

UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA MISTA BASEADO EM EQUILÍBRIO PARA A ALOCAÇÃO ESPACIAL DE FAMÍLIAS A AGÊNCIAS BANCÁRIAS

Anselmo Ramalho Pitombeira Neto
Paulo Ricardo Gorayeb Sucupira Junior
Marcelo Gomes Fossile
Lívia Almada Cruz
Ticiane Linhares Coelho da Silva
José Antonio Fernandes de Macedo
Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Fortaleza, CE, Brasil
anselmo.pitombeira@ufc.br

RESUMO

Em programas sociais de transferência de renda, famílias de baixa renda recebem periodicamente transferências em dinheiro a partir de um órgão governamental. As famílias contempladas com o benefício são alocadas a agências bancárias ou pontos cadastrados, para que possam realizar movimentações financeiras, recebimento de cartões, atualizações de cadastro, etc. Neste trabalho, propõe-se um modelo de programação linear inteira mista para o problema de alocação de famílias a agências bancárias que minimize o deslocamento das famílias às agências, mas que permita equilibrar a distribuição espacial da alocação. O modelo proposto é uma modificação do modelo para o problema de alocação generalizado. A aplicação do modelo é ilustrada com uso de dados reais para um caso na cidade de Fortaleza, Ceará. Discutem-se qualitativamente as alocações obtidas por meio de sua visualização espacial. Realiza-se também um estudo computacional do *tradeoff* entre a minimização das distâncias e do equilíbrio espacial das alocações.

PALAVRAS CHAVE. Alocação Espacial, Alocação Equilibrada, Programação Linear Inteira. Tópicos (AdP&ED – PO na Administração Pública e Educação, PM – Programação Matemática)

ABSTRACT

In social income transfer programs, low-income families periodically receive cash transfers from a government agency. Families receiving the benefit are allocated to bank branches or registered points, so that they can carry out financial transactions, receive cards, update their registration, etc. In this work, a mixed integer linear programming model is proposed with the objective of finding a solution for allocating families to bank branches that minimizes the movement of families to branches, but which allows balancing the spatial distribution of the allocation. The proposed model is a modification of the model for the generalized allocation problem. The application of the model is illustrated using real data for a case in the city of Fortaleza, Ceará. The allocations obtained through their spatial visualization are qualitatively discussed. A computational study of the tradeoff between minimizing distances and the spatial balance of allocations is also carried out.

KEYWORDS. Spital Allocation. Balanced Allocation. Integer Linear Programming.

Paper Topics (AdP&ED – OR in Public Management and Education, PM – Mathematical Programming)

1. Introdução

Em programas sociais de transferência de renda, famílias de baixa renda recebem periodicamente transferências em dinheiro a partir de um órgão governamental. Após a realização de cadastro, as famílias contempladas com o benefício são alocadas a agências bancárias ou pontos cadastrados, para que possam realizar movimentações financeiras, recebimento de cartões, atualizações de cadastro, etc. Idealmente, para reduzir custos associados a deslocamentos, cada família deveria ser alocada à agência ou posto mais próximo de sua residência. No entanto, devido à distribuição espacial não homogênea das moradias familiares e das agências, alocar cada família à agência mais próxima pode implicar em superlotação de algumas agências e queda na qualidade do atendimento das famílias, com longas filas de espera. Logo, deve-se buscar uma alocação que seja espacialmente equilibrada, de forma a não sobrecarregar agências.

Neste trabalho, propõe-se um modelo de programação linear inteira mista com o objetivo de encontrar uma solução de alocação de famílias a agências bancárias que minimize o deslocamento das famílias às agências, mas que permita equilibrar a distribuição da alocação. Uma vez que esses objetivos são conflitantes, o modelo possui um parâmetro que regula o *tradeoff* entre minimização de distância e minimização do desequilíbrio da alocação. Este trabalho foi motivado por um caso real de alocação de famílias beneficiárias de programas sociais na cidade de Fortaleza, Ceará. A aplicação do modelo é ilustrada com uso de dados deste estudo de caso.

2. Trabalhos relacionados

Parece haver poucos trabalhos que abordem exatamente o problema tratado neste artigo. No entanto, comenta-se a seguir sobre trabalhos que abordam temáticas e problemas com características afins, tais como problemas relacionados à acessibilidade, problemas de formação de distritos, e alocação de estudantes a escolas.

