

Uma política de inspeções sequenciais e substituição preventiva para componentes heterogêneos

Victor Hugo Resende Lima

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Centro de Tecnologia e Geociências (CTG)
Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901
victor.rlima@ufpe.br

Augusto José da Silva Rodrigues

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Centro Acadêmico do Agreste (CAA)
Av. Marielle Franco, s/n – Nova Caruaru, Caruaru - PE, 55014-900
augusto.jsrodrigues@ufpe.br

Rafael Gomes Nóbrega Paiva

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Centro de Tecnologia e Geociências (CTG)
Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901
rafael.gnpaiva@ufpe.br

Hanser Steven Jiménez González

Université de Lorraine
CRAN-1er Cycle, FST-Campus Aiguillettes-BP 70239
h.s.j.gonzalez@random.org.br

Cristiano Alexandre Virginio Cavalcante

Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Centro de Tecnologia e Geociências (CTG)
Av. Prof. Moraes Rego, 1235 - Cidade Universitária, Recife - PE, 50670-901
cristiano.avcavalcante@ufpe.br

RESUMO

Neste estudo, algumas suposições rígidas de modelos que estabelecem inspeções em intervalos constantes (periódicos ou não sequenciais) são relaxadas. Uma nova política híbrida de inspeção (sequenciais) e substituição preventiva é proposta. O modelo proposto, construído com base no conceito *delay-time* e calculado por meio da teoria da renovação com recompensas, é projetado para um sistema com único componente, cujos componentes provêm de uma população heterogênea (fracos e fortes). O modelo também é estendido para considerar inspeções imperfeitas (falsos positivos e negativos), abordando a classificação incorreta de defeitos, um problema comum na prática. A política proposta é comparada com duas outras políticas clássicas da literatura: uma política híbrida de inspeções (não sequenciais) e substituição preventiva, e outra de inspeções puras. A taxa de custo a longo prazo por unidade de tempo é calculada, e os resultados numéricos demonstram economias de até 6,4%, especialmente quando os custos no estado defeituoso são elevados.

PALAVRAS CHAVE. Políticas de Manutenção, Inspeções Sequenciais, Delay-time.

Tópicos (POI – PO na Indústria; EST&MP – Estatística e Modelos Probabilísticos)

ABSTRACT

In this study, some rigid assumptions of models that establish inspections at constant intervals (periodic or non-sequential) are relaxed. A new hybrid policy of sequential inspections and preventive replacement is proposed. The proposed model, based on the delay-time concept and calculated using the renewal theory with rewards, is designed for a single-component system, where the components come from a heterogeneous population (weak and strong). The model is also extended to consider imperfect inspections (false positives and negatives), addressing the misclassification of defects, a common issue in practice. The proposed policy is compared with two other classic policies from the literature: a hybrid policy of non-sequential inspections and preventive replacement, and a pure inspection policy. The long-term cost rate per unit of time is calculated, and the numerical results demonstrate savings of up to 6.4%, especially when the costs in the defective state are high.

KEYWORDS. Maintenance Policies, Sequential Inspections, Delay-time.

Paper topics (POI – PO in Industry; EST&MP – Statistics and Probabilistic Models)

1. Introdução

Esforços significativos de pesquisa têm sido dedicados à modelagem e otimização de políticas de manutenção, refletindo um reconhecimento crescente do papel essencial que estratégias simplificadas desempenham na melhoria da eficiência operacional e na extensão da vida útil de ativos críticos [De Jonge e Scarf, 2020]. Consequentemente, políticas de manutenção emergentes estão aparecendo cada vez mais na literatura, considerando diferentes abordagens, como substituição baseada em idade e em blocos [Barlow e Proschan, 1965], estratégias baseadas em inspeção [Barlow et al., 1963], manutenção baseada em condição [Jardine et al., 2006], manutenção oportunística [Cavalcante et al., 2024], entre outras, ou mesmo políticas modificadas a partir dessas anteriores [Alotaibi et al., 2023].

No que diz respeito às políticas de manutenção baseadas em inspeção, determinar intervalos entre inspeções é uma decisão essencial porque: 1) remove defeitos antes que migrem para falhas [Lopes et al., 2015]; 2) evita acidentes graves, como demanda não atendida [Berrade et al., 2012], onde os custos são exorbitantes e perigosos para pessoas e estruturas; e 3) um número substancial de sistemas industriais possui falhas ocultas [Moubray, 2001], e essa é uma ótima maneira de detectá-las. Para lidar com isso, modelos de manutenção baseados no conceito *delay-time* têm sido amplamente explorados, sendo representados como um processo de falha em duas etapas, no qual o estado defeituoso de um componente precede a falha. Este conceito foi inicialmente proposto por [Christer, 1976] e foi estendido por outros [Wang, 2012; Sinisterra et al., 2023; Cavalcante et al., 2023; Rodrigues et al., 2023].

