01 e RC02) e seis pilhas (P01, P02, P03, P04, P05 e P06) a serem retomadas.

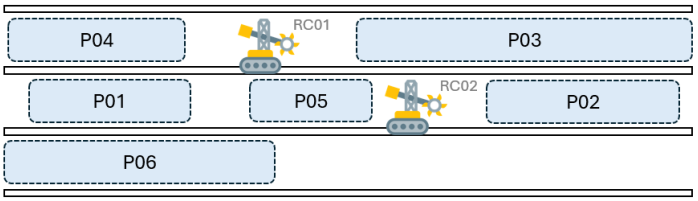



Figura 1: Exemplo de recuperação em um pátio de estocagem. Fonte: Autor (2024).

As características das tarefas e da elegibilidade das recuperadoras são descritas na Tabela 2. Na coluna "Tarefa" estão listadas as identificações das tarefas. A coluna "Pilha" indica a pilha associada a cada tarefa, enquanto a coluna "Quantidade" representa a quantidade de material presente na pilha, medida em toneladas. Na coluna "Data de entrega" está a data planejada de conclusão para cada tarefa, em horas. A coluna "Penalidade" indica a penalidade $w_j$ a ser aplicada à tarefa $j$ que tem um atraso $T_j$ na sua entrega. A coluna "Elegibilidade" indica se a recuperadora é elegível para recuperar uma pilha. O valor $e_{ij} = 1$ indica que a recuperadora é elegível, enquanto o valor $e_{ij} = 0$ indica o contrário.

Tabela 2: Características das tarefas e da elegibilidade das recuperadoras. Fonte: Autor (2024).

| Tarefa | Pilha | Quantidade | Data de entrega | Penalidade | Elegibilidade $e_{ij}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | $a$ | (t) | $d_j$ | $w_j$ | RC01 | RC02 |
| 1 | P02 | 47590 | 10 | 1,0 | 1 | 1 |
| 2 | P05 | 29880 | 26 | 1,1 | 1 | 1 |
| 3 | P04 | 43160 | 17 | 1,2 | 1 | 0 |
| 4 | P03 | 81890 | 12 | 1,1 | 1 | 0 |
| 5 | P06 | 66400 | 17 | 1,3 | 0 | 1 |
| 6 | P01 | 38730 | 16 | 1,2 | 1 | 1 |

A Tabela 3 apresenta as características das recuperadoras. Na coluna "Recuperadora" são listadas as identificações das recuperadoras. Na coluna "Taxa de recuperação" é indicada a taxa de recuperação de cada recuperadora, expressa em toneladas por hora. Já nas Tabelas 4 e 5 estão os tempos de *setup* para essas tarefas nas recuperadoras RC01 e RC02, em horas, respectivamente.

Tabela 3: Características das recuperadoras. Fonte: Autor (2024).

| Recuperadora | Taxa de recuperação (t/h) |
|---|---|
| $i$ | $v_i$ |
| RC01 | 7000 |
| RC02 | 6000 |

Na Figura 2 é ilustrada a solução ótima para essas seis tarefas nas duas recuperadoras. Como pode ser observado, na recuperadora RC01 estão alocadas as tarefas 4, 3 e 2, respectivamente.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

Tabela 4: Tempos de *setup* para a recuperadora RC01. Fonte: Autor (2024).

| RC01 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000 | 0,333 | 1,000 | 0,167 | 0,667 | 0,667 |
| 2 | 0,167 | 0,000 | 0,500 | 0,667 | 0,500 | 0,500 |
| 3 | 0,667 | 1,000 | 0,000 | 1,00 | 0,167 | 0,833 |
| 4 | 1,000 | 0,333 | 0,333 | 0,000 | 0,833 | 0,333 |
| 5 | 1,000 | 0,500 | 0,167 | 1,000 | 0,000 | 0,333 |
| 6 | 0,833 | 1,000 | 0,833 | 0,500 | 1,000 | 0,000 |

Tabela 5: Tempos de *setup* para a recuperadora RC02. Fonte: Autor (2024).

| RC02 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,000 | 0,333 | 1,000 | 0,500 | 1,000 | 0,667 |
| 2 | 1,000 | 0,000 | 0,167 | 0,500 | 0,333 | 0,167 |
| 3 | 0,167 | 0,500 | 0,000 | 0,167 | 0,667 | 0,167 |
| 4 | 0,333 | 0,333 | 0,500 | 0,000 | 0,667 | 0,167 |
| 5 | 0,333 | 0,333 | 0,167 | 0,167 | 0,000 | 0,667 |
| 6 | 0,333 | 0,667 | 0,833 | 0,500 | 1,000 | 0,000 |

Já na recuperadora RC02, estão alocadas as tarefas 1, 6 e 5. A parte hachurada representa os tempos de preparação, e a parte colorida o tempo de processamento de cada tarefa. Os tempos de conclusão de cada tarefa, em horas, também são relatados no eixo das abscissas.

