

Método Heurístico e Exato para o Minimum Broadcast Center

Alfredo Lima

Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense
R. Passo da Pátria, Niterói, 152-470, Rio de Janeiro, Brasil
alfredolima@id.uff.br

Luiz Satoru Ochi

Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense
R. Passo da Pátria, Niterói, 152-470, Rio de Janeiro, Brasil
satoru@ic.uff.br

Bruno Nogueira

Instituto de Computação, Universidade Federal de Alagoas
Av. Lourival Melo Mota, Maceió, 57072-900, Alagoas, Brasil
bruno@ic.ufal.br

Rian G. S. Pinheiro

Instituto de Computação, Universidade Federal de Alagoas
Av. Lourival Melo Mota, Maceió, 57072-900, Alagoas, Brasil
rian@ic.ufal.br

RESUMO

O problema do Minimum Broadcast Center (MBC), que envolve a seleção de um conjunto de nós fonte e a determinação do Minimum Broadcast Time (MBT) a partir desse conjunto. Esse problema é relevante para o design de redes em cidades inteligentes e sistemas distribuídos, especialmente com a Internet das Coisas (IoT). Foram propostos dois métodos para resolver o MBC: um modelo de Programação Linear Inteira (ILP) e uma metaheurística baseada em Algoritmo Genético com Chaves Aleatórias Viciadas (BRKGA). A análise comparativa entre o ILP e o BRKGA em 111 instâncias mostrou que ambos os métodos são eficientes, mas o BRKGA demonstrou maior consistência e rapidez na obtenção de soluções ótimas, especialmente em instâncias maiores onde o ILP teve dificuldade. Essa comparação ressalta a eficácia do BRKGA como heurística para o problema do MBC.

PALAVRAS CHAVE. Redes, Otimização Combinatória, Minimum Broadcast Center.

Tópicos (Otimização Combinatória. Meta-heurísticas)

ABSTRACT

The Minimum Broadcast Center (MBC) problem is crucial for the design of communication networks in smart cities and distributed systems, especially within the context of the Internet of Things (IoT). The MBC problem involves selecting a set of source nodes and determining the Minimum Broadcast Time (MBT) from these nodes. Two methods are proposed to solve the MBC: an Integer Linear Programming (ILP) model and a Biased Random-Key Genetic Algorithm (BRKGA). Comparative analysis on 111 instances shows that both methods are efficient, but the BRKGA demonstrated greater consistency and speed in finding optimal solutions, particularly for larger instances where the ILP struggled. This highlights the effectiveness of the BRKGA as a

heuristic approach to the MBC problem, providing a robust solution method suitable for various network design applications.

KEYWORDS. Networks. Combinatorial Optimization. Minimum Broadcast Center.

Paper topics (Combinatorial Optimization, Metaheuristics)

1. Introdução

No contexto das redes de computadores, a disseminação eficiente de dados é crucial. Diversos estudos visam otimizar essa eficiência, incluindo o problema do MINIMUM BROADCAST TIME (MBT) [Farley et al., 1979]. O MBT consiste em um problema de disseminação (*broadcast*) cujo objetivo é espalhar uma mensagem o mais rapidamente possível para todos os dispositivos em uma rede de computadores. Cada dispositivo que recebe a mensagem pode transmiti-la para outro dispositivo por vez. O objetivo é determinar o menor tempo necessário para que todos na rede recebam a mensagem, começando a partir de um conjunto específico de dispositivos.

O MBT pode ser modelado como um grafo não direcionado $G = (V, E)$, em que os nós são representados pelos vértices e as conexões entre eles pelas arestas ($E \subset V \times V$). Os nós fontes são indicados por V_0 ($V_0 \subseteq V$). O tempo de transmissão T é discretizado em intervalos t ($1 \leq t \leq T$, $t, T \in \mathbb{N}$). O conjunto de vértices que possuem a mensagem no instante t é V_t ($V_{t-1} \subseteq V_t$) e as transmissões no instante t são representadas por E_t ($E_t \subseteq E$). As restrições são: (i) um nó que recebeu a informação torna-se um emissor, e (ii) um nó emissor pode enviar a informação para, no máximo, um vizinho por vez. A função $b(G, V_0)$ computa o tempo mínimo de transmissão a partir dos nós V_0 no grafo G .

Após a definição inicial do MBT, diversas variantes foram propostas para modelar outros problemas de *broadcast*. Uma variante importante é o BROADCAST CENTER DECIDING (BCD) [Harutyunyan e Li, 2021]. O *broadcast center* $BC_G = \{v_0 \mid b(G, \{v_0\}) \leq b(G, \{u\}), \forall u \in V\}$ é o conjunto de vértices que possuem o menor tempo de transmissão no grafo G . No problema BCD, dada uma instância (G, U) , onde $G = (V, E)$ é um grafo e U é um subconjunto de V , o objetivo é verificar se U é um subconjunto de BC_G . Para simplificar a explicação, a definição de BC_G e, consequentemente, do BCD, considera apenas um nó fonte. No entanto, essas definições podem ser estendidas para múltiplos nós fonte. Ou seja, o *broadcast center* para K nós fonte pode ser definido como $BC_G^K = \{V_0 \mid b(G, V_0) \leq b(G, U), \forall U \subseteq V \text{ e } |U| = |V_0| = K\}$. Consequentemente, o BCD é modificado para, dada uma instância (G, U, K) , em que G é um grafo, U é um subconjunto dos conjuntos de vértices, e K é a quantidade de nós fonte, o objetivo é verificar se U é um subconjunto de BC_G^K . Essa é a versão de decisão do problema. Até onde se sabe, este é o primeiro trabalho que considera a versão de otimização do problema. Portanto, neste artigo, a versão de otimização será denominada MINIMUM BROADCAST CENTER (MBC), em que é necessário encontrar apenas um subconjunto que pertença a BC_G^K .

A Figura 1(a) ilustra um exemplo simples de rede com os nós $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ para demonstrar o MBC com $K = 1$. Nas Figuras 1(b)–1(e), são apresentadas soluções ótimas do MBT usando diferentes conjuntos de nós fonte: $V_0 = \{v_1\}$, $V_0 = \{v_2\}$, $V_0 = \{v_3\}$ e $V_0 = \{v_4\}$. O valor do MBT é 3 para $V_0 = \{v_3\}$ e $V_0 = \{v_4\}$, enquanto é 2 para $V_0 = \{v_1\}$ e $V_0 = \{v_2\}$. Portanto, para o MBC com $|V_0| = 1$, existem duas soluções ótimas: $V_0 = \{v_1\}$ e $V_0 = \{v_2\}$.

