

Uma Análise Comparativa entre o Modelo de Agregação Linear e a Integral de Choquet considerando o Número de Ordenamentos Atingíveis no Contexto de Apoio à Decisão Multicritério

Glaucia Jardim Pissinelli

Faculdade de Tecnologia (FT)- Unicamp
R. Paschoal Marmo, 1888 - Jardim Nova Italia, Limeira - SP, 13484-332
g049933@dac.unicamp.br

Leonardo Tomazeli Duarte

Faculdade de Ciências Aplicadas (FCA) - Unicamp
R. Pedro Zaccaria, 1300, Limeira - SP, 13484-350
leonardo.duarte@fca.unicamp.br

Yannick Deville

Institut de Recherche en Astrophysique et Planetologie (IRAP), Universite Paul Sabatier Toulouse
3, Toulouse-FR
9, avenue du Colonel Roche, 31028 Toulouse-FR
Yannick.Deville@irap.omp.eu

RESUMO

Um problema central na área de Apoio de Decisão Multicritério (MCDA) consiste em ordenar um conjunto de alternativas com base em um conjunto de critérios, por meio de uma função de agregação, que pode ser linear ou não linear. Este artigo analisa o comportamento do modelo linear clássico e do modelo baseado na integral de Choquet (caso 2-aditivo) com relação ao número de ordenamentos atingíveis por cada método, para uma mesma matriz de decisão, e por meio de uma etapa de simulação de Monte Carlo, na qual os parâmetros dos dois modelos são variados de maneira aleatória. Os resultados mostram que o modelo de Choquet (2-aditivo) permite encontrar um número significativamente maior de ordenamentos quando comparado ao linear, especialmente quando o número de alternativas e de critérios cresce. Isso significa que a integral de Choquet 2-aditivo permite modelar um conjunto maior de preferências do decisor quando comparado ao modelo linear.

PALAVRAS CHAVE. Integral de Choquet, Apoio à Decisão multicritério, Ordenamento de alternativas, Modelos de agregação.

ABSTRACT

A central problem in the field of Multicriteria Decision Aiding (MCDA) involves ranking a set of alternatives based on a set of criteria. This ranking can be achieved through an aggregation function, which may be linear or nonlinear. This paper examines the behavior of the classical linear model and the model based on the Choquet integral (2-additive case) concerning the number of rankings achievable by each method, for the same decision matrix, and through a Monte Carlo simulation step, in which the parameters of the two analyzed aggregation models are varied randomly.

The results show that the Choquet model (2-additive case) allows for finding a significantly greater number of rankings compared to the linear model, especially when the number of alternatives and criteria increases. This implies that the 2-additive Choquet Integral allows for modeling a larger set of the decision-maker's preferences compared to the classical linear aggregation model.

KEYWORDS. Choquet Integral, Multiple Criteria Decision Aiding, Ranking of Alternatives, Aggregation Models.

1. Introdução

Em muitos problemas de apoio à decisão multicritério (MCDA - *multiple criteria decision aiding*) deseja-se avaliar um conjunto de m alternativas em relação a um número finito de n critérios, levando em conta a importância relativa desses critérios (ou constantes de escala), usualmente expressa por um conjunto de parâmetros [Roy, 1996; Keeney e Raiffa, 1993]. A avaliação de cada alternativa é obtida por meio de um método de agregação que é projetado para calcular um valor global, v_i , de cada alternativa.

O método de agregação mais comum em MCDA é a soma ponderada, ou método linear. Neste método, o valor global v_i de uma dada alternativa é simplesmente a combinação linear entre um vetor de pesos $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ e o vetor de desempenho da alternativa. No entanto, em muitos casos, a agregação linear pode não captar adequadamente a preferência do decisor ou algumas interações mais complexas entre os critérios. Nesses casos, um vasto conjunto de métodos mais sofisticados tem sido proposto na literatura [Greco, 2006]. Um exemplo de modelo de agregação não linear que vem sendo intensamente aplicado em MCDA é baseada na chamada integral de Choquet, que é capaz capturar efeitos de sinergia, redundância e interdependências entre critérios, proporcionando uma representação mais realista das preferências do decisor [Grabisch, 1997; Lust e Rolland, 2013].