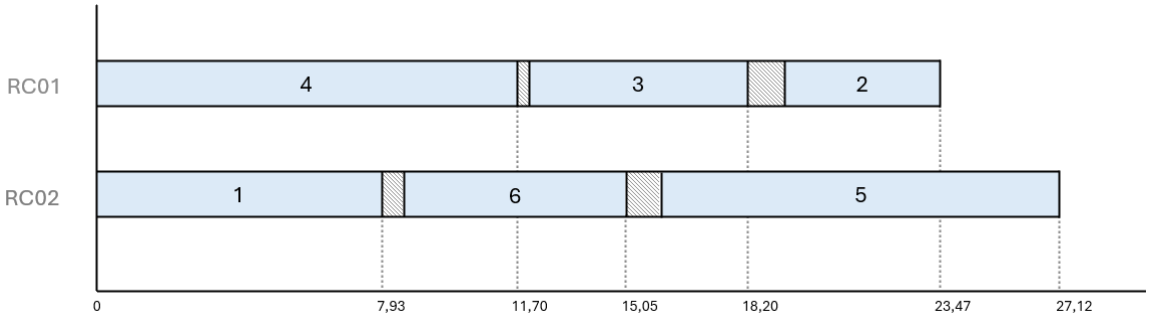



Figura 2: Solução ótima do exemplo. Fonte: Autor (2024).

Como as tarefas 3 e 5 são as únicas realizadas com atraso, então a função objetivo $z$ é calculada como abaixo:

$$z = w_3 \times T_3 + w_5 \times T_5$$
$$z = 1{,}2 \times 1{,}197 + 1{,}3 \times 10{,}12 = 14{,}592$$

## 4. Formulação matemática proposta

Nesta seção apresenta-se uma formulação MILP para o problema em estudo. Para apresentá-lo, sejam os conjuntos, índices, parâmetros de entrada e variáveis auxiliares e de decisão:

**Conjuntos**:

$P$: Conjunto de pilhas para serem carregadas;

$N$: Conjunto de tarefas de recuperação, $N = \{1, \cdots, |N|$. Cada tarefa $j \in N$ está associada a uma pilha $a \in P$;

$N_0$: Conjunto de tarefas com a adição da tarefa fictícia 0, isto é, $N_0 = N \cup \{0\}$;

$RC$: Conjunto de recuperadoras (ou máquinas) responsáveis por executar as tarefas, $RC = \{1, \cdots, |RC|$.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

**Índices**:

$j$, $k$: Índices para elementos do conjunto $N$;

$i$: Índice para um elemento do conjunto $RC$;

$a$: Índice para um elemento do conjunto $P$;

**Parâmetros de entrada**:

$q_j$: Quantidade de minério a ser recuperado na tarefa $j$;

$v_i$: Taxa de recuperação da recuperadora $i \in RC$;

$p_{ij}$: Tempo de processamento da tarefa $j \in N$ na recuperadora $i \in RC$, calculado como $p_{ij} = \frac{q_j}{v_i}$;

$S_{ijk}$: Tempo de deslocamento (ou tempo de preparação) para a recuperadora $i$ executar a tarefa $k$ imediatamente após a tarefa $j$;

$e_{ij}$: Recebe o valor 1 se a recuperadora $i \in RC$ é elegível para processar a tarefa $j \in N$ e 0 caso contrário. A elegibilidade está relacionado com a possibilidade da recuperadora $i$ acessar o pátio onde a pilha $a$ da tarefa $j$ está localizada;

$B$: Constante suficientemente grande;

$d_j$: Data de entrega planejada da tarefa $j \in N$;

$w_j$: Penalidade por atraso na entrega da tarefa $j \in N$.