Observe que o MBC é um problema de dois estágios: (i) definir o conjunto de nós fontes (V_0), e (ii) encontrar o MBT a partir desse conjunto. O interesse em estudar o problema do MINIMUM BROADCAST CENTER (MBC) surgiu a partir de uma necessidade de otimizar o processo de atualização de dispositivos em uma rede *point-to-point* de um parceiro industrial. Nesta rede, os dispositivos utilizavam *Bluetooth Low Energy* (BLE) para comunicação interna, enquanto alguns

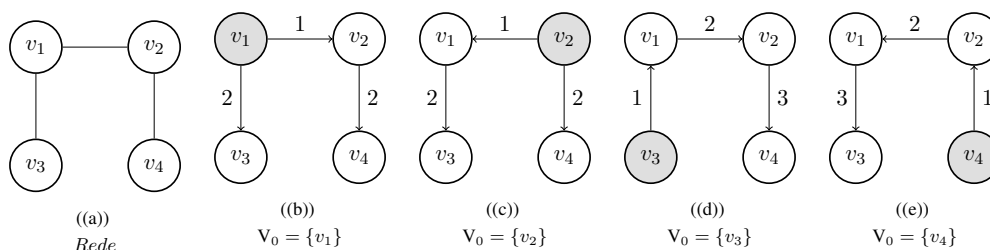


Figura 1: Exemplo de rede e diagramas de transmissão para diferentes conjuntos iniciais V_0 .

(gateways) usavam *General Packet Radio Service* (GPRS) para comunicação externa. O desafio era realizar a atualização do firmware de forma eficiente e confiável, considerando uma imagem de firmware de 200KB.

Duas topologias do BLE foram testadas para a atualização: *Point-to-Point* e *Mesh*. Na *Point-to-Point*, cada dispositivo transmite uma vez por vez, garantindo uma propagação ordenada e gradual. Na *Mesh*, um dispositivo pode atualizar vários vizinhos ao mesmo tempo para acelerar a disseminação. No entanto, os resultados mostraram que a *Point-to-Point* completou a atualização em 2 minutos, enquanto a *Mesh* levou 4,5 horas, mesmo sendo a atualização de um único dispositivo. Embora a *Mesh* permita transmissões simultâneas, o alto consumo de largura de banda causou congestionamento e perda de pacotes, levando a atrasos, como demonstrado por Robledo et al. [2020].

A tarefa de atualizar o firmware de todos os dispositivos na rede de forma eficiente utilizando a topologia *Point-to-Point* é análoga ao problema do MBT, que visa transmitir uma mensagem dos nós de origem para todos os outros nós no menor tempo possível, determinando também os nós mais adequados para atuarem como *gateways* (MBC). Redes bem projetadas devem minimizar o tempo de transmissão e garantir a rápida disseminação de informações, tornando essencial a identificação dos melhores centros de transmissão. Assim, resolver o problema MBC, mesmo que de forma aproximada, é fundamental para o desenvolvimento de redes de comunicação eficientes, robustas e escaláveis.

Este trabalho propõe três contribuições para o MBC: (i) um modelo matemático para o MBC, (ii) um *lower bound* para o MBC, e (iii) uma meta-heurística *Biased Random-Key Genetic Algorithm* (BRKGA) para o MBC.

Na Seção 2, é apresentada uma revisão bibliográfica sobre os problemas MBT e BCD. A Seção 3 traz um modelo matemático e um limite inferior para o MBC. A Seção 4 fornece uma explicação sobre o BRKGA e sua aplicação para resolver o MBC. Os resultados e comparações das propostas são discutidos na Seção 5. Por fim, a Seção 6 apresenta a conclusão e sugestões para trabalhos futuros.

2. Trabalhos Relacionados

A literatura sobre o MBT é extensa, abrangendo algoritmos exatos [Scheuermann e Wu, 1984; Sousa et al., 2018; Ivanova, 2019], aproximativos [Kortsarz e Peleg, 1992; Elkin e Kortsarz, 2003], heurísticos [Scheuermann e Wu, 1984; Sousa et al., 2018], meta-heurísticos [Hoelting et al., 1996; Hasson e Sipper, 2004; Lima et al., 2024] e *matheurísticos* [Lima et al., 2024]. Existem também algoritmos polinomiais para casos específicos de grafos, como árvores [Slater et al., 1981] e grades completas [Jansen e Müller, 1995], todos com a restrição adicional de $|V_0| = 1$. Além disso, há estudos sobre limites inferiores para o MBT [Ivanova, 2019; Lima et al., 2024].

Para o BCD, a maioria dos estudos foca em classes específicas de grafos: (i) Slater et al. [1981] desenvolveram um algoritmo polinomial para o BCD em árvores com $|V_0| = 1$; (ii) Ha-

rutyunyan e Maraachlian [2008] estudaram o BCD em grafos unicíclicos; (iii) Harutyunyan e Maraachlian [2007] exploraram redes de *clusters* de árvores; (iv) Su et al. [2010] apresentaram um algoritmo linear para encontrar o BCD em árvores ponderadas. Além disso, Harutyunyan e Li [2021] provaram que o BCD é $\mathcal{NP}$ -difícil. Como mencionado anteriormente, durante a revisão bibliográfica, não foi identificada na literatura nenhuma proposta para o BCD ou MBC aplicável a grafos arbitrários.