Estudos sobre acessibilidade espacial têm sido feitos pelo menos desde a década de 1970. Por exemplo, a relação entre equidade espacial e eficiência econômica é abordada no trabalho de Domański [1979], que analisa distribuições espaciais mais concentradas ou igualitárias e sua relação com a eficiência econômica. Mais recentemente, Luo e Wang [2003] também examinam métodos de acessibilidade espacial acerca de acesso à saúde básica utilizando análise espacial. Monzón et al. [2013] utilizam indicadores calculados a partir de sistemas de informação geográfica para avaliar a eficiência de projetos de trens de alta velocidade em aglomerados urbanos. Farahani et al. [2019] realizam uma revisão bibliográfica acerca da localização de centros de prestação de serviços, em termos de tomada de decisão, funções objetivo, restrições e parâmetros para instalação.

No que tange ao problema de alocação de estudantes a escolas, alguns dos primeiros trabalhos, como o de Franklin e Koenigsberg [1973] e Sutcliffe et al. [1984], desenvolveram soluções relacionadas à segregação de escolas nos Estados Unidos por meio de programação linear. Em alguns desses trabalhos, como abordado por Caro et al. [2004], há diversos critérios para a alocação, seccionando a população e o território, indicando um possível caminho de uma abordagem em agrupamentos. Giesen et al. [2015] desenvolvem um modelo de otimização de alocação de escolas e transporte de estudantes em zona rural com uso de dados do município de Barão do Grajaú, região Nordeste do Brasil. Alifi et al. [2017] relatam o desenvolvimento e aplicação de um modelo de alocação de estudantes na cidade de Bangung, na Indonésia.

Em uma outra vertente, problemas de formação de distritos lidam com a questão de como subdividir uma região geográfica em regiões menores de forma a atender certos critérios desejáveis, como homogeneidade e equilíbrio. Uma das primeiras aplicações de otimização neste problema se deve a Hess et al. [1965], que aplicaram um algoritmo heurístico para delimitar distritos políticos no estado de Connecticut, EUA. Kalcsics e Ríos-Mercado [2019] apresentam uma visão geral dos problemas de formação de distritos. Darmian et al. [2021] aborda o problema de distritalização a

partir de uma aplicação do método no particionamento de áreas residenciais para a implementação de um sistema de saúde sob incerteza de demanda. Diglio et al. [2023] investiga o problema sob a ótica da demanda estocástica e propõe uma contrapartida determinística como base para novos algoritmos de solução.

3. Modelo de alocação baseado em equilíbrio

Uma primeira ideia para se resolver o problema de alocação de famílias a agências bancárias é formulá-lo como um problema de alocação generalizado [Martello e Toth, 1990; Wu et al., 2018]:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (4)$$

em que as variáveis de decisão são binárias e definidas por:

$x_{ij} = 1$ se a família i é alocada à agência j .

$x_{ij} = 0$ caso contrário.

A função-objetivo (1) corresponde à minimização da distância total, em que d_{ij} é a distância entre a família i e a agência j ; a restrição (2) garante que cada família deve ser alocada a exatamente uma agência, enquanto a restrição (3) garante que a quantidade de famílias alocadas a cada agência não pode exceder a capacidade de atendimento da agência, em que b_j é a capacidade de atendimento da agência j .

Uma das dificuldades na aplicação do modelo de alocação generalizado é que, na prática, frequentemente não se conhecem as capacidades $b_j, j = 1, \dots, n$, de atendimento das agências ou a capacidade estimada possui muita incerteza. Uma forma alternativa de abordar o problema é relaxar as restrições de capacidade e incluir como um segundo objetivo a minimização do *desequilíbrio* da alocação das famílias às agências. Inicialmente, definiu-se como medida de desequilíbrio da alocação das famílias às agências a *dispersão* da alocação em relação à uma alocação média. Seja $\bar{x}$ a alocação média de famílias às agências, definida como a razão entre o número de famílias m e o número de agências n :

$$\bar{x} = \frac{m}{n}.$$

Logo, $\bar{x}$ é o número de famílias que deve ser alocado a cada agência se desejarmos uma alocação maximamente equilibrada (ou, de forma equivalente, minimamente desequilibrada), já que todas as agências teriam o mesmo número de famílias alocadas. Seja

$$\bar{b}_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$$

o número de famílias alocadas à agência j . Dada uma alocação de famílias às agências, pode-se definir como uma medida de desequilíbrio a soma dos desvios absolutos da quantidade de famílias

alocadas em cada agência em relação à alocação média. Dessa forma, pode-se formular o seguinte modelo:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} + \rho \sum_{j=1}^n |\bar{b}_j - \bar{x}| \quad (5)$$

s.a.

$$\bar{b}_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n. \quad (8)$$

A função-objetivo (5) corresponde à minimização da soma das distâncias e a minimização do desequilíbrio da alocação, em que $\rho > 0$ é um parâmetro que define uma penalização (ou importância) associada ao desequilíbrio da alocação entre as agências. Quanto maior ρ , mais o desequilíbrio da alocação é penalizado.