**Variáveis auxiliares e de decisão**:

$x_{ijk}$: Variável binária que assume valor 1 se a tarefa $k$ será executada imediatamente após a tarefa $j$ na recuperadora $i$ e 0, caso contrário;

$C_{ij}$: Tempo de conclusão da tarefa $j$ na recuperadora $i$;

$C_j$: Tempo de conclusão da tarefa $j$;

$T_j$: Tempo de atraso da tarefa $j$, dado por $T_j = \max\{C_j - d_j, 0\}$.

As expressões matemáticas (1) a (12) representam a formulação MILP para o problema em estudo.

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{|N|} w_j T_j \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{|RC|} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k \\ e_{ij}=1 \\ e_{ik}=1}}^{|N|} x_{ijk} = 1 \qquad \forall k \in N \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{|RC|} \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k \\ e_{ij}=1 \\ e_{ik}=1}}^{|N|} x_{ijk} \leq 1 \qquad \forall j \in N \tag{3}$$

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

$$\sum_{\substack{k=1 \\ e_{ik}=1}}^{|N|} x_{i0k} \leq 1 \qquad \forall i \in RC \tag{4}$$

$$\sum_{\substack{h=0 \\ h \neq k \\ h \neq j \\ e_{ih}=1}}^{|N|} x_{ihj} \geq x_{ijk} \qquad \forall j,k \in N, j \neq k, \forall i \in RC, e_{ij} = 1, e_{ik} = 1 \tag{5}$$

$$C_{ik} + B(1 - x_{ijk}) \geq C_{ij} + S_{ijk} + p_{ik} \quad \forall j \in N_0, \forall k \in N, j \neq k, \forall i \in RC, e_{ij} = 1, e_{ik} = 1 \tag{6}$$

$$C_{i0} = 0 \qquad \forall i \in RC \tag{7}$$

$$C_j \geq C_{ij} \qquad \forall j \in N, \forall i \in RC, e_{ij} = 1 \tag{8}$$

$$T_j \geq C_j - d_j \qquad \forall j \in N \tag{9}$$

$$T_j \geq 0 \qquad \forall j \in N \tag{10}$$

$$C_{ij} \geq 0 \qquad \forall j \in N, \forall i \in RC, e_{ij} = 1 \tag{11}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \qquad \forall j \in N_0, \forall k \in N, j \neq k, \forall i \in RC, e_{ij} = 1, e_{ik} = 1 \tag{12}$$

O objetivo (1) é minimizar o atraso total ponderado. As restrições (2) asseguram que cada tarefa $k$ seja designada exclusivamente para uma recuperadora $i$ elegível e que tenha apenas uma tarefa predecessora $j$ também elegível nessa recuperadora. As restrições (3) impõem um limite máximo de uma tarefa sucessora para cada tarefa $j$, desde que ambas as tarefas sejam elegíveis na recuperadora $i$. Da mesma forma, mediante as restrições (4), é estabelecido um limite máximo também de uma tarefa sucessora para as tarefas fictícias em cada recuperadora, de forma que a tarefa sucessora seja elegível na recuperadora. As restrições (5) garantem que, se uma tarefa $j$ é predecessora imediata de uma tarefa $k$, sendo $j$ e $k$ elegíveis na recuperadora $i$, então há necessariamente uma tarefa predecessora imediata de $j$ também elegível na recuperadora $i$. As restrições (6) têm por finalidade regular os tempos de conclusão das tarefas elegíveis em cada recuperadora. Se a tarefa $k$ está programada imediatamente após a tarefa $j$ na recuperadora $i$ ($x_{ijk} = 1$), então o tempo de conclusão $C_{ik}$ deve ser maior ou igual ao tempo de conclusão da tarefa $j$, $C_{ij}$, somado ao tempo de preparação entre $j$ e $k$ e ao tempo de processamento de $k$. Se $x_{ijk} = 0$, a constante $B$ tornará essas restrições redundantes. As restrições (7) estabelecem os tempos de conclusão nulos para as tarefas fictícias. As restrições (8) definem o tempo de conclusão da tarefa $j$ em uma recuperadora elegível. As restrições (9) definem os tempos de atraso de cada tarefa. As restrições (10), (11) e (12) definem o domínio das variáveis de decisão e auxiliares.