3. Modelo Matemático para o MINIMUM BROADCAST CENTER

O modelo matemático proposto para o MBC é uma adaptação do modelo proposto por Sousa et al. [2018] para o problema MBT. Dado um grafo $G = (V, E)$, em que V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas que representam as conexões entre os vértices, seja K a quantidade de nós fontes, com $1 \leq K \leq |V|$. Considere que $N(i)$ representa o conjunto de nós vizinhos do nó i , e T_{max} seja o limite superior para o tempo em que todos os nós recebem a mensagem, sendo $T_{max} = |V| - K$ o limite trivial. As variáveis utilizadas são definidas da seguinte forma: x_{ij}^t é uma variável binária que assume o valor 1 se o nó i envia a mensagem para o nó j no tempo t , e 0 caso contrário; S_i é uma variável binária que assume o valor 1 se o nó i será um nó fonte, e 0 caso contrário; e T é uma variável de decisão que representa o tempo de transmissão. A partir dessas definições, o modelo proposto é formulado a seguir:

$$\min T \quad (1)$$

$$\text{s. a } \sum_{i \in V} S_i = K \quad (2)$$

$$S_i + \sum_{j \in N(i)} \sum_{t=1}^{T_{max}} x_{ji}^t = 1 \quad \forall i \in V \quad (3)$$

$$\sum_{j \in N(i)} x_{ij}^t \leq 1 \quad \forall i \in V, \forall t \in \{1, \dots, T_{max}\} \quad (4)$$

$$x_{ij}^t \leq S_i + \sum_{\tau=1}^{t-1} \sum_{l \in N(i) \setminus \{j\}} x_{li}^{\tau} \quad \forall (i, j) \in E, \forall t \in \{1, \dots, T_{max}\} \quad (5)$$

$$\sum_{t=1}^{T_{max}} t \cdot x_{ij}^t \leq T \quad \forall (i, j) \in E \quad (6)$$

$$T \in \mathbb{N} \quad (7)$$

$$x_{ij}^t \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in E, \forall t \in \{1, \dots, T_{max}\} \quad (8)$$

$$S_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V \quad (9)$$

A Equação (1) apresenta a função objetivo, que é minimizar o valor de T . A Restrição (2) garante que o número total de nós fonte selecionados seja igual a K . As Restrições (3) asseguram que cada nó será um nó fonte ou receberá a mensagem de um nó vizinho em algum instante t . As Restrições (4) impõem que cada nó envie no máximo uma mensagem aos vizinhos em cada t . As Restrições (5) estabelecem que o nó só pode transmitir se recebeu a mensagem anteriormente ou se é nó fonte. As Restrições (6) condicionam que o valor de T deve ser maior ou igual ao tempo de qualquer transmissão. A Restrição (7) define o domínio de T . E por fim, as Restrições (8) e (9) definem o domínio de cada variável x_{ij}^t e S_i , respectivamente.

3.1. Lower bound para o MINIMUM BROADCAST CENTER

Diferentemente do problema MBT, no qual os nós fontes são fixados, permitindo a utilização de *lower bounds* para definir algumas variáveis x_{ij}^t como 0 [Lima et al., 2024; Sousa et al., 2018], isso não é possível para o MBC, pois qualquer nó pode ser um nó fonte.

Para o exemplo na Figura 2, um grafo P_8 , o MBC com $K = 1$ é 4, e $BC_{P_8}^1 = \{v_4, v_5\}$. A maior distância a partir de qualquer $v \in BC_{P_8}^1$ é 4, o que coincide com o valor do MBC. Assim, é possível utilizar o algoritmo de Floyd-Warshall [Floyd, 1962] como um *lower bound* baseado na distância entre os vértices, uma ideia semelhante à descrita em Lima et al. [2024] para o MBT. No entanto, para $K > 1$, esse *lower bound* não funciona. Por exemplo, para $K = 2$, o MBC de P_8 é 2, onde $BC_{P_8}^2 = \{\{v_2, v_7\}, \{v_2, v_6\}, \{v_3, v_6\}, \{v_3, v_7\}\}$. No entanto, ainda é viável empregar o *lower bound* para o MBT proposto por Ivanova [2019] para o MBC: $\lceil \log_2 \frac{|V|}{K} \rceil \leq T \leq |V| - K$. Ou seja, $\lceil \log_2 \frac{|V|}{K} \rceil \leq T$ pode ser adicionado como uma restrição ao modelo.

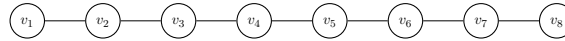


Figura 2: Grafo P_8 .

4. Algoritmo Genético com Chaves Aleatórias Viciadas

O BRKGA, desenvolvido por Gonçalves e Resende [2011], é uma versão avançada dos algoritmos genéticos, originalmente propostos por Holland [1975]. Os algoritmos genéticos são técnicas bioinspiradas que utilizam conceitos como hereditariedade, mutação, seleção natural e recombinação. No BRKGA, os cromossomos são representados por vetores de chaves aleatórias com valores reais no intervalo $[0, 1)$ [Bean, 1994]. Ele divide a população em duas subpopulações – elite e não-elite – para preservar as melhores soluções e promover a diversidade genética. Durante o *crossover*, cada gene do descendente é escolhido aleatoriamente de um dos pais, com maior probabilidade de herdar características do indivíduo da elite, favorecendo a propagação de boas características. Uma proporção fixa da nova geração é composta por indivíduos mutantes, mantendo a diversidade genética e evitando a convergência prematura. Essas características garantem um equilíbrio entre a exploração e a exploração do espaço de soluções.

A Figura 3 ilustra o processo de evolução da população utilizando o BRKGA. Nesse exemplo, são apresentados a cópia da população de elite, a introdução de indivíduos mutantes e o processo de *crossover* com enviesamento.

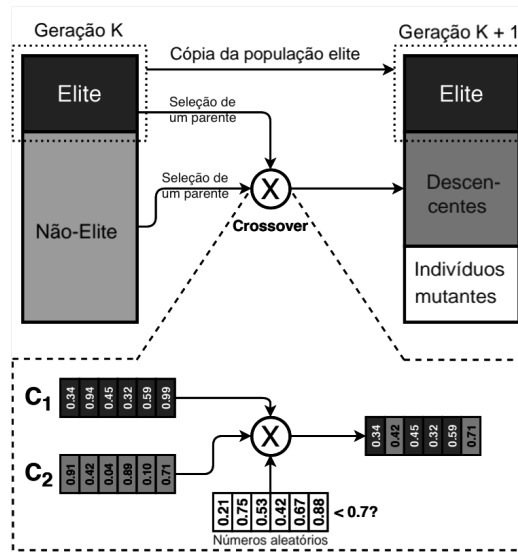


Figura 3: Processo de evolução da população do BRKGA

O BRKGA possui parâmetros configuráveis, como o tamanho da população, a proporção

de indivíduos elite, a proporção de mutantes e a probabilidade de herança dos genes durante o *crossover*. Esses parâmetros permitem ajustar o algoritmo para diferentes problemas, tornando necessário um processo de ajuste fino.