Uma questão que, apesar de muito importante em MCDA, é ainda pouco discutida na literatura diz respeito à influência de um dado método de agregação no processo decisório. A dificuldade que se impõe para abordar tal questão é que não há uma forma única de entender os ganhos associados ao uso de um determinado modelo de agregação sobre outro. Uma possibilidade, no entanto, é baseada no conceito de rankings atingíveis. Dado um método de agregação e uma matriz de decisão, um ranking é atingível se existe um conjunto de parâmetros do modelo de agregação para o qual é possível obter tal ranking. Assim, podemos comparar dois modelos de agregação considerando essa perspectiva, de modo que o número de rankings atingíveis pode ser considerado como um indicador de qualidade de um dado modelo. Além disso, esse tipo de análise permite também investigar eventuais compromissos entre um possível aumento do número de rankings atingíveis em um dado modelo e o aumento de sua complexidade de implementação. Em outras palavras, em muitas situações, um ganho pequeno em termos de rankings atingíveis pode não justificar a adoção de um processo de agregação complexo.

Nesse contexto, a questão que motiva o presente trabalho refere-se à estimação do número de ordenamentos atingíveis para um modelo de agregação linear e para um modelo não linear dado pela versão 2-aditiva da integral de Choquet. Ou seja, buscamos abordar a seguinte questão: para uma mesma matriz de decisão, métodos mais sofisticados, como a integral de Choquet 2-aditivo, permitem obter um número significativamente maior de ordenamentos quando comparados com métodos lineares, considerando o conjunto de todos os possíveis parâmetros desses modelos de agregação? Para realizar essa análise, utilizaremos a simulação de Monte Carlo, que é uma técnica estatística que permite explorar um grande número de combinações possíveis de parâmetros. A partir da geração aleatória dos parâmetros do modelo de agregação, buscamos percorrer o espaço de possíveis ordenamentos em situações com diferentes números de critérios e alternativas.

Este artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 2, apresentamos as características principais dos modelos linear e integral de Choquet (caso 2-aditivo). Na Seção 3, descrevemos o problema abordado no trabalho e detalhamos o algoritmo utilizado nas simulações de Monte Carlo para a geração dos parâmetros dos modelos de agregação. A Seção 4 apresenta e discute os resultados das simulações, comparando os rankings atingíveis para diferentes situações. Finalmente, na Seção 5, apresentamos nossas conclusões.

2. Métodos de agregação em MCDA

Na área de MCDA, os métodos de agregação são utilizados para obtenção de um valor global (*score*) para cada uma das alternativas. Tais métodos podem ser classificados de diversas maneiras, dependendo da sua capacidade de captar interações entre critérios e da complexidade computacional associada à sua aplicação. Alguns exemplos de métodos de agregação utilizados em MCDA são: a soma ponderada [Greco, 2006], método OWA (*Ordered Weighted Averaging* [Yager, 1988], e a integral de Choquet [Grabisch e Labreuche, 2004; Grabisch, 1997]. Neste trabalho, realizaremos uma comparação entre os métodos de soma ponderada, que denominaremos método linear, e a integral de Choquet (caso 2-aditivo). A escolha desses dois métodos deve-se à abordagem distinta que ambos utilizam para modelar a inter-relação entre os critérios [Grabisch, 1997; Lust e Rolland, 2013; Triantaphyllou e Shu, 2001]. No método linear, assume-se que os critérios são independentes, enquanto a integral de Choquet permite incorporar relações como redundância e sinergia entre os critérios.

No restante desta seção, apresentamos a notação que será utilizada no trabalho, uma definição de ranking atingível e uma breve descrição dos métodos de agregação que serão considerados neste trabalho.

2.1. Notações e definições

Um problema central em MCDA consiste em avaliar um conjunto $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$, de m alternativas, em relação a um número finito de n critérios, $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$, levando em conta a importância relativa desses critérios. Formalmente, para m alternativas e n critérios, cada alternativa A_i possui um vetor de desempenho $\mathbf{d}_i = [d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}]$, onde d_{ij} representa o desempenho (ou consequência) da alternativa (A_i) no critério C_j . O conjunto de todos os vetores-linha $\mathbf{d}_i$ formam a matriz de decisão $\mathbf{D}$.