Adicionalmente, nota-se que o modelo (5)-(8) não pode ser resolvido diretamente devido aos valores absolutos na função-objetivo. A função valor absoluto pode ser substituída por um conjunto de variáveis auxiliares e restrições da seguinte forma [Williams, 2013]: definem-se variáveis auxiliares não negativas $y_j \geq 0$ e restrições

$$-y_j \leq \bar{b}_j - \bar{x} \leq y_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Dessa forma, quanto mais próximo de zero estiver o valor de y_j , mais as restrições (9) forçarão a redução da diferença $\bar{b}_j - \bar{x}$. Portanto, pode-se equivalentemente resolver o seguinte modelo de programação linear inteira mista:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} + \rho \sum_{j=1}^n y_j \quad (10)$$

s.a.

$$\bar{b}_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (11)$$

$$\bar{b}_j - \bar{x} \leq y_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (12)$$

$$\bar{b}_j - \bar{x} \geq -y_j \quad j = 1, \dots, n, \quad (13)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad (14)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, \quad (15)$$

$$y_j \in [0, +\infty), \quad j = 1, \dots, n. \quad (16)$$

O modelo dado pelas equações (10)-(16) é o modelo de alocação baseado em equilíbrio proposto neste trabalho.

4. Resultados numéricos

A aplicação do modelo de alocação baseado em equilíbrio será ilustrada com dados reais referentes ao problema de alocação de famílias beneficiárias de um dos programas sociais na cidade

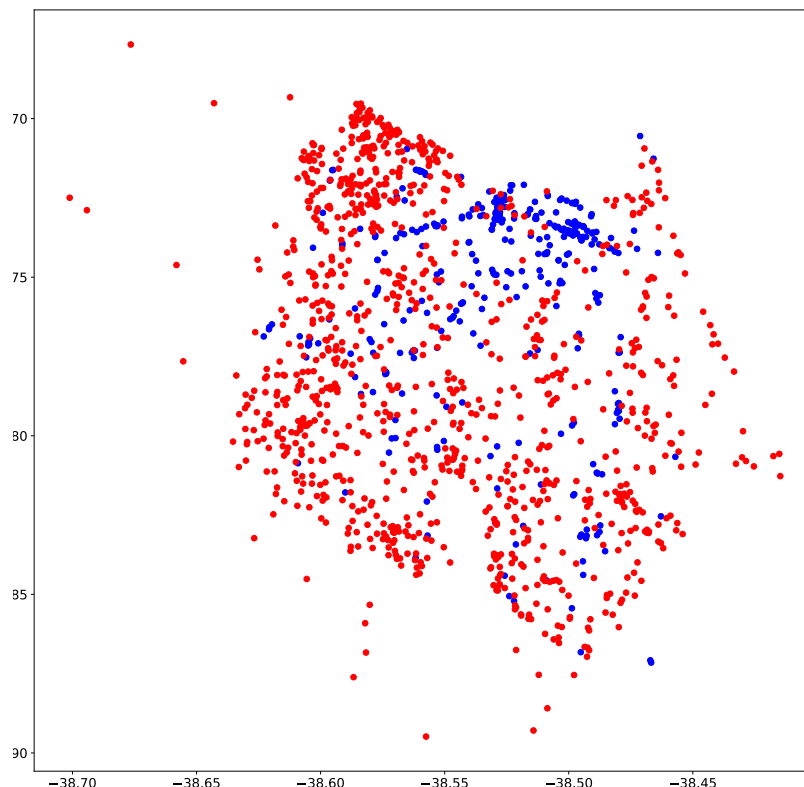


Figura 1: Localização de 1025 famílias beneficiárias (vermelho) e das 360 agências (azul) na cidade de Fortaleza - CE

de Fortaleza, Ceará. A Figura 1 exibe a alocação espacial das 1025 famílias beneficiadas pelo referido programa e os 360 pontos (entre agências bancária e outros postos autorizados) em que as famílias podem ser alocadas para recebimento do cartão do benefício, atualização cadastral, entre outros serviços. Pode-se observar que a distribuição de famílias e de agências não é uniforme, com a maior parte das famílias localizadas em regiões mais periféricas da cidade, e as maior parte das agências localizadas na região central da cidade (note que, embora não se tenha desenhado os contornos da cidade, é possível perceber sua forma a partir dos pontos, com o litoral ao norte).