## 5. Experimentos computacionais

Os experimentos computacionais foram realizados utilizando um computador com processador Intel(R) Xeon(R), 2,20 GHz, 12 GB de memória RAM e sistema operacional Ubuntu 22.04.3 LTS. A formulação matemática foi implementada no resolvedor Gurobi, versão 11.0.2. O parâmetro de tempo limite do resolvedor foi estabelecido como 3600 segundos. Já o parâmetro de foco na integralidade, também conhecido como *integrality focus*, foi definido com valor igual a 1 para garantir que as variáveis binárias não sejam influenciadas por problemas de arredondamento durante a resolução do problema.

Esta seção é organizada como segue. Na Seção 5.1 são apresentadas as instâncias propostas para avaliar a formulação MILP utilizando um resolvedor matemático. Já na Seção 5.2 são reportados os resultados obtidos.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

### 5.1. Instâncias

Para avaliar a formulação proposta, foram criadas 30 instâncias de pequeno porte baseadas em dados operacionais do Porto de Tubarão, da Vale S.A, localizado em Vitória-ES. Estes dados foram coletados no estudo de Jesus-Junior et al. [2024], que trata uma outra variante do problema de sequenciamento de recuperadoras. As instâncias foram divididas em seis grupos: 1) $|RC| = 2$ e $|N| = 8$; 2) $|RC| = 2$ e $|N| = 10$; 3) $|RC| = 2$ e $|N| = 12$; 4) $|RC| = 4$ e $|N| = 8$; 5) $|RC| = 4$ e $|N| = 10$; e 6) $|RC| = 4$ e $|N| = 12$.

A seguir, são apresentadas as demais características de cada instância. A quantidade de minério em cada pilha, em toneladas, foi gerado aleatoriamente utilizando uma distribuição uniforme no intervalo $[7000, 100000]$, considerando apenas valores múltiplos de $10$. A taxa de recuperação de cada recuperadora foi gerada aleatoriamente, seguindo uma distribuição uniforme entre os valores $\{5000, 6000, 7000\}$, em toneladas por hora. As datas de entrega foram geradas aleatoriamente seguindo uma distribuição uniforme, em que o limite inferior é determinado pelo menor tempo de processamento de uma tarefa e o limite superior é definido pela soma dos maiores tempos de processamento de cada tarefa, dividida pelo número de máquinas, em horas.

A elegibilidade de cada recuperadora executar uma tarefa foi definida aleatoriamente utilizando uma probabilidade de $10\%$, garantindo-se que cada tarega seja elegível em pelo menos uma recuperadora. Os tempos de preparação foram definidos aleatoriamente seguindo uma distribuição uniforme, a partir do conjunto de valores $\{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$, em minutos. A penalidade foi definida aleatoriamente utilizando uma distribuição uniforme a partir do conjunto de valores $\{0\%, 10\%, 20\%, 30\%\}$.

### 5.2. Resultados

Nesta seção são apresentados os resultados encontrados para a formulação MILP proposta, utilizando o resolvedor Gurobi. A Tabela 6 reporta estes resultados. As três primeiras colunas apresentam as informações de cada instância, a saber: o seu identificador, o número de recuperadoras disponíveis e o número de tarefas de recuperação, respectivamente. A quarta coluna mostra o valor de função objetivo e a quinta coluna o melhor limite inferior encontrado pelo resolvedor. A sexta coluna reporta o *Gap* encontrado e, por fim, a última coluna reporta o tempo computacional gasto pelo resolvedor, em segundos.

Observa-se que em 26 de 30 instâncias avaliadas, o resolvedor Gurobi encontrou a solução ótima. No entanto, para as instâncias 11, 12, 14 e 28, ambas com 12 tarefas, ele não provou a otimalidade da solução encontrada no tempo limite estabelecido. Este resultado mostra a necessidade de desenvolver algoritmos baseados em meta-heurísticas para tratar instâncias maiores do problema.

A Figura 3 ilustra o sequenciamento ótimo para a instância 8. Neste sequenciamento, a recuperadora RC01 deverá executar as tarefas 3, 1, 10, 5, 6 e 8, nesta ordem, enquanto à RC02 são atribuídas às tarefas 7, 2, 4 e 9, nesta ordem. As tarefas 2, 4, 5, 6 e 9 tiveram atraso. Os resultados completos estão disponíveis no material suplementar.