A avaliação de cada alternativa, ou valor global, é usualmente obtida por uma função de agregação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que atribui um número real v_i para cada alternativa do conjunto A . O ordenamento dos valores $v_1, v_2, \dots, v_m$ gera um ranking no conjunto de alternativas. Para uma dada matriz de decisão $\mathbf{D}$, um ranking $r = \{A_{\pi_1} \succ A_{\pi_2} \succ \dots \succ A_{\pi_m}\}$, é dito atingível por um método de MCDA se existe um conjunto de parâmetros no modelo de agregação desse método para o qual é possível obter $v_{\pi_1} > v_{\pi_2} > \dots > v_{\pi_m}$, onde o vetor $\pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m]$ indica uma permutação no conjunto de índices das alternativas dado por $\{1, 2, \dots, m\}$.

Neste trabalho, o número total de rankings atingíveis por um modelo f de agregação será denotado por $NR(f)$. Naturalmente $NR(f) \leq m!$, ou seja, o número máximo de rankings atingíveis é limitado pelo número de permutações das alternativas. Ao longo do trabalho faremos referência a $m!$ como o número total de possíveis rankings, não necessariamente atingíveis. Note também que $NR(f)$, além de ser uma função do modelo de agregação f , depende da matriz de decisão $\mathbf{D}$.

2.2. Método Linear

O modelo de agregação linear é um modelo clássico de MCDA utilizado para agregar um conjunto de m alternativas avaliadas em relação a um conjunto de n critérios. Seja $\mathbf{d}_i = [d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}]$ o desempenho (ou consequência) da alternativa A_i em relação aos critérios $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ e $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]$, onde $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, o conjunto de pesos (ou constantes de escala) atribuídos pelo decisor, o valor de uma alternativa em um modelo de agregação linear é dado por:

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_j d_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (1)$$

O modelo linear permite que os decisores utilizem diferentes abordagens para obtenção dos pesos e oferece uma estrutura para a análise e comparação das alternativas. No entanto, o modelo linear pode ser limitado em sua capacidade de capturar interações complexas entre os critérios, o que pode ser um fator importante em certos contextos de decisão. Uma alternativa que vem sendo intensamente aplicada em MCDA é baseada na chamada integral de Choquet, que é capaz capturar efeitos de sinergia, redundância e interdependências entre critérios [Grabisch, 2000; Duarte, 2018]. Tal método será apresentado na próxima seção.

2.3. A integral de Choquet - (caso 2-aditivo)

A integral de Choquet é uma função de agregação não linear que permite modelar a interação entre critérios. Neste trabalho, estamos particularmente interessados na integral de Choquet com capacidade 2-aditiva [Grabisch, 1997]. Este caso restrito da integral de Choquet vem sendo muito utilizado em MCDA, por ser mais simples que o caso geral. Para definir esse modelo matematicamente, considere $\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_N\}$ um conjunto finito e $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ o conjunto das partes de $\mathcal{C}$. Uma medida *fuzzy*, ou capacidade, em $\mathcal{C}$ é uma função $\mu : \mathcal{P}(\mathcal{C}) \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\mathcal{C}) = 1$, e $\mu(\mathcal{G}) \leq \mu(\mathcal{H})$, para todo $\mathcal{G} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{C}$ (condição de monotonicidade). Em termos práticos, a capacidade $\mu(\mathcal{H})$ quantifica a importância da coalizão a cada elemento expressa pelo conjunto $\mathcal{H}$ [Duarte, 2018; Grabisch, 2000]. A integral de Choquet de um vetor $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_m]$ em relação a μ é definida por

$$D_{\mathbf{p}}^{\mu} = \sum_{t=1}^N (p_{(t)} - p_{(t-1)}) \mu(T_{(t)}), \quad (2)$$

onde $p_{(i)}$ representa o i -ésimo menor elemento de $\mathbf{p}$, de modo que $p_{(1)} \leq \dots \leq p_{(n)}$ e $p_{(0)} := 0$, e $T_{(t)} = \{c_{(t)}, \dots, c_{(N)}\}$. Interessante notar que, com relação às capacidades, a integral de Choquet é uma função linear.