O modelo foi implementado usando a linguagem Python com a biblioteca Pyomo, e resolvido com uso do *solver* Gurobi. A alocação obtida por meio da solução do modelo de alocação equilibrada com $\rho = 1000$ é exibida na Figura 2. Essa solução aloca algumas famílias a agências um pouco mais distantes de suas residências, de forma a garantir um maior equilíbrio na alocação das famílias às agências. O Gurobi foi capaz de encontrar a solução ótima nesta instância.

Ao se aumentar ρ , penaliza-se mais o desequilíbrio da alocação das famílias às agências. Em contrapartida, a distância média percorrida pelas famílias aumenta. Variou-se o valor de ρ no intervalo $[0, 3200]$, com passos de 10 a cada iteração e para cada valor de ρ resolveu-se o modelo de alocação baseado em equilíbrio. Os passos foram escolhidos de forma a demandar menos recursos computacionais e de não perder a suavidade na curva do resultado gráfico, apresentada na Figura 3. Pode-se observar que existe um platô quando $\rho = 2950$, em que o somatório das distâncias é $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij}x_{ij} = 4777$ km, aproximadamente. Neste ponto, tem-se o equilíbrio máximo da alocação. A Figura 4 exibe a solução de alocação com equilíbrio máximo. Neste caso, tem-se em média três famílias alocadas em cada agência.