No entanto, modelos *delay-time* baseados apenas em ações de inspeção periódica podem ser ineficientes se os componentes pertencerem a uma população heterogênea com diferentes comportamentos de falha, onde certos componentes podem apresentar falhas logo no início, enquanto outros exibem falhas mais tarde. Em populações heterogêneas, os tempos envolvidos no processo de falha, englobando tanto o tempo até a chegada do defeito quanto o tempo de permanência, são modelados usando uma abordagem de distribuição de mistura [Scarf et al., 2009]. Políticas periódicas, nas quais os sistemas são mantidos (inspecionados) em vários momentos durante um período fixo, não consideram as mudanças que ocorrem no padrão de envelhecimento dos componentes de uma população mista [Finkelstein e Esaulova, 2001]. No entanto, uma boa estratégia para lidar com populações heterogêneas é através de políticas híbridas. Scarf et al. [2009] propuseram uma política híbrida de duas fases, chamada política $K\Delta T$. A primeira fase (consistindo de K inspeções periódicas perfeitas) é projetada para prevenir falhas no início da vida útil dos componentes fracos, enquanto a segunda (substituição baseada na idade em T) busca reduzir falhas por desgaste dos componentes fortes no final de suas vidas úteis. Entretanto, o problema não é completamente resolvido com essa política híbrida, pois a primeira fase continua a limitar os intervalos entre inspeções como sendo obrigatoriamente periódicos. Portanto, a principal contribuição deste estudo reside em abordar cada inspeção sem restrições ou regras predefinidas, permitindo assim intervalos não uniformes entre as inspeções.

De acordo com Lin et al. [2000], inspeções sequenciais e irregulares (ou não periódicas), nas quais os sistemas são inspecionados em uma sequência de intervalos não iguais, são ideais para lidar com sistemas que envelhecem ao longo do tempo. Considerando isso, surge a seguinte questão de pesquisa: as inspeções sequenciais são mais eficazes do que as inspeções periódicas? Quão eficaz é a política híbrida que incorpora intervalos não iguais durante a fase de inspeção para gerenciar populações heterogêneas? Esta política híbrida, com fases de inspeção irregulares, é mais resiliente à inspeções imperfeitas? E como ela se comporta em situações em que há um custo proporcional ao tempo gasto em um estado defeituoso? Para responder e lidar com essas questões, este artigo avança em relação à literatura atual em duas direções importantes:

1. Propõe-se a primeira política híbrida de duas fases (inspeção e substituição baseada na idade) baseada no *delay-time*, com intervalos não periódicos entre as inspeções e incorrendo em custos proporcionais ao tempo em estado defeituoso (chamada de política $K\Delta_k T$);

2. A política leva em consideração inspeções imperfeitas (falsos positivos e negativos), possibilitando lidar com a classificação incorreta de defeitos.

O restante deste artigo está organizado da seguinte forma: na próxima seção (seção 2), apresentamos a modelagem matemática. Na seção 3, são realizados resultados computacionais para mostrar a eficácia desta ideia em comparação com outras políticas, bem como os *insights* gerenciais fornecidos pela política. Finalmente, a seção 4 apresenta a conclusão e sugestões para trabalhos futuros.

2. Modelagem Matemática.

Esta seção detalha o modelo matemático por meio da teoria da renovação, apresentando notações, probabilidades, custos esperados e a vida espera (comprimento do ciclo) para cada possível cenário de renovação da política.

Sobre as notações, H representa o *delay-time* e X é o tempo até a chegada do defeito. A função de densidade de probabilidade de X (f_x) segue a distribuição Weibull, e a de H (f_h) segue a distribuição exponencial. F_h é a função de distribuição cumulativa de H , R_x e R_h são as funções de sobrevivência de X e H , respectivamente. η_1 e β_1 são os parâmetros de escala e forma para a distribuição de defeitos em componentes fortes, enquanto η_2 e β_2 são os mesmos parâmetros para componentes fracos. O parâmetro p representa a mistura de populações de componentes. λ é a taxa da distribuição exponencial para o *delay-time. α e ε representam as probabilidades de detectar um defeito inexistente e não detectar um defeito existente, respectivamente. C_I é o custo de inspeção, C_r o custo de substituição preventiva, C_f o custo de manutenção corretiva, C_d o custo de permanência em estado defeituoso por unidade de tempo. K é o número de inspeções, $\Delta_0 \dots \Delta_K$ são os tempos para a i -ésima inspeção, onde $\Delta_0 = 0$ e T é a idade para a substituição preventiva.*