4.1. BRKGA para o MBC

Este trabalho visa resolver o problema MBC usando o BRKGA. Primeiro, será detalhada a técnica para melhorar o cálculo do MBT descrita por Slater et al. [1981] e Lima et al. [2024]. O algoritmo de Slater et al. [1981], chamado de SCHA, computa o MBT de grafos do tipo floresta de forma polinomial. Lima et al. [2024] mostraram que a adição do SCHA como método de refinamento é eficaz. Portanto, será utilizado o algoritmo SCHA, que tem um custo computacional de $O(|V| \cdot \log |V|)$ no pior caso. Para mais detalhes sobre esse algoritmo, consulte os trabalhos de Slater et al. [1981] e Lima et al. [2024].

O BRKGA para o MBC foi desenvolvido utilizando a API de Resende [2011], sendo necessária apenas a implementação do procedimento de decodificação. O processo de decodificação e avaliação do indivíduo é descrito no pseudocódigo do Algoritmo 1.

O Algoritmo 1 possui dois níveis de decisão: (i) definição do conjunto de nós fontes ($|V_0| = K$) e (ii) cálculo do tempo de transmissão a partir de V_0 . A entrada do algoritmo é composta por um grafo $G = (V, E)$, a quantidade de nós fontes K , e um vetor de cromossomos Cr , em que Cr tem tamanho $|V|$. Cada Cr_i determina a prioridade do vértice v_i . Os K vértices de maior prioridade formam o conjunto V_0 (linhas 2–10).

Para selecionar as arestas da solução, é escolhido sempre um vértice que possui a informação para transmiti-la a um que ainda não a possui, seguindo a filosofia: o primeiro que recebe é o primeiro que envia. A lista *Order* indica a ordem de transmissão, construída inicialmente com os nós fontes e ordenada pelos valores dos alelos dos nós fontes (linhas 2–10). O conjunto E_F , inicialmente vazio, representa as arestas da solução, e o conjunto *Transmitters* indica os vértices que já possuem a informação, inicialmente preenchido com os vértices de V_0 (linhas 13–26).

Um processo iterativo é então iniciado e continua até que todos os vértices tenham a informação (linhas 13–26). Em cada iteração, percorre-se cada vértice v na lista *Order* (linha 15), selecionando um vizinho u de v que ainda não tenha a informação, com a maior prioridade baseada nos alelos (linhas 16–21). A aresta (v, u) é adicionada ao conjunto E_F (linha 19). No final de cada iteração, os vértices que receberam a informação são adicionados à lista *Order*, mantendo a filosofia de transmissão (linhas 23–25).

Após o término do processo iterativo, o conjunto E_F enumera todas as arestas da floresta $F = (V, E_F)$. A partir dessa floresta e dos nós fontes V_0 , o MBT é computado utilizando o algoritmo SCHA (linha 27). Caso alguma solução encontre o valor igual ao do *lower bound*, o BRKGA interrompe o processo de evolução da população, pois encontrou uma solução ótima. A decodificação tem custo computacional de $O(|V| \cdot |E|)$ no pior caso.

5. Experimentos e Resultados

Nesta seção são apresentados os experimentos computacionais conduzidos para avaliar a eficácia das propostas de ILP e BRKGA. Todos os experimentos foram realizados em um Intel Core i7-8565U com 1,80 GHz, 8 GB de RAM, rodando Ubuntu 18.04.1. Os algoritmos heurísticos foram codificados em C++ e compilados com g++ 7.5 e a flag ‘-O3’. O *framework* BRKGA C++ desenvolvido por Resende [2011] foi utilizado para implementar o BRKGA. O *solver* IBM CPLEX 12.9 foi utilizado para resolver o modelo ILP. Por fim, para ajustar os parâmetros do algoritmo BRKGA, foi adotada a ferramenta Irace [López-Ibáñez et al., 2016].

As melhores configurações de parâmetros identificadas pelo experimento de ajuste foram: (i) o número de indivíduos em cada população $p = \max(100, |V|)$, (ii) a porcentagem de indivíduos elite em cada população $p_e = 0.18$, (iii) a porcentagem de mutantes introduzidos em cada geração

Algoritmo 1: Decodificador

Input : Grafo: $G = (V, E)$, Quantidade de nós fontes: K , Cromossomos: Cr

Output: Tempo de transmissão: $time$, Nós fontes: V_0 ,

```

1 DecoderMBC ( $G, K, Cr$ )
2    $V_0 \leftarrow \emptyset$  // Conjunto que representa os nós fontes
3    $Order \leftarrow InitList()$  // Inicializa a lista  $Order$ 
4   for each  $v \in Sort(V, Cr)$  do // Ordenação em ordem crescente do
      valor do alelo
5      $V_0 \leftarrow AppendItem(V_0, v)$ 
6      $Order \leftarrow PushBack(Order, v)$ 
7     if  $|V_0| = K$  then
8       break
9   end
10  end
11   $E_F \leftarrow \emptyset$  // Inicialização do conjunto de arestas da solução
12   $Transmitters \leftarrow V_0$  // Conjunto inicial de  $Transmitters$ 
13  while  $Transmitters \neq V$  do
14     $NewTransmitters \leftarrow InitList()$  // Lista dos novos
      transmissores
15    for each  $v \in Order$  do
16       $u \leftarrow \operatorname{argmin}_{u \in N(v) \setminus Transmitters} (Cr[u])$  // Seleciona o vizinho com maior
      prioridade que não é um transmissor
17      if  $u \neq \emptyset$  then
18         $NewTransmitters \leftarrow PushBack(NewTransmitters, u)$ 
        // Adicionar o melhor vértice em  $NewTransmitters$ 
19         $E_F \leftarrow AppendItem(E_F, \{(v, u)\})$  // Adiciona a aresta em
         $E_F$ 
20         $Transmitters \leftarrow AppendItem(Transmitters, v)$  // Atualiza o
        conjunto  $Transmitters$ 
21      end
22    end
23    for each  $v \in NewTransmitters$  do
24       $Order \leftarrow PushBack(Order, v)$  // Atualiza a lista  $Order$ 
25    end
26  end
27   $time \leftarrow SCHA-Forest((V, E_F), V_0)$  // Computa o MBT utilizando o
      algoritmo SCHA
28  return  $time, V_0$ 

```

na população $p_m = 0.15$, (iv) a probabilidade de que um descendente herde o alelo de seu parente elite $\rho_e = 0.76$, e (v) o número de populações independentes $K = 1$.