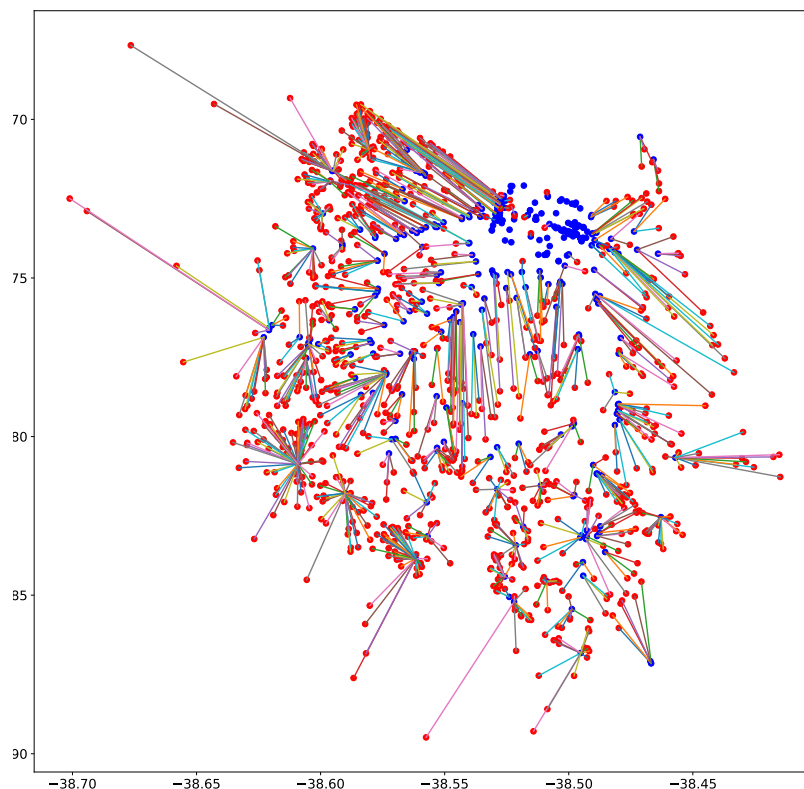


Figura 2: Solução de alocação baseada em equilíbrio para $\rho = 1000$

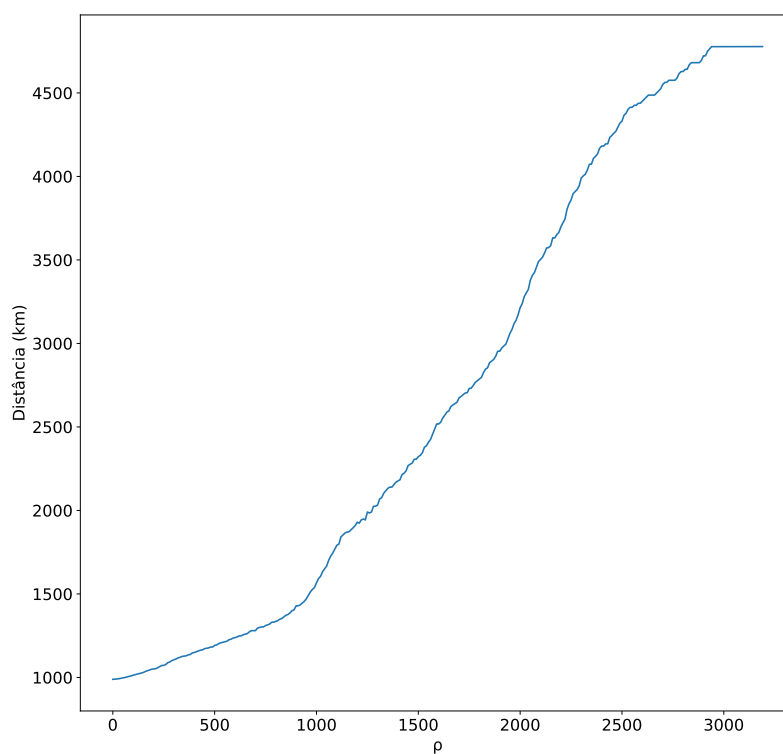


Figura 3: Comportamento do somatório das distâncias das famílias às agências em relação a ρ .