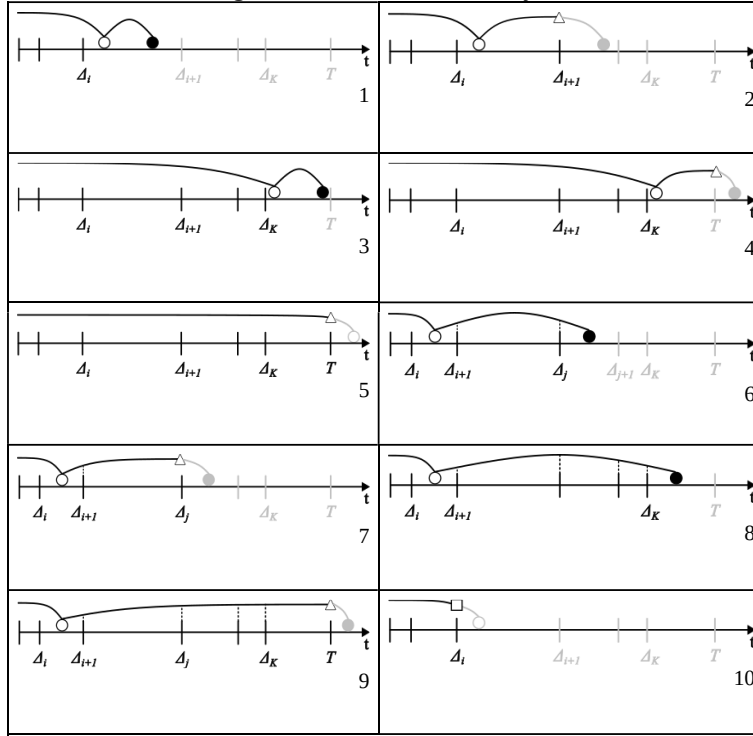
Considera-se um sistema de um único componente onde o processo de deterioração segue o conceito *delay-time*, no qual o sistema pode existir em três estados distintos: operacional, defeituoso ou falho. Esses estados são representados por X , o ponto em que um defeito surge, e H , o *delay-time*. O *delay-time* é definido como o intervalo entre a chegada do defeito e a falha, com X e H sendo variáveis estatisticamente independentes. Existem dois tipos de componentes, onde $f_x(x) = pf_1(x) + (1 - p)f_2(x)$, onde p representa a proporção de mistura de cada tipo de componente, e $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são as funções de densidade de probabilidade para a chegada do defeito para ambos os tipos de componentes.

As inspeções são imperfeitas; um defeito pode ser detectado falsamente com probabilidade ε , e um defeito real pode não ser detectado com probabilidade α . Considerando isso, no momento de uma inspeção, se um defeito for detectado (mesmo que não exista de fato), ocorre uma substituição preventiva com custo C_R . Em caso de falha no sistema, ocorre uma substituição corretiva com custo C_F . Cada inspeção incorre em um custo C_I , sendo ($C_I < C_F < C_R$). Finalmente, o custo do estado defeituoso é dado por C_D multiplicado pelo tempo gasto no estado defeituoso.

Como mencionado anteriormente, as variáveis do problema são o número de inspeções a serem realizadas K , os momentos para a i -ésima inspeção Δ_k com $i = 0, 1, \dots, K$ e $\Delta_0 = 0$, e o momento para a substituição preventiva com base na idade T . À luz disso, enumera-se abaixo todos os dez possíveis cenários de renovação do sistema, considerando tudo o que foi discutido anteriormente, que podem ser vistos na Figura 1. O círculo vazio representa a chegada do defeito, o círculo preenchido indica a ocorrência da falha, o triângulo sinaliza a substituição preventiva, o quadrado indica um falso positivo, a linha tracejada vertical representa um falso negativo, a linha vertical escura corresponde às inspeções realizadas (ciclo ainda em andamento), e a linha vertical cinza refere-se às inspeções não realizadas (ciclo encerrado).

Para cada cenário i da Figura 1, apresenta-se abaixo a sua probabilidade de ocorrência P_i , seu custo esperado EC_i e seu comprimento EL_i , $i = 1, \dots, 10$.

Figura 1: Cenários de renovação.



• Cenário 1:

O defeito e a falha ocorrem entre duas inspeções consecutivas, sendo necessário garantir que não ocorreram falsos positivos em nenhuma inspeção realizada antes da chegada do defeito. O custo é determinado pelas despesas das inspeções realizadas e pelo custo da falha, enquanto a vida útil é definida pela duração do componente.

$$P_1(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_0^{\Delta_{i+1}-x} f_H(h) dh dx \quad (1)$$

$$EC_1(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} (iC_I + C_F)(1-\alpha)^i \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_0^{\Delta_{i+1}-x} f_H(h) dh dx + \\ (1-\alpha)^i \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_0^{\Delta_{i+1}-x} hC_D f_H(h) dh dx \quad (2)$$

$$EL_1(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} (x+h) f_X(x) \int_0^{\Delta_{i+1}-x} f_H(h) dh dx \quad (3)$$

• Cenário 2:

O defeito ocorre entre duas inspeções, e na inspeção subsequente, o defeito é detectado, levando à sua substituição. É necessário garantir que não ocorreram falsos positivos nas inspeções anteriores e que não houve falsos negativos na inspeção após a chegada do defeito. O custo é determinado pelas despesas de todas as inspeções realizadas e pelo custo da substituição. Finalmente, a vida útil é definida pelo tempo da inspeção que detectou o defeito.

$$P_2(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i (1-\varepsilon) \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) (1-F_H(\Delta_{i+1}-x)) dx \quad (4)$$

$$EC_2(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} ((i+1)C_I + C_R)(1-\alpha)^i (1-\varepsilon) \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) (1-F_H(\Delta_{i+1}-x)) dx +$$

$$(1-\alpha)^i (1-\varepsilon) \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} (\Delta_{i+1}-x) C_D f_X(x) (1-F_H(\Delta_{i+1}-x)) dx \quad (5)$$

$$EL_2(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} (\Delta_{i+1})(1-\alpha)^i (1-\varepsilon) \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) (1-F_H(\Delta_{i+1}-x)) dx \quad (6)$$

- Cenário 3:

O defeito e a falha ocorrem entre a última inspeção e a manutenção programada; é necessário garantir que não houve falsos positivos em todas as inspeções. Os custos são compostos pelas despesas de todas as inspeções e pelo custo da falha, enquanto a vida útil é determinada pela duração do componente, considerando que ele falhou.

$$P_3(K, \Delta_K, T) = (1-\alpha)^K \int_{\Delta_K}^T f_X(x) \int_0^{T-x} f_H(h) dh dx \quad (7)$$

$$EC_3(K, \Delta_K, T) = (KC_I + C_F)(1-\alpha)^K \int_{\Delta_K}^T f_X(x) \int_0^{T-x} f_H(h) dh dx +$$

$$(1-\alpha)^K \int_{\Delta_K}^T f_X(x) \int_0^{T-x} h C_D f_H(h) dh dx \quad (8)$$

$$EL_3(K, \Delta_K, T) = (1-\alpha)^K \int_{\Delta_K}^T (x+h) f_X(x) \int_0^{T-x} f_H(h) dh dx \quad (9)$$

- Cenário 4:

O defeito ocorre entre a última inspeção e o instante de manutenção programada, mas a falha só ocorreria após T . Portanto, a manutenção preventiva é realizada. Também é essencial garantir que não houve falsos positivos em todas as inspeções. O custo é determinado pela soma dos custos das inspeções e o custo da falha, enquanto a vida útil é definida pelo instante de manutenção programada.

$$P_4(K, \Delta_K, T) = (1-\alpha)^K \int_{\Delta_K}^T f_X(x) (1-F_H(T-x)) dx \quad (10)$$

$$EC_4(K, \Delta_K, T) = (KC_I + C_R)(1 - \alpha)^K \int_{\Delta_K}^T f_X(x)(1 - F_H(T - x))dx + \quad (11)$$

$$(1 - \alpha)^K \int_{\Delta_K}^T hC_D f_X(x)(1 - F_H(T - x))dx$$

$$EL_4(K, \Delta_K, T) = (T)P_4(K, \Delta_K, T) \quad (12)$$

- Cenário 5:

Neste caso, o defeito ocorreria após a manutenção programada. É crucial garantir que não haja falsos positivos. O custo é determinado pelas despesas das inspeções e da manutenção preventiva, e a vida útil é o tempo até a manutenção programada.

$$P_5(K, T) = (1 - \alpha)^K (R_X(T)) \quad (13)$$

$$EC_5(K, T) = (KC_I + C_R)P_5(K, T) \quad (14)$$

$$EL_5(K, T) = (T)P_5(K, T) \quad (15)$$

- Cenário 6:

O defeito ocorre entre duas inspeções, e ocorre um ou mais falsos negativos, onde o equipamento está defeituoso durante uma inspeção, mas o inspetor o considera em boas condições. Logo após o último falso negativo e antes da próxima inspeção, ocorre uma falha. É essencial garantir que todas as inspeções realizadas antes da chegada do defeito não tiveram falsos positivos. O custo é determinado pela soma de todos os custos de inspeção e pelo custo da falha. A vida útil é a duração do componente.

$$P_6(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-2} \sum_{j=i+1}^{K-1} (1 - \alpha)^i \varepsilon^{j-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_{\Delta_j-x}^{\Delta_{j+1}-x} f_H(h)dhdx \quad (16)$$

$$EC_6(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-2} \sum_{j=i+1}^{K-1} (jC_I + C_F)(1 - \alpha)^i \beta^{j-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_{\Delta_j-x}^{\Delta_{j+1}-x} f_H(h)dhdx + \quad (17)$$

$$(1 - \alpha)^i \varepsilon^{j-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_{\Delta_j-x}^{\Delta_{j+1}-x} hC_D f_H(h)dhdx$$

$$EL_6(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-2} \sum_{j=i+1}^{K-1} (x + h)(1 - \alpha)^i \varepsilon^{j-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_{\Delta_j-x}^{\Delta_{j+1}-x} f_H(h)dhdx \quad (18)$$

- Cenário 7:

Neste caso, segue o exemplo do cenário 6. No entanto, após o último falso negativo, o componente sobrevive até a inspeção subsequente, onde ocorre um verdadeiro positivo. Em outras palavras, o defeito é detectado e a substituição é realizada. O custo é a soma dos custos de inspeção

e dos custos de substituição, e a vida útil é o tempo até a inspeção em que o componente é substituído.

$$P_7(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-2} \sum_{j=i+1}^{K-1} (1-\alpha)^i \varepsilon^{j-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) R_H(\Delta_j - x) dx \quad (19)$$

$$EC_7(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-2} \sum_{j=i+1}^{K-1} (jC_I + C_R)(1-\alpha)^i \varepsilon^{j-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) R_H(\Delta_j - x) dx + \quad (20)$$

$$(1-\alpha)^i \varepsilon^{j-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} (\Delta_j - x) C_D f_X(x) R_H(\Delta_j - x) dx$$

$$EL_7(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-2} \sum_{j=i+1}^{K-1} (\Delta_j)(1-\alpha)^i \beta^{j-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) R_H(\Delta_j - x) dx \quad (21)$$

- Cenário 8:

Neste caso, ocorre um falso positivo durante uma inspeção, ou seja, o componente não estava defeituoso, mas o inspetor o considerou defeituoso e o substituiu. É necessário garantir que não houve falsos positivos nas inspeções anteriores. O custo é determinado pela despesa de todas as inspeções realizadas e pelo custo da substituição. A vida útil é o tempo até a ocorrência da inspeção onde o falso positivo aconteceu e a substituição foi realizada.

$$P_8(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \alpha R_X(\Delta_{i+1}) \quad (22)$$

$$EC_8(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} ((i+1)C_I + C_R)(1-\alpha)^i \alpha R_X(\Delta_{i+1}) \quad (23)$$

$$EL_8(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K) = \sum_{i=0}^{K-1} (\Delta_{i+1})(1-\alpha)^i \alpha R_X(\Delta_{i+1}) \quad (24)$$

- Cenário 9:

Neste cenário, também segue a lógica do caso 6. No entanto, após o defeito, todas as inspeções subsequentes resultam em falsos negativos, e a falha ocorre entre a última inspeção e a manutenção programada. O custo é composto pelas despesas de todas as inspeções e pelo custo da falha, e a vida útil é a duração do componente.

$$P_9(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K, T) = \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \varepsilon^{K-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_{\Delta_K - x}^{T-x} f_H(h) dh dx \quad (25)$$

$$EC_9(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K, T) = (KC_I + C_F) \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \varepsilon^{K-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_{\Delta_K - x}^{T-x} f_H(h) dh dx + \quad (26)$$

$$(1-\alpha)^i \varepsilon^{K-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) \int_{\Delta_K - x}^{T-x} h C_D f_H(h) dh dx$$

$$EL_9(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K, T) = (KC_I + C_F) \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \varepsilon^{K-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} (x+h) f_X(x) \int_{\Delta_K-x}^{T-x} f_H(h) dh dx \quad (27)$$

- Cenário 10:

Neste caso, segue a lógica do cenário 9. No entanto, a falha só ocorreria após o instante da manutenção programada. Assim, neste instante, o componente é substituído. O custo é a soma de todos os custos de inspeção e o custo de substituição, e a vida útil é T (tempo até a manutenção programada).

$$P_{10}(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K, T) = \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \varepsilon^{K-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) R_H(T-x) dx \quad (28)$$

$$EC_{10}(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K, T) = (KC_I + C_R) \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \varepsilon^{K-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} f_X(x) R_H(T-x) dx + \quad (29)$$

$$(1-\alpha)^i \varepsilon^{K-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} (T-x) C_D f_X(x) R_H(T-x) dx$$

$$EL_{10}(K, \Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_K, T) = \sum_{i=0}^{K-1} (1-\alpha)^i \varepsilon^{K-i} \int_{\Delta_i}^{\Delta_{i+1}} (x+h) f_X(x) R_H(T-x) dx \quad (30)$$

Portanto, o objetivo é minimizar a taxa de custo, compreendida por $CR = \frac{\sum_{i=1}^{10} EC_i}{\sum_{i=1}^{10} L}$. Assim, o desafio de determinar as variáveis ótimas é formulado como um Problema Não Linear Inteiro Misto (MINLP). Dada a sua complexidade, nossa abordagem para resolvê-lo envolve a solução de múltiplos Problemas Não Lineares (NLPs) para identificar a solução "ótima". Isso implica iterar através de diferentes valores de K , denotados como $K = 0, 1, 2, \dots, U$, onde U representa um limite superior, e resolver o NLP correspondente para cada K . O NLP para um dado K é:

$$\text{Min} = CR(K, \Delta_0, \dots, \Delta_K, T) \quad (31)$$

Sujeito a:

$$\Delta_0 = 0 \quad (32)$$

$$\Delta_{i+1} > \Delta_i, \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (33)$$

$$T > \Delta_K \quad (34)$$

$$T \in R^+, \{\Delta_0, \dots, \Delta_K\} = R_K^+ \quad (35)$$

3. Resultados Computacionais

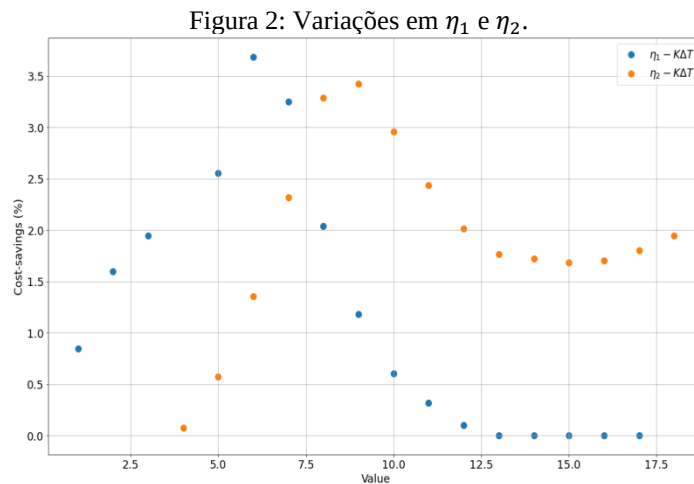
Esta seção discute os resultados computacionais da política proposta. Mostra-se a eficácia da política proposta em relação à algumas políticas bem conhecidas na literatura, como a $K\Delta T$ [Scarf et al., 2009] e a política de inspeção periódica pura [Okumura et al., 1996]. Para o problema de otimização $K\Delta K T$, os NLPs sequenciais foram otimizados usando Programação Quadrática Sequencial de Mínimos Quadrados (SLSQP), implementada no pacote scipy.