Foi utilizado um limite de tempo de 3600 segundos (1 hora) para o CPLEX resolver o modelo ILP proposto neste trabalho. Para avaliar o desempenho médio do BRKGA, foram realizadas 10 execuções em cada instância, com diferentes sementes aleatórias para cada execução. O limite

de tempo para essas execuções foi estabelecido em 60 segundos.

5.1. Instâncias

Os métodos foram testados em um total de 111 instâncias. Essas instâncias estão disponíveis em Lima et al. [2024] e foram utilizadas para comparar diversos trabalhos da literatura para o MBT. Esta lista inclui:

- **Grafos de Harary** (16 instâncias): Um grafo de Harary, denotado por $H_{k,n}$, é um grafo k -conexo com n vértices que possui o menor número possível de arestas.
- **Instâncias sintéticas baseadas na Árvore Binomial** (36 instâncias): Seja a instância $G = (V, E)$ definida pela união de uma árvore binomial $B_k = (V_B, E_B)$ e um grafo aleatório $G_r = (V_r, E_r)$, onde $V = V_B = V_r$ e $E = E_B \cup E_r$. A árvore binomial B_k é definida recursivamente como: (i) B_0 é um grafo trivial, (ii) B_k é construída a partir de duas árvores binomiais B_{k-1} anexando uma delas como o filho mais à direita (ou à esquerda) da raiz da outra. Uma árvore B_k contém 2^k vértices e possui a propriedade de que o MBC é igual a k se $K = 1$, e $k - 1$ se $K = 2$.
- **Network Data Repository**¹ (59 instâncias): Essas instâncias são baseadas em redes de mundo pequeno conectadas com 100 ou 1000 vértices.

5.2. Experimentos

A Tabela 1 compara a metaheurística BRKGA com o modelo ILP. Para resolver o ILP, em todas as instâncias, foi utilizada a técnica de *warm start* a partir de uma solução do BRKGA. A tabela apresenta os resultados considerando um nó fonte ($K = 1$) e dois nós fontes ($K = 2$).

Para o BRKGA, a tabela mostra: ‘Melhor’, que indica o menor valor de MBC encontrado em 10 execuções; ‘Média’, que indica a média dos valores de MBC em 10 execuções; e ‘Tempo’, que indica o tempo médio necessário para encontrar a melhor solução em segundos, calculado a partir das 10 execuções.

Para o ILP, a tabela mostra: ‘MBC’, que indica o valor de MBC, e ‘Tempo’, que indica o tempo de execução em segundos. Um asterisco (*) indica que o ILP provou a otimalidade da solução; caso contrário, o ‘GAP’ indica o quão próximo a solução atual está da solução ótima em porcentagem.

Para as instâncias **Grafos de Harary**, ambas as técnicas mostraram eficiência semelhante em termos de qualidade de solução. No entanto, o ILP exigiu um tempo considerável para encontrar as soluções e, em um caso específico, apresentou um ‘GAP’ de 68%. Neste conjunto de instâncias, também vale ressaltar que somente a variação do K mudou significativamente o valor de MBC em algumas instâncias.

Para as instâncias **Sintéticas baseadas na Árvore Binomial**, o BRKGA encontrou 26 soluções ótimas para $K = 1$ e 28 soluções ótimas para $K = 2$. O ILP encontrou todas as soluções ótimas para instâncias com até 128 vértices, tanto para $K = 1$ quanto para $K = 2$, mas teve dificuldade para encontrar soluções viáveis para instâncias com 1024 vértices.

Para as instâncias da **Network Repository**, ambos os métodos enfrentaram maior dificuldade. O ILP apresentou soluções de melhor qualidade para instâncias com 100 vértices, tanto para $K = 1$ quanto para $K = 2$. No entanto, para instâncias com 1000 vértices, o ILP não conseguiu provar a otimalidade em nenhuma instância, enquanto o BRKGA foi mais consistente em termos de qualidade.

¹<http://www.networkrepository.com>

Tabela 1: Comparação do BRKGA e ILP em todas as instâncias.