## 6. Conclusões

Este trabalho tratou uma nova variante do problema de sequenciamento de recuperadoras em pátios de minério. Esta variante considera a data de entrega de cada tarefa, a elegibilidade de cada recuperadora para processar cada tarefa e a velocidade de recuperação. O objetivo é minimizar o atraso total ponderado.

Para resolvê-lo, foi apresentada uma formulação MILP. Esta formulação foi implementada no resolvedor Gurobi e testada usando-se um conjunto de instâncias de pequeno porte geradas a partir de dados de operação do Porto de Tubarão. Os resultados mostraram que o resolvedor foi capaz de resolver na otimalidade todas as instâncias com até 10 tarefas e 4 recuperadoras.

Como trabalhos futuros, pretende-se desenvolver algoritmos baseados em meta-heurísticas para tratar instâncias de maior porte.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

Tabela 6: Resultados. Fonte: Autor (2024).

| ID | # Recuperadoras | # Tarefas | $z$ | *Best bound* | *Gap* (%) | Tempo (s) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | 25,464 | 25,464 | 0,00 | 18,06 |
| 2 | | | 29,450 | 29,450 | 0,00 | 2,85 |
| 3 | 2 | 8 | 15,032 | 15,032 | 0,00 | 7,86 |
| 4 | | | 15,115 | 15,115 | 0,00 | 1,68 |
| 5 | | | 20,402 | 20,402 | 0,00 | 10,43 |
| 6 | | | 14,917 | 14,917 | 0,00 | 442,83 |
| 7 | | | 0,000 | 0,000 | 0,00 | 0,82 |
| 8 | 2 | 10 | 45,335 | 45,332 | 0,00 | 401,38 |
| 9 | | | 0,000 | 0,000 | 0,00 | 0,87 |
| 10 | | | 18,957 | 18,956 | 0,00 | 1421,23 |
| 11 | | | 16,417 | 6,048 | 63,16 | 3600,00 |
| 12 | | | 52,736 | 0,000 | 100,00 | 3600,00 |
| 13 | 2 | 12 | 1,207 | 1,207 | 0,00 | 753,65 |
| 14 | | | 42,598 | 22,683 | 46,75 | 3600,00 |
| 15 | | | 6,870 | 6,870 | 0,00 | 1015,37 |
| 16 | | | 15,228 | 15,228 | 0,00 | 30,56 |
| 17 | | | 2,387 | 2,387 | 0,00 | 1,90 |
| 18 | 4 | 8 | 7,018 | 7,018 | 0,00 | 4,80 |
| 19 | | | 0,000 | 0,000 | 0,00 | 0,08 |
| 20 | | | 0,980 | 0,980 | 0,00 | 1,36 |
| 21 | | | 4,123 | 4,123 | 0,00 | 76,82 |
| 22 | | | 0,000 | 0,000 | 0,00 | 1,22 |
| 23 | 4 | 10 | 1,399 | 1,399 | 0,00 | 2,97 |
| 24 | | | 6,720 | 6,720 | 0,00 | 542,68 |
| 25 | | | 1,026 | 1,026 | 0,00 | 10,06 |
| 26 | | | 4,646 | 4,646 | 0,00 | 511,25 |
| 27 | | | 0,000 | 0,000 | 0,00 | 7,64 |
| 28 | 4 | 12 | 21,282 | 0,000 | 100,00 | 3600,00 |
| 29 | | | 2,139 | 2,139 | 0,00 | 22,82 |
| 30 | | | 1,432 | 1,432 | 0,00 | 150,93 |

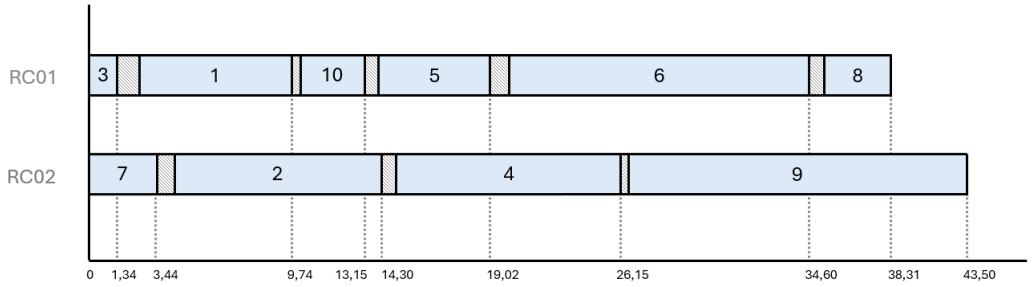



Figura 3: Solução ótima da instância 8. Fonte: Autor (2024).