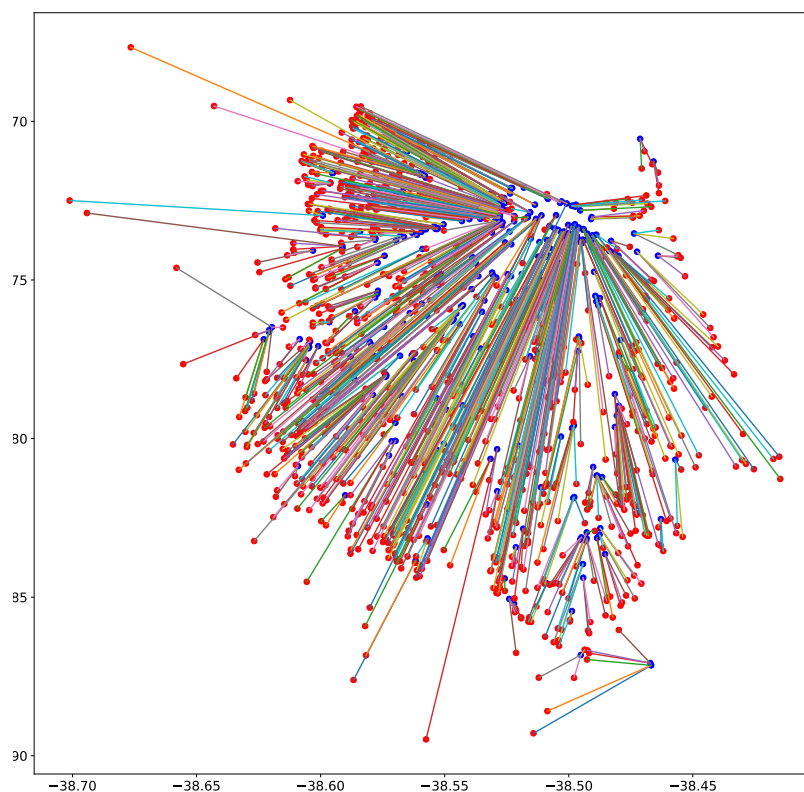


Figura 4: Solução de alocação baseada em equilíbrio para $\rho = 2950$

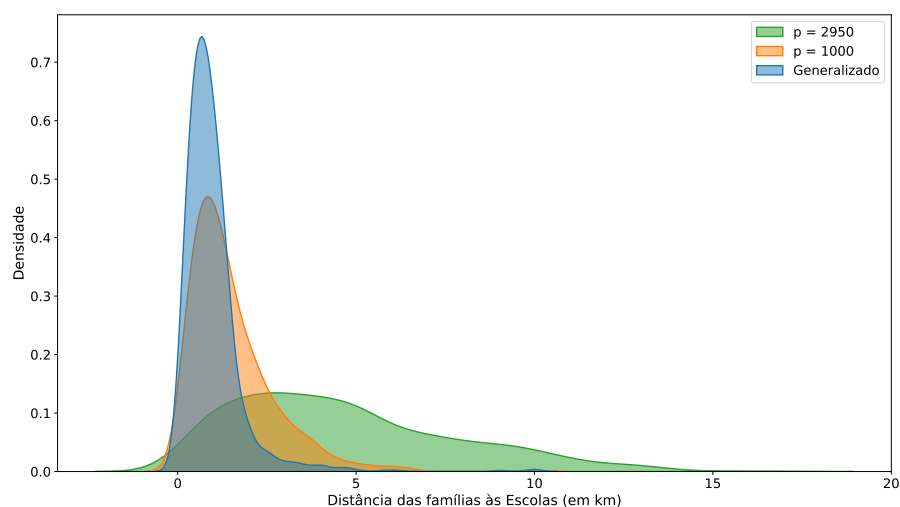


Figura 5: Histograma (suavizado por estimação de densidade por kernel) das distâncias das famílias às suas respectivas agências para o modelos de alocação generalizado e de alocação baseado em equilíbrio.

Tabela 1: Estatísticas da variável “distância das famílias às agências” (em km) para as alocações obtidas com o modelo de alocação generalizado (M1) e baseado em equilíbrio (M2).

Estatística	Distâncias M1	Distâncias M2	
		$\rho = 1000$	$\rho = 2950$
Média	0,9646	1,5228	4,6605
Mediana	0,8024	1,2032	4,0862
Desvio-padrão	0,8503	1,2132	3,0912
Min	0,0132	0,0132	0,0132
Max	10,0243	10,031	16,621

Além da distância total da alocação das famílias às agências, é interessante visualizar a distribuição das distâncias de cada família à agência a qual foi alocada. A Figura 5 exibe a distribuição das distâncias para as alocações com $\rho = 1000$ e $\rho = 2950$. Também é exibida uma alocação obtida pela solução do modelo de alocação generalizado (Equações (1)-(4)), com capacidade das agências todas iguais a 100, como referência. Essa capacidade produz alguma folga nas agências, de forma que cada família é alocada em uma agência próxima de sua residência. Para a construção desta figura, suavizaram-se os histogramas das distâncias com uso da técnica de estimação de densidade por kernel [Davis et al., 2011].

Observa-se que na solução produzida pelo modelo de alocação generalizado tem-se uma menor dispersão de distâncias, representadas pela curva azul. Neste caso, a maioria das famílias é alocada à agência mais próxima de sua casa. Quando se aplica a penalização ao desequilíbrio da alocação, a dispersão da curva de distâncias tende a aumentar, podendo ser observado pela transição da curva azul para laranja, e em seguida da curva laranja para a verde. Isso ocorre porque, para equilibrar melhor a alocação das famílias às agências, algumas famílias são alocadas a agências mais distantes. A Tabela 1 exibe algumas estatísticas descritivas sobre as alocações. Em particular, note que a alocação baseada em equilíbrio com $\rho = 1000$ aumentou a distância média de deslocamento das famílias, mas praticamente não aumentou a maior distância (estatística “max” na Tabela 1).

Do ponto de vista de um gestor de políticas públicas, que precisa definir a alocação real das famílias às agências, essa análise de *tradeoff*, acompanhada da visualização das distribuições de alocações diferentes como na Figura 5 e das respectivas estatísticas, pode ser uma valiosa ferramenta de apoio à tomada de decisão.

5. Conclusão

Neste artigo, foi proposto um modelo de programação linear inteira mista baseado em equilíbrio para a alocação espacial de famílias a agências bancárias. O modelo foi aplicado a dados reais de famílias da cidade de Fortaleza, Ceará, cuja solução exata pode ser obtida com uso de um solver comercial. Também se estudou por meio de experimentos computacionais o *tradeoff* entre a minimização da distância total de deslocamento e a minimização do desequilíbrio da alocação das famílias às agências, a fim de analisar o impacto do parâmetro de penalização ρ na distância total de deslocamento das famílias. Observou-se que as alocações das famílias às agências mais próximas resultaria numa maior concentração em algumas agências, possivelmente gerando congestionamento nesses estabelecimentos. Em contrapartida, uma alocação equilibrada se mostra mais custosa para as famílias em termos de distância.