Instância	$K = 1$					$K = 2$				
	BRKGA			ILP		BRKGA			ILP	
	MBC	Média	Tempo	MBC (GAP)	Tempo	MBC	Média	Tempo	MBC (GAP)	Tempo
Grafos de Harary										
$H_{10,30}$	5	5.0	< 0.01	5*	0.01	4	4.0	< 0.01	4*	0.03
$H_{11,50}$	6	6.0	< 0.01	6*	0.02	5	5.0	< 0.01	5*	0.01
$H_{20,50}$	6	6.0	< 0.01	6*	0.04	5	5.0	< 0.01	5*	0.03
$H_{21,50}$	6	6.0	< 0.01	6*	0.04	5	5.0	< 0.01	5*	0.04
$H_{2,100}$	50	50.0	< 0.01	50*	153.0	25	25.0	< 0.01	25 (68.0)	3600.0
$H_{2,17}$	9	9.0	< 0.01	9*	0.44	5	5.0	< 0.01	5*	0.08
$H_{2,30}$	15	15.0	< 0.01	15*	1.21	8	8.0	< 0.01	8*	48.96
$H_{2,50}$	25	25.0	< 0.01	25*	3.32	13	13.0	< 0.01	13*	437.19
$H_{3,17}$	5	5.0	< 0.01	5*	< 0.01	4	4.0	< 0.01	4*	< 0.01
$H_{3,30}$	9	9.0	< 0.01	9*	0.77	5	5.0	< 0.01	5*	0.56
$H_{3,50}$	14	14.0	< 0.01	14*	3.76	8	8.0	< 0.01	8*	940.87
$H_{5,17}$	5	5.0	< 0.01	5*	< 0.01	4	4.0	< 0.01	4*	< 0.01
$H_{6,17}$	5	5.0	< 0.01	5*	< 0.01	4	4.0	< 0.01	4*	< 0.01
$H_{7,17}$	5	5.0	< 0.01	5*	< 0.01	4	4.0	< 0.01	4*	< 0.01
$H_{8,30}$	5	5.0	0.03	5*	0.01	4	4.0	< 0.01	4*	< 0.01
$H_{9,30}$	5	5.0	< 0.01	5*	0.01	4	4.0	< 0.01	4*	0.01
Instâncias sintéticas baseadas na Árvore Binomial										
$B_5 \cup RG_{32,0.05}$	5	5.0	0.92	5*	< 0.01	4	4.0	2.27	4*	< 0.01
$B_5 \cup RG_{32,0.075}$	5	5.0	5.07	5*	< 0.01	4	4.0	1.75	4*	< 0.01
$B_5 \cup RG_{32,0.1}$	5	5.0	0.1	5*	< 0.01	4	4.0	0.1	4*	0.01
$B_5 \cup RG_{32,0.15}$	5	5.0	0.13	5*	< 0.01	4	4.0	0.08	4*	0.01
$B_5 \cup RG_{32,0.2}$	5	5.0	< 0.01	5*	0.01	4	4.0	< 0.01	4*	0.01
$B_5 \cup RG_{32,0.25}$	5	5.0	< 0.01	5*	0.01	4	4.0	< 0.01	4*	0.01
$B_6 \cup RG_{64,0.05}$	7	7.0	60.0	6*	4.38	6	6.0	60.0	5*	121.25
$B_6 \cup RG_{64,0.075}$	7	7.0	60.0	6*	3256.42	6	6.0	60.0	5*	238.63
$B_6 \cup RG_{64,0.1}$	6	6.0	11.07	6*	0.01	5	5.0	11.48	5*	0.02
$B_6 \cup RG_{64,0.15}$	6	6.0	0.05	6*	0.02	5	5.0	0.09	5*	0.03
$B_6 \cup RG_{64,0.2}$	6	6.0	< 0.01	6*	0.03	5	5.0	0.01	5*	0.05
$B_6 \cup RG_{64,0.25}$	6	6.0	< 0.01	6*	0.05	5	5.0	< 0.01	5*	0.06
$B_7 \cup RG_{128,0.05}$	8	8.0	< 0.01	8 (12.0)	3600.0	7	7.0	60.0	6*	392.79
$B_7 \cup RG_{128,0.075}$	8	8.0	60.0	7*	290.74	6	6.9	56.96	6*	194.69
$B_7 \cup RG_{128,0.1}$	7	7.0	4.09	7*	0.09	6	6.0	8.62	6*	0.11
$B_7 \cup RG_{128,0.15}$	7	7.0	0.08	7*	0.16	6	6.0	0.16	6*	0.2
$B_7 \cup RG_{128,0.2}$	7	7.0	0.01	7*	0.25	6	6.0	0.02	6*	0.33
$B_7 \cup RG_{128,0.25}$	7	7.0	< 0.01	7*	0.35	6	6.0	< 0.01	6*	0.46
$B_8 \cup RG_{256,0.05}$	9	9.0	< 0.01	9 (11.0)	3600	8	8.0	< 0.01	8 (88.0)	3600
$B_8 \cup RG_{256,0.075}$	8	8.9	54.4	9 (89.0)	3600	7	7.8	53.13	8 (88.0)	3600
$B_8 \cup RG_{256,0.1}$	8	8.2	24.74	9 (89.0)	3600	7	7.0	28.19	7*	0.51
$B_8 \cup RG_{256,0.15}$	8	8.0	0.25	8*	1.45	7	7.0	0.22	7*	1.13
$B_8 \cup RG_{256,0.2}$	8	8.0	0.02	8*	2.33	7	7.0	0.02	7*	1.83
$B_8 \cup RG_{256,0.25}$	8	8.0	0.01	8*	4.1	7	7.0	0.01	7*	2.76
$B_9 \cup RG_{512,0.05}$	10	10.0	< 0.01	10 (90.0)	3600	9	9.0	< 0.01	9 (89.0)	3600
$B_9 \cup RG_{512,0.075}$	10	10.0	< 0.01	10 (90.0)	3600	9	9.0	< 0.01	9 (89.0)	3600
$B_9 \cup RG_{512,0.1}$	9	9.6	51.82	9*	16.84	8	8.7	49.86	8*	5.31
$B_9 \cup RG_{512,0.15}$	9	9.0	0.87	9*	36.87	8	8.0	0.99	8*	36.54
$B_9 \cup RG_{512,0.2}$	9	9.0	0.08	-	3600	8	8.0	0.09	8*	160.26
$B_9 \cup RG_{512,0.25}$	9	9.0	0.02	-	3600	8	8.0	0.02	-	3600
$B_{10} \cup RG_{1024,0.05}$	11	11.0	0.01	11 (91.0)	3600	10	10.0	0.01	10 (90.0)	3600
$B_{10} \cup RG_{1024,0.075}$	11	11.0	0.01	-	3600	10	10.0	0.01	-	3600
$B_{10} \cup RG_{1024,0.1}$	11	11.0	0.01	-	3600	9	9.9	57.7	-	3600
$B_{10} \cup RG_{1024,0.15}$	10	10.0	2.77	-	3600	9	9.0	2.92	-	3600
$B_{10} \cup RG_{1024,0.2}$	10	10.0	0.32	-	3600	9	9.0	0.33	-	3600
$B_{10} \cup RG_{1024,0.25}$	10	10.0	0.09	-	3600	9	9.0	0.09	-	3600
Network Repository										
Continua na próxima página										