3.1 Comparações entre políticas

Para testar a eficácia da política $K\Delta_K T$ em comparação com outras, diferentes cenários foram testados, alterando os parâmetros de entrada das políticas e criando diferentes instâncias para comparação. Ao fazer isso, estuda-se como a política $K\Delta_K T$ é superior às outras em diferentes contextos e também em quais situações práticas nossa política proporciona melhorias substanciais. Esse conjunto de comparações foi feito com a política $K\Delta T$.

Para o caso base (CB), foram considerados os seguintes parâmetros de entrada: $\beta_1 = 2.5$; $\eta_1 = 3$; $\beta_2 = 5$; $\eta_2 = 18$; $p = 0.1$; $\lambda = 0.5$; $\alpha = 0.1$; $\varepsilon = 0.2$; $C_I = 0.05$; $C_R = 1$; $C_F = 10$; $C_D = 0$. As comparações com as políticas supracitadas foram feitas em termos de porcentagem de economia de custos (*cost-savings*), dada por $\% \text{ of cost} - \text{saving} = \frac{CR_{K\Delta T} - CR_{K\Delta_K T}}{CR_{K\Delta_K T}}$.

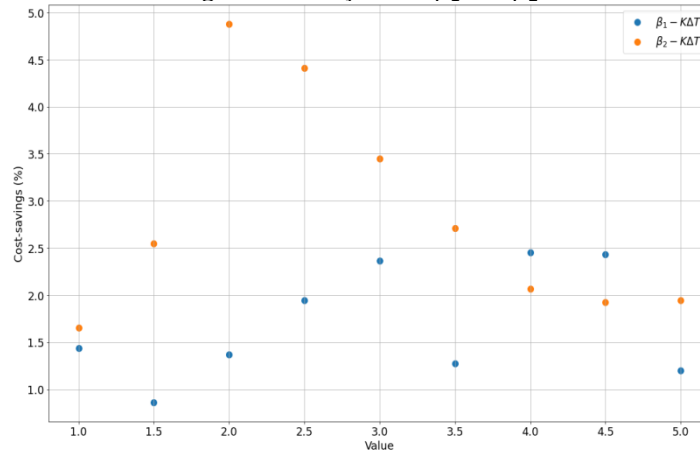
Nas próximas figuras, cada parâmetro do modelo foi variado em relação aos parâmetros do CB. As figuras mostram a variação isolada de cada um desses parâmetros, ou seja, todos os parâmetros permanecem inalterados enquanto apenas um é variado. Foram variados parâmetros que usualmente são mais importantes em políticas de manutenção. A Figura 2 compila as variações de η_1 e η_2 em duas curvas, mostrando as economias de custos.



Pode-se observar que o valor máximo da curva η_1 é superior ao da curva η_2 . Essa disparidade surge porque a política introduzida tende a alcançar maiores economias com o aumento do número de inspeções. Nesse contexto, a subpopulação 1 demonstra maior sensibilidade em comparação à subpopulação 2. Além disso, a partir de $\eta_1 = 13$, as economias se estabilizam em 0%, pois ambas as políticas envolvem apenas uma inspeção, tornando-as semelhantes. Em contraste, todas as variações testadas para η_2 mostraram consistentemente economias superiores a 0%, ressaltando que nossa política leva consistentemente a melhorias.

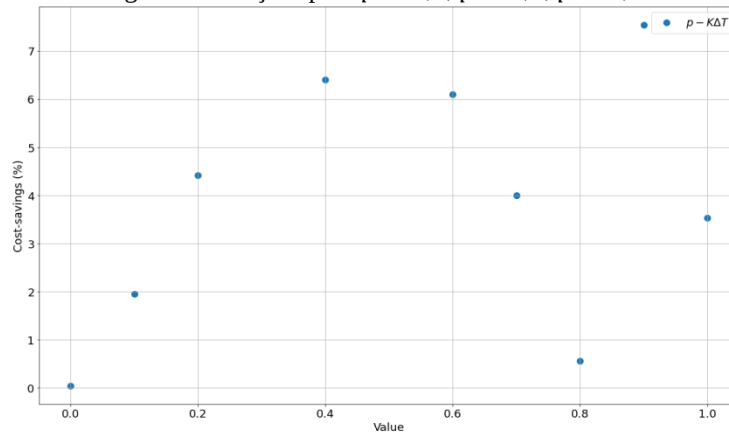
Analisando o determinismo das chegadas de defeitos para ambas as subpopulações (Figura 3), β_2 resulta em melhores economias do que β_1 , um resultado que inicialmente foi inesperado. A expectativa inicial era de que, com mais componentes “fracos” determinísticos, o conceito de inspeções não fixas levaria a maiores melhorias. No entanto, esse padrão se torna evidente a partir do ponto de inflexão entre 3.5 e 4.0. Esse comportamento inesperado pode ser atribuído à proporção de cada subpopulação. Com uma porcentagem maior de componentes “fortes” ($p = 10\%$), esses componentes tendem a ter um impacto mais significativo.