Uma abordagem alternativa para o cálculo da integral de Choquet consiste na utilização do índice de interação generalizada, que pode ser visto como uma transformação de μ , é definido para qualquer agrupamento $\mathcal{H}$ obtido a partir do conjunto dos subconjunto de $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$ e é dado por [Duarte, 2018]

$$I(\mathcal{H}) := \sum_{\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C} \setminus \mathcal{H}} \frac{(N - |\mathcal{K}| - |\mathcal{H}|)! |\mathcal{K}|!}{(N - |\mathcal{H}| + 1)!} \times \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{H}} (-1)^{|\mathcal{H}| - |\mathcal{B}|} \mu(\mathcal{K} \cup \mathcal{B}). \quad (3)$$

Os conjuntos $\mathcal{K}$ e $\mathcal{B}$ denotam conjuntos auxiliares que atuam como índices para os operadores de soma. Quando calculado para um único elemento de $\mathcal{C}$, digamos c_i , o índice de interação generalizado corresponde ao índice de importância de Shapley, que é denotado por $I_i = I\{c_i\}$. O índice de Shapley I_i quantifica a contribuição média do elemento c_i em todas as coalizões. De fato, a importância de c_i deve levar em conta não apenas $\mu(c_i)$, mas também todos os valores de $\mu(\mathcal{H})$, tais que $c_i \in \mathcal{H}$. Os índices de Shapley são sempre positivos e sua soma é igual a 1, ou seja, $\sum_{i=1}^N I_i = 1$ [Grabisch, 2000].

No contexto de MCDA, o conjunto $\mathcal{C}$ representará os critérios e a interação entre dois elementos c_i e c_j pode ser quantificada calculando (3) para a coalizão $\mathcal{H} = \{c_i, c_j\}$. A medida resultante, representada por $I_{ij} = I(c_i, c_j)$ e denominada índice de interação, permite interpretar o tipo de interação que ocorre entre os critérios. Quando $I_{ij} > 0$, essa relação é dita positiva ou sinérgica, ou seja, a importância conjunta, para fins do processo de agregação, dos critérios i e j é maior do que a soma das importâncias individuais em cada critério. Por outro lado, se $I_{ij} < 0$, caracteriza-se uma interação negativa ou redundância, pois a importância conjunta dos critérios i e j é menor do que a soma das importâncias individuais. Por fim, $I_{ij} = 0$ significa que os critérios não

interagem, portanto sua contribuição para a agregação final é independente. O modelo da integral de Choquet pode ser representado em termos de $\mu(\mathcal{H})$ ou $I(\mathcal{H})$ para todas as coalizões de elementos, pois $I(\mathcal{H})$ é uma transformada inversível de $\mu(\mathcal{H})$ [Duarte, 2018].

Embora interessante do ponto de vista de modelagem, o número total de coalizões na integral de Choquet é de $2^N - 2$, o que torna sua utilização bastante difícil. Na prática, busca-se simplificar o modelo em termos do número de coalizações por meio de classes restritas de capacidades conhecidas como k -aditivas, que fixa o grau de interação entre os elementos [Duarte, 2018; Grabisch, 2000]. Neste trabalho, utilizaremos a classe de capacidades 2-aditivas. Assim, as capacidades são completamente determinadas pelos índices de Shapley I_i e pelos índices de interação I_{ij} e ainda assim são flexíveis o suficiente para modelar interações não lineares, como sinergia e redundância entre quaisquer pares de critérios [Grabisch, 1997]. Considerando o conjunto C representando os critérios a serem agregados, e o vetor $\mathbf{d}_i = [d_{i1}, \dots, d_{im}]$ representando as avaliações de uma dada alternativa em relação aos critérios de C , é possível expressar a integral de Choquet no caso da medida 2-aditiva da seguinte forma:

$$v_i = \sum_{j=1}^n I_j d_{ij} - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{I_{jk}}{2} |d_{ij} - d_{ik}|, \quad (4)$$

com a propriedade que $I_j - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} |I_{jk}| \geq 0$ para todo j . Neste trabalho, iremos considerar $I_j = w_j$. Desta forma, a integral de Choquet (caso 2-aditivo) pode ser vista como uma extensão do método linear, pois fazendo $I_{jk} = 0$ teros exatamente a expressão (1).

3. Metodologia

Nesta seção, detalhamos a metodologia proposta para este trabalho. Inicialmente, apresentamos o contexto geral do problema na Subseção 3.1, delineando as principais características e os desafios envolvidos. Em seguida, na Subseção 3.2, descrevemos o algoritmo de simulação de Monte Carlo, que foi utilizado para abordar o problema de maneira estocástica.