## Material suplementar

As instâncias e os resultados completos estão disponíveis aqui.

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, CNPq (processos 311074/2023-5 e 302629/2023-8), FAPEMIG (processo CEX-PPM-676-17), Instituto Tecnológico Vale (ITV) e Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP).

## Referências

Angelelli, E., Kalinowski, T., Kapoor, R., and Savelsbergh, M. W. P. (2016). A reclaimer scheduling problem arising in coal stockyard management. *Journal of Scheduling*, 19:563–582. https://doi.org/10.1007/s10951-015-0436-y.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br

Benbrik, O., Benmansour, R., and Elidrissi, A. (2024). Mathematical programming formulations for the reclaimer scheduling problem with sequence-dependent setup times and availability constraints. *Procedia Computer Science*, 232:2959–2972. https://doi.org/10.1016/j.procs.2024.02.112.

Boland, N. L. and Savelsbergh, M. W. P. (2011). Optimizing the hunter valley coal chain. In Gurnani, H., Mehrotra, A., and Ray, S., editors, *Supply Chain Disruptions: Theory and Practice of Managing Risk*, p. 275–302. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-778-5_10.

da Silva, F. D. L. (2015). Proposta de heurística de sequenciamento para retomada de pilhas de minério em pátios de estocagem. In *45º Seminário de Redução de Minério de Ferro e Matérias-primas, 16º Simpósio Brasileiro de Minério de Ferro e 3º Simpósio Brasileiro de Aglomeração de Minério de Ferro*, volume 16, Rio de Janeiro. Associação Brasileira de Metalurgia, Materiais e Mineração (ABM), ABM. https://abmproceedings.com.br/en/article/download-pdf/proposta-de-heuristica-de-sequenciamento-para-retomada-de-pilhas-de-minerio-em-patios-de-estocagem. Acesso em 15/05/2024.

Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). *Computers and intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, volume 174. W. H. Freeman. https://doi.org/10.5555/574848.

Hu, D. and Yao, Z. (2012). Stacker-reclaimer scheduling in a dry bulk terminal. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 25(11):1047–1058. https://doi.org/10.1080/0951192X.2012.684707.

Jesus-Junior, J. D. F., Souza, M. J. F., and Cota, L. P. (2024). A hybrid metaheuristic algorithm for scheduling iron ore reclaiming in ports. *Engineering Optimization*, p. 1–18. https://doi.org/10.1080/0305215X.2024.2340688.

Jesus-Junior, J. D. F., Cota, L. P., and Souza, M. J. F. (2020). Um algoritmo construtivo para o problema de sequenciamento de recuperadoras de minério. In *Anais do 52º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, João Pessoa, 3 a 5 de novembro. Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional (SOBRAPO), Galoá. https://doi.org/10.59254/sbpo-2020-122545.

Kalinowski, T., Kapoor, R., and Savelsbergh, M. W. P. (2017). Scheduling reclaimers serving a stock pad at a coal terminal. *Journal of Scheduling*, 20:85–101. https://doi.org/10.1007/s10951-016-0495-8.

Servare Junior, M. W. J., de Oliveira Rocha, H. R., and Salles, J. L. F. (2018). Otimização na alocação de pilhas em um pátio de estocagem de portos: Modelagem matemática e técnicas de solução. In *Anais do 32º Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes (ANPET 2018)*, volume 32, Gramado, RS. ANPET. https://www.anpet.org.br/anais/documentos/2018/Log%EDstica/Log%EDstica%20de%20Carga%20de%20Longa%20Dist%E2ncia/5_600_RT.pdf. Acesso em 15/05/2024.

Ünsal, Ö. (2020). Reclaimer scheduling in dry bulk terminals. *IEEE Access*, 8:96294–96303. https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2997739.

Wang, C., Lu, X.-w., and Sitters, R. (2018). Scheduling reclaimer operations in the stockyard to minimize makespan. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, 34(3):597–609. https://doi.org/10.1007/s10255-018-0758-6.

**DOI:** 10.59254/sbpo-2024-193585
https://proceedings.science/p/193585?lang=pt-br