Figura 3: Variações em β_1 and β_2 .



Na Figura 4, há alguns comportamentos particulares para o parâmetro de mistura. Primeiramente, observando a "primeira forma" (de 0 a 0,8), nota-se que, à medida que a distribuição se torna mais mista (em torno de 0,5), nossa política proporciona maiores economias. Em segundo lugar, um comportamento único é observado nos pontos 0,9 e 1,0. Esses pontos exibem um desvio significativo em relação aos casos anteriores, como ilustrado na Figura 5.

Figura 4: Soluções para $p = 0,2$, $p = 0,9$, $p = 1,0$.



Na Figura 6, foi examinada a variação no custo relativo ao tempo gasto em estado defeituoso (C_D). O padrão observado indica que, à medida que esse custo aumenta, maiores economias são realizadas. Isso sugere que a política é consideravelmente mais eficaz na gestão desse tipo de custo em comparação com a $K\Delta T$, mesmo quando esse custo é inserido no modelo de Scarf et al. [2009]. Notavelmente, as economias máximas são alcançadas quando há alteração em C_D .

Figura 5: Soluções para $p = 0,2$, $p = 0,9$, $p = 1,0$.

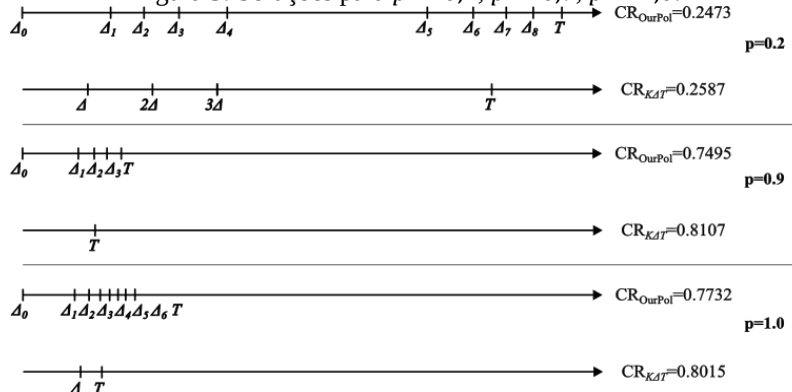
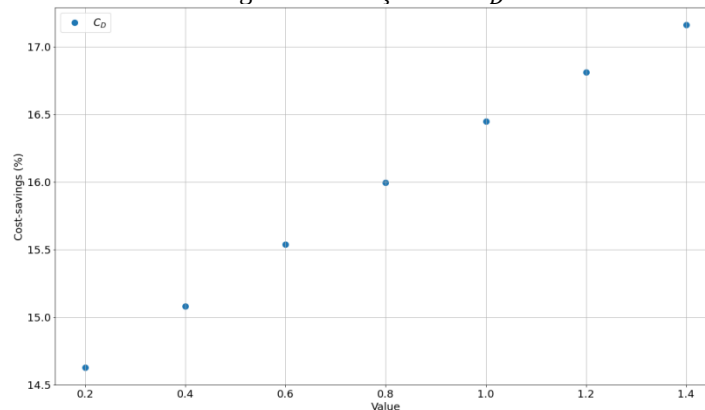
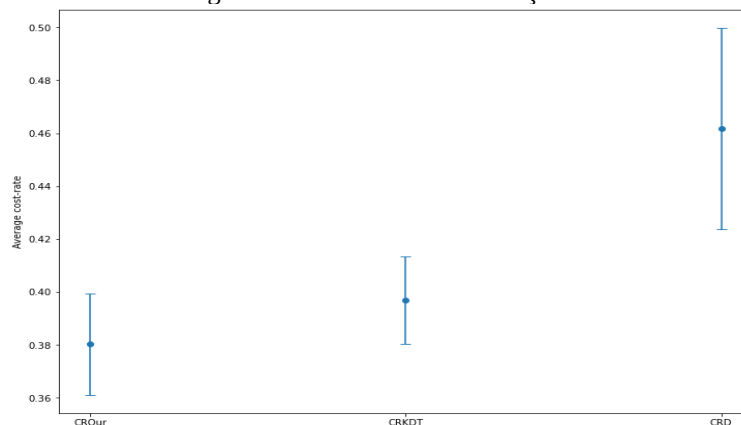


Figura 6: Variações em C_D .



A última análise verifica a robustez das soluções fornecidas por todas as políticas testadas aqui para o CB. Os parâmetros referentes à chegada de defeitos e ao *delay-time*, bem como a incerteza na qualidade da inspeção (α e ϵ), são os parâmetros com maior incerteza na estimativa. Portanto, consideramos essa incerteza e comparamos as soluções. Assim, esses números foram modelados como: $n_1 \sim \text{triangular}(2.7, 3.3)$, $\beta_1 \sim \text{triangular}(2.25, 2.75)$, $n_2 \sim \text{triangular}(16.2, 19.8)$, $\beta_2 \sim \text{triangular}(4, 5)$, $\alpha \sim \text{triangular}(0.1, 0.3)$ e $\epsilon \sim \text{triangular}(0.2, 0.4)$. A Figura 7 resume a média e o desvio padrão na taxa de custo para a política proposta, e para as políticas de Scarf et al. [2009] e de Okumura et al. [1996], respectivamente. A política proposta sempre performa melhor.