Tabela 1 – continuação da página anterior

Instância	$K = 1$					$K = 2$				
	BRKGA			ILP		BRKGA			ILP	
	Melhor	Média	Tempo	MBC (GAP)	Tempo	Melhor	Média	Tempo	MBC (GAP)	Tempo
SW-100-3-0d1-trial1	35	35.0	< 0.01	35*	86.58	18	18.0	0.03	18 (66.0)	3600
SW-100-3-0d2-trial1	21	21.0	< 0.01	21*	5.72	16	16.0	0.01	16 (62.0)	3600.0
SW-100-3-0d2-trial3	25	25.0	< 0.01	25*	9.13	19	19.0	< 0.01	19 (65.0)	3600.0
SW-100-4-0d1-trial1	8	8.0	3.41	8*	8.21	7	7.0	0.08	7 (14.00)	3600.0
SW-100-4-0d1-trial2	8	8.0	4.41	8*	20.69	7	7.0	60.0	6*	52.07
SW-100-4-0d1-trial3	8	8.6	42.96	8*	33.14	7	7.0	0.11	7 (14.00)	3600.0
SW-100-4-0d2-trial1	8	8.0	60.0	7*	15.48	7	7.0	60.0	6*	18.33
SW-100-4-0d2-trial2	8	8.0	0.04	8*	492.69	7	7.0	60.0	6*	160.25
SW-100-4-0d2-trial3	8	8.0	0.01	8*	579.89	7	7.0	60.0	6*	251.12
SW-100-4-0d3-trial1	8	8.0	60.0	7*	49.5	7	7.0	60.0	6*	7.33
SW-100-4-0d3-trial2	8	8.0	60.0	7*	850.53	7	7.0	60.0	6*	21.28
SW-100-4-0d3-trial3	8	8.0	60.0	7*	27.1	7	7.0	60.0	6*	23.33
SW-100-5-0d1-trial1	9	9.0	60.0	8*	4.81	7	7.0	0.03	7 (14.00)	3600.0
SW-100-5-0d1-trial2	9	9.0	0.01	9*	1042.15	7	7.0	0.69	7 (14.00)	3600.0
SW-100-5-0d1-trial3	9	9.0	60.0	8*	47.93	7	7.0	2.26	7 (14.00)	3600.0
SW-100-5-0d2-trial1	8	8.0	0.08	8*	57.74	7	7.0	0.01	7 (14.00)	3600.0
SW-100-5-0d2-trial2	8	8.0	0.02	8*	146.87	7	7.0	60.0	6*	238.55
SW-100-5-0d2-trial3	8	8.0	0.02	8*	800.17	7	7.0	60.0	6*	1318.86
SW-100-5-0d3-trial1	8	8.0	60.0	7*	539.46	7	7.0	60.0	6*	51.11
SW-100-5-0d3-trial2	8	8.0	60.0	7*	214.58	7	7.0	60.0	6*	19.63
SW-100-5-0d3-trial3	8	8.0	60.0	7*	42.49	7	7.0	60.0	6*	48.14
SW-100-6-0d1-trial1	8	8.0	60.0	7*	26.87	6	6.8	49.81	6*	23.14
SW-100-6-0d1-trial2	8	8.0	60.0	7*	19.49	6	6.9	55.36	6*	0.01
SW-100-6-0d1-trial3	8	8.0	60.0	7*	2125.69	6	6.7	46.77	6*	144.46
SW-100-6-0d2-trial1	7	7.9	56.92	7*	21.08	6	6.0	8.31	6*	0.01
SW-100-6-0d2-trial2	7	7.0	0.75	7*	0.02	6	6.0	0.71	6*	0.01
SW-100-6-0d2-trial3	7	7.0	3.88	7*	0.02	6	6.0	0.69	6*	0.01
SW-100-6-0d3-trial1	7	7.0	0.38	7*	0.02	6	6.0	0.11	6*	0.01
SW-100-6-0d3-trial2	7	7.0	0.21	7*	0.02	6	6.0	0.07	6*	0.01
SW-100-6-0d3-trial3	7	7.0	0.27	7*	0.02	6	6.0	0.07	6*	0.01
SW-1000-3-0d2-trial1	69	69.0	0.45	69 (86.0)	3600	61	61.0	1.78	61 (85.0)	3600
SW-1000-3-0d2-trial2	69	69.0	0.34	69 (86.0)	3600	63	63.0	3.04	63 (86.0)	3600
SW-1000-3-0d3-trial2	47	47.0	0.28	47 (78.0)	3600	42	42.0	5.92	42 (79.0)	3600
SW-1000-4-0d1-trial1	15	15.6	44.22	15 (33.0)	3600	14	14.0	1.52	14 (93.0)	3600
SW-1000-4-0d1-trial2	15	15.0	0.73	15 (93.0)	3600	13	13.8	53.56	13 (92.0)	3600
SW-1000-4-0d1-trial3	15	15.0	3.61	15 (33.0)	3600	13	13.4	41.08	14 (93.0)	3600
SW-1000-4-0d2-trial1	13	13.9	54.8	14 (93.0)	3600	12	12.0	8.82	12 (92.0)	3600
SW-1000-4-0d2-trial2	13	13.0	3.66	13 (92.0)	3600	12	12.0	1.5	12 (92.0)	3600
SW-1000-4-0d2-trial3	13	13.0	2.78	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.69	12 (92.0)	3600
SW-1000-4-0d3-trial1	13	13.0	0.02	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.01	12 (92.0)	3600
SW-1000-4-0d3-trial3	13	13.0	0.01	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.01	12 (92.0)	3600
SW-1000-5-0d1-trial1	15	15.0	21.42	15 (33.0)	3600	14	14.0	2.36	14 (93.0)	3600
SW-1000-5-0d1-trial2	15	15.0	1.41	15 (93.0)	3600	13	13.1	20.09	13 (92.0)	3600
SW-1000-5-0d1-trial3	15	15.0	0.93	15 (93.0)	3600	13	13.5	42.74	14 (93.0)	3600
SW-1000-5-0d2-trial1	14	14.0	0.03	14 (93.0)	3600	12	12.0	13.25	12 (92.0)	3600
SW-1000-5-0d2-trial2	13	13.0	21.01	13 (92.0)	3600	12	12.0	3.72	12 (92.0)	3600
SW-1000-5-0d2-trial3	13	13.0	3.86	13 (92.0)	3600	12	12.0	2.24	12 (92.0)	3600
SW-1000-5-0d3-trial1	13	13.0	0.02	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.01	12 (92.0)	3600
SW-1000-5-0d3-trial2	13	13.0	0.02	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.01	12 (92.0)	3600
SW-1000-5-0d3-trial3	13	13.0	0.02	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.02	12 (92.0)	3600
SW-1000-6-0d1-trial1	13	13.0	0.85	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.07	12 (92.0)	3600
SW-1000-6-0d1-trial2	13	13.0	0.05	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.03	12 (25.0)	3600
SW-1000-6-0d1-trial3	13	13.0	0.13	13 (92.0)	3600	12	12.0	0.04	12 (92.0)	3600
SW-1000-6-0d2-trial1	12	12.0	0.03	12 (92.0)	3600	11	11.0	0.01	11 (91.0)	3600
SW-1000-6-0d2-trial2	12	12.0	0.02	12 (92.0)	3600	11	11.0	0.01	11 (91.0)	3600
SW-1000-6-0d2-trial3	12	12.0	0.02	12 (92.0)	3600	11	11.0	0.01	11 (91.0)	3600
SW-1000-6-0d3-trial1	11	11.9	56.84	11 (91.0)	3600	10	10.7	49.91	11 (91.0)	3600
SW-1000-6-0d3-trial2	11	11.9	57.61	12 (92.0)	3600	10	10.7	48.84	11 (91.0)	3600
SW-1000-6-0d3-trial3	11	11.9	55.29	12 (92.0)	3600	10	10.3	37.25	10 (90.0)	3600