O modelo proposto foi desenvolvido a partir de uma modificação do modelo para o problema de alocação generalizado. Do ponto de vista de complexidade computacional, uma vez que o problema de alocação generalizado é $\mathcal{NP}$ -difícil, conjectura-se que o modelo baseado em equilíbrio

também o seja, embora não tenha sido feito um esforço formal e rigoroso para se demonstrar isso. No entanto, a instância resolvida no artigo, obtida a partir de dados reais, foi rapidamente resolvida por um solver comercial. Dessa forma, é possível que outras instâncias reais possam ser resolvidas por algoritmos exatos, embora no pior caso possa haver instâncias difíceis que exijam tempo exponencial para serem resolvidas.

Como trabalhos futuros, sugere-se estender o modelo baseado em equilíbrio de forma a incorporar explicitamente a incerteza na localização das famílias e na capacidade de atendimento das agências, por meio de programação estocástica, ou o desenvolvimento de modelos baseados em otimização robusta.

Agradecimentos

A pesquisa relatada neste trabalho contou com o apoio da Fundação Cearense de Amparo à Pesquisa (FUNCAP), projeto “Plataforma Big Data para Acelerar a Transformação Digital do Estado do Ceará”, sob o número 04772551/2020.

Referências

- Alifi, M. R., Hayati, H., e Supangkat, S. H. (2017). Optimization of school network using location-allocation analysis: Case study: Bandung, indonesia. In *2017 IEEE Region 10 Symposium (TENSYP)*, p. 1–6. IEEE.
- Caro, F., Shirabe, T., Guignard, M., e Weintraub, A. (2004). School redistricting: Embedding gis tools with integer programming. *Journal of the Operational Research Society*, 55(8):836–849.
- Darmian, S. M., Fattahi, M., e Keyvanshokoo, E. (2021). An optimization-based approach for the healthcare districting under uncertainty. *Computers & Operations Research*, 135:105425.
- Davis, R. A., Lii, K.-S., e Politis, D. N. (2011). Remarks on some nonparametric estimates of a density function. In *Selected Works of Murray Rosenblatt*, p. 95–100. Springer.
- Diglio, A., Peiró, J., Piccolo, C., e Saldanha-da Gama, F. (2023). Approximation schemes for districting problems with probabilistic constraints. *European Journal of Operational Research*, 307(1):233–248.
- Domański, R. (1979). Accessibility, efficiency, and spatial organization. *Environment and Planning A*, 11(10):1189–1206.
- Farahani, R. Z., Fallah, S., Ruiz, R., Hosseini, S., e Asgari, N. (2019). Or models in urban service facility location: A critical review of applications and future developments. *European Journal of Operational Research*, 276(1):1–27.
- Franklin, A. D. e Koenigsberg, E. (1973). Computed school assignments in a large district. *Operations Research*, 21(2):413–426.
- Giesen, R., Oliveira, P. R. E., e Marianov, V. (2015). Rural school location and student allocation. In *Applications of Location Analysis*, p. 273–289. Springer.
- Hess, S. W., Weaver, J., Siegfeldt, H., Whelan, J., e Zitlau, P. (1965). Nonpartisan political redistricting by computer. *Operations Research*, 13(6):998–1006.
- Kalcsics, J. e Ríos-Mercado, R. Z. (2019). Districting problems. In *Location science*, p. 705–743. Springer.

- Luo, W. e Wang, F. (2003). Measures of spatial accessibility to health care in a gis environment: synthesis and a case study in the chicago region. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 30(6):865–884.
- Martello, S. e Toth, P. (1990). *Knapsack Problems: Algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc.
- Monzón, A., Ortega, E., e López, E. (2013). Efficiency and spatial equity impacts of high-speed rail extensions in urban areas. *Cities*, 30:18–30.
- Sutcliffe, C., Board, J., e Cheshire, P. (1984). Goal programming and allocating children to secondary schools in reading. *Journal of the Operational Research Society*, 35(8):719–730.
- Williams, H. P. (2013). *Model Building in Mathematical Programming*. John Wiley & Sons.
- Wu, W., Iori, M., Martello, S., e Yagiura, M. (2018). Exact and heuristic algorithms for the interval min-max regret generalized assignment problem. *Computers & Industrial Engineering*, 125: 98–110.