Figura 7: Sensibilidade das soluções.



4. Considerações Finais

Este estudo propôs uma política de inspeção e substituição baseada na idade para componentes heterogêneos, utilizando o conceito de *delay-time*. Anteriormente, os modelos assumiam intervalos de inspeção constantes (periódicos) ou com variação monotônica. Nesta abordagem, essa suposição foi relaxada, tratando cada momento de inspeção como uma variável livre (não periódica/não fixa). Além disso, foram considerados erros de inspeção, ou seja, erros de classificação, uma característica não abordada conjuntamente em trabalhos anteriores.

É importante enfatizar que o conceito de tornar as inspeções "livres" não é exclusivo desta política proposta; ele pode ser aplicado a qualquer política existente na literatura. Adotar essa abordagem tem o potencial de oferecer soluções consistentemente superiores ou, no mínimo, comparáveis às políticas que impõem intervalos fixos de tempo entre as inspeções.

A extensão introduzida aqui estudou apenas uma suposição simples nos modelos anteriores que resultou em economias de custo significativas. Existem outras suposições que também devem ser questionadas. Além disso, a gestão da manutenção está conectada com todas as demais partes das organizações e, portanto, suas decisões devem ser tomadas em conjunto para evitar soluções subótimas. Nesse sentido, algumas organizações possuem mais de uma equipe de manutenção e, portanto, cada inspeção deve ser atribuída a uma equipe específica.

Agradecimentos: Este trabalho foi parcialmente apoiado pela CAPES, CNPq e FACEPE.

Referências

- Alotaibi, N. M., Scarf, P., Cavalcante, C. A., Lopes, R. S., e Silva, A. L. D. O., Rodrigues, A. J. S., and Alyami, S. A. (2023). Modified-opportunistic inspection and the case of remote, groundwater well-heads. *Reliability Engineering & System Safety*, 237, 109389.
- Barlow, R. E., and Proschan, F. (1965). *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley & Sons, New York.
- Barlow, R. E., Hunter, L. C., & Proschan, F. (1963). Optimum checking procedures. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(4), 1078-1095.
- Berrade, M. D., Cavalcante, C. A., and Scarf, P. A. (2012). Maintenance scheduling of a protection system subject to imperfect inspection and replacement. *European Journal of Operational Research*, 218(3), 716-725.
- Cavalcante, C. A. V., Scarf, P., Melo, Y. R., Rodrigues, A. J. S., and Alotaibi, N. (2024). Planning maintenance when resources are limited: a study of periodic opportunistic replacement. *IMA Journal of Management Mathematics*, dpae015, ahead-of-print.
- Cavalcante, C. A., Santos, A. C., Paiva, R. G., Aribisala, A. A., and Da Silva, R. B. (2023). Delay time model for determining the effectiveness of a system under adverse conditions of production and inspection. *Proc. Inst. Mech. Eng., Part O: Journal of Risk and Reliability*, 1748006X231207529.
- Christer, A. H. (1976). Innovatory decision making, The Role and Effectiveness of Theories of Decision in Practice (Ed. White, D. L., and Brown, K. C.), Hodder & Stoughton, London, 368-377.
- De Jonge, B. and Scarf, P. A. (2020). A review on maintenance optimization. *European Journal of Operational Research*, 285(3):805-824.
- Jardine, A. K., Lin, D., and Banjevic, D. (2006). A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(7), 1483-1510.
- Lin, D., Zuo, M. J., and Yam, R. C. (2000). General sequential imperfect preventive maintenance models. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 7(3), 253-266.
- Lopes, R. S., Cavalcante, C. A., and Alencar, M. H. (2015). Delay-time inspection model with dimensioning maintenance teams: A study of a company leasing construction equipment. *Computers & Industrial Engineering*, 88, 341-349.
- Moubray, J. (2001). Reliability-centered maintenance. Industrial Press Inc.
- Okumura, S., Jardine, A. K. S., and Yamashina, H. (1996). An inspection policy for a deteriorating single-unit system characterized by a delay-time model. *International Journal of Production Research*, 34(9), 2441-2460.
- Rodrigues, A. J. S., Motta, F. A., Alberti, A. R., and Cavalcante, C. A. V. (2023). A hybrid policy for inspecting and replacing safety brakes subjected to shocks. *Quality Technology & Quantitative Management*, 1–31.
- Scarf, P. A., Cavalcante, C. A. V., Dwight, R. A., and Gordon, P. (2009). An age-based inspection and replacement policy for heterogeneous components. *IEEE Transactions on Reliability*, 58(4), 641-648.
- Sinisterra, W. Q., Lima, V. H. R., Cavalcante, C. A. V., and Aribisala, A. A. (2023). A delay-time model to integrate the sequence of resumable jobs, inspection policy, and quality for a single-component system. *Reliability Engineering & System Safety*, 230, 108902.
- Wang, W. (2012). An overview of the recent advances in delay-time-based maintenance modelling. *Reliability Engineering & System Safety*, 106, 165-178.