Continua na próxima página

Tabela 1 – continuação da página anterior

Instância	$K = 1$					$K = 2$				
	BRKGA			ILP		BRKGA			ILP	
	Melhor	Média	Tempo	MBC (GAP)	Tempo	Melhor	Média	Tempo	MBC (GAP)	Tempo
# Melhor solução	96			99		96			100	

6. Conclusão

Este trabalho apresenta diversas contribuições para o MINIMUM BROADCAST CENTER (MBC): um modelo de Programação Linear Inteira (ILP), uma metaheurística utilizando Algoritmo Genético com Chaves Aleatórias Viciadas (BRKGA) e um *lower bound*. Além disso, destaca a relevância do estudo sobre o MBC em redes de computadores, especialmente no contexto do projeto de redes para cidades inteligentes que utilizam sistemas distribuídos e a Internet das Coisas (IoT). O MBC envolve a definição de um conjunto de nós fontes e, a partir desse conjunto, a determinação do MINIMUM BROADCAST TIME (MBT).

A análise comparativa entre o BRKGA e o ILP em 111 instâncias demonstrou que o BRKGA encontrou soluções equiparáveis às do ILP em diversas instâncias, indicando sua eficácia como heurística para resolver o problema. O desempenho consistente do BRKGA foi evidenciado pelo fato de que o valor da melhor solução encontrada foi igual à média das melhores soluções, destacando a consistência em seu desempenho.

Em trabalhos futuros, pretende-se realizar estudos sobre outras variantes ou problemas correlacionados aos problemas MBC e MBT: (i) MBC com arestas/vértices ponderados, (ii) estudos de *lower bound* para o MBC, (iii) o problema *Minimum Multicast Time* [Wieselthier et al., 2002], (iv) entre outros.

Referências

- Bean, J. C. (1994). Genetic algorithms and random keys for sequencing and optimization. *INFORMS Journal on Computing*, 6(2):154–160.
- Elkin, M. e Kortsarz, G. (2003). Sublogarithmic approximation for telephone multicast: Path out of jungle. *Proceedings of the Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, p. 76–85.
- Farley, A., Hedetniemi, S., Mitchell, S., e Proskurowski, A. (1979). Minimum broadcast graphs. *Discrete Mathematics*, 25(2):189 – 193. ISSN 0012-365X.
- Floyd, R. W. (1962). Algorithm 97: Shortest path. *Commun. ACM*, 5(6):345. ISSN 0001-0782.
- Gonçalves, J. e Resende, M. (2011). Biased random-key genetic algorithms for combinatorial optimization. *J. Heuristics*, 17:487–525.
- Harutyunyan, H. e Maraachlian, E. (2007). Linear algorithm for broadcasting in unicyclic graphs. *Computing and Combinatorics*, p. 372–382.
- Harutyunyan, H. A. e Li, Z. (2021). The complexity of finding a broadcast center. In *Algorithmic Aspects in Information and Management: 15th International Conference, AAIM 2021, Virtual Event, December 20–22, 2021, Proceedings 15*, p. 57–70. Springer.
- Harutyunyan, H. A. e Maraachlian, E. (2008). On broadcasting in unicyclic graphs. *Journal of combinatorial optimization*, 16:307–322.

- Hasson, Y. e Sipper, M. (2004). A novel ant algorithm for solving the minimum broadcast time problem. In *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII*, p. 501–510, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-30217-9.
- Hoelting, C. J., Schoenefeld, D. A., e Wainwright, R. L. (1996). A genetic algorithm for the minimum broadcast time problem using a global precedence vector. In *Proceedings of the 1996 ACM Symposium on Applied Computing, SAC '96*, p. 258–262, New York, NY, USA. Association for Computing Machinery. ISBN 0897918207.
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control and Artificial Intelligence*. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI.
- Ivanova, M. (2019). Optimization problems in communication networks and multi-agent path finding. *Bergen Open Research Archive*.
- Jansen, K. e Müller, H. (1995). The minimum broadcast time problem for several processor networks. *Theoretical Computer Science*, 147(1):69 – 85. ISSN 0304-3975.
- Kortsarz, G. e Peleg, D. (1992). Approximation algorithms for minimum time broadcast. In Dolev, D., Galil, Z., e Rodeh, M., editors, *Theory of Computing and Systems*, p. 67–78, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-47214-8.
- Lima, A., Aquino, A. L., Nogueira, B., e Pinheiro, R. G. (2024). A matheuristic approach for the minimum broadcast time problem using a biased random-key genetic algorithm. *International Transactions in Operational Research*, 31(1):246–273.
- López-Ibáñez, M., Dubois-Lacoste, J., Cáceres, L. P., Birattari, M., e Stützle, T. (2016). The irace package: Iterated racing for automatic algorithm configuration. *Operations Research Perspectives*, 3:43–58. ISSN 2214-7160.
- Resende, M. G. C. (2011). Biased random-key genetic algorithms with applications in telecommunications. *TOP*, 20(1):130–153.
- Robledo, F., Rodríguez-Bocca, P., e Romero, P. (2020). Optimal broadcast strategy in homogeneous point-to-point networks. In *Machine Learning, Optimization, and Data Science*, p. 448–457, Cham. Springer International Publishing. ISBN 978-3-030-64583-0.
- Scheuermann e Wu (1984). Heuristic algorithms for broadcasting in point-to-point computer networks. *IEEE Transactions on Computers*, C-33(9):804–811. ISSN 2326-3814.
- Slater, P. J., Cockayne, E. J., e Hedetniemi, S. T. (1981). Information dissemination in trees. *SIAM Journal on Computing*, 10(4):692–701.
- Sousa, A., Gallo, G., Gutierrez, S., Robledo, F., Rodríguez-Bocca, P., e Romero, P. (2018). Heuristics for the minimum broadcast time. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 69:165 – 172. ISSN 1571-0653. Joint EURO/ALIO International Conference 2018 on Applied Combinatorial Optimization (EURO/ALIO 2018).
- Su, Y.-H., Lin, C.-C., e Lee, D. (2010). Broadcasting in heterogeneous tree networks. In *International Computing and Combinatorics Conference*, p. 368–377. Springer.
- Wieselthier, J. E., Nguyen, G. D., e Ephremides, A. (2002). Energy-efficient broadcast and multicast trees in wireless networks. *Mobile networks and applications*, 7(6):481–492.