3.1. O contexto geral do problema

O problema central deste artigo consiste em estimar o número de ordenamentos atingíveis pelo modelo de agregação linear (1) e pela versão 2-aditiva da integral de Choquet (4). Ou seja, para uma mesma matriz de decisão $\mathbf{D}$, nosso intuito é verificar se um modelo não linear de agregação, como a integral de Choquet permite obter um número significativamente maior de ordenamentos quando comparados com métodos lineares, considerando o conjunto de todos os possíveis parâmetros desses modelos de agregação.

Vale observar que nem todos os rankings possíveis são atingíveis. A título de exemplo, vamos considerar uma situação simplificada de tomada de decisão para a aquisição de uma máquina de produção. Neste exemplo, as alternativas são diferentes tipos de máquinas, que são avaliadas com base em dois critérios: o custo anual de operação e a produtividade e será utilizado o método linear. A Tabela 1 apresenta as avaliações das alternativas já normalizadas e na direção de maximização. Os pesos dos critérios podem variar entre diferentes decisores, resultando em possíveis ordenamentos distintos das alternativas. Cada conjunto de pesos, quando aplicado na Equação (1), resulta em um conjunto distinto de valores v_i . Esses valores serão responsáveis pelo ordenamento das alternativas, ou seja, pela obtenção dos rankings.

Tabela 1: Valores normalizados dos critérios: exemplo da máquina de produção.

Máquina	Custo Anual de Operação (C1)	Eficiência de Produção (C2)
A_1	0.36	0.30
A_2	0.30	0.40
A_3	0.24	0.26

Vamos supor que o tomador de decisão atribua igual importância aos dois critérios de avaliação, ou seja, $w_1 = w_2 = 0.5$. Substituindo esses valores na Equação 1, e se considerarmos uma agregação linear, temos: $v_1 = 0.33$, $v_2 = 0.35$ e $v_3 = 0.25$. Neste caso, o ranking das três alternativas é: $r_1 = \{A_2 \succ A_1 \succ A_3\}$. No entanto, se o tomador de decisão considerar que o primeiro critério custo de operação (C1) é significativamente mais importante que o segundo critério eficiência de produção (C2), ele pode definir pesos diferentes para os critérios, como por exemplo $w_1 = 0.7$ e $w_2 = 0.3$. Usando a mesma Equação 1, podemos obter resultados diferentes para as alternativas, ou seja, $v_1 = 0.34$, $v_2 = 0.33$ e $v_3 = 0.25$. Neste caso, o ranking obtido é $r_2 = \{A_1 \succ A_2 \succ A_3\}$.

Ou seja, neste exemplo, há $3! = 6$ rankings possíveis: $A_1 \succ A_2 \succ A_3$, $A_1 \succ A_3 \succ A_2$, $A_2 \succ A_3 \succ A_1$, $A_2 \succ A_1 \succ A_3$, $A_3 \succ A_1 \succ A_2$ e $A_3 \succ A_2 \succ A_1$. No entanto, nem todos os rankings poderão ser atingíveis quando consideramos apenas mudanças nos pesos dos critérios. Por exemplo, em relação aos valores de desempenho, observamos que a Máquina A_2 domina a Máquina A_3 . Portanto, os ordenamentos: $A_3 \succ A_2 \succ A_1$ e $A_3 \succ A_1 \succ A_2$ não são atingíveis no contexto deste problema, evidenciando que nem todos os ordenamentos são atingíveis dentro de um contexto de alteração apenas nos pesos dos critérios.

3.2. Proposta de estimação do número de rankings atingíveis por meio de simulação de Monte Carlo

O método de simulação de Monte Carlo abrange uma variedade de algoritmos que geram resultados numéricos por meio de amostragem aleatória repetida a partir de uma distribuição de probabilidade específica [Heijungs, 2020; Metropolis e Ulam, 1949; Mazurek e Strzałka, 2022]. Este método tornou-se uma ferramenta de modelagem bastante utilizada em diversas áreas, suportada por uma vasta gama de softwares. No contexto deste trabalho, utilizamos a simulação de Monte Carlo para gerar os diferentes conjuntos de parâmetros (pesos e índices de interação) dos critérios e analisar o comportamento dos modelos linear e integral de Choquet 2-aditivo em termos dos rankings atingíveis.

Para execução de nossa proposta, implementamos um Algoritmo em linguagem Python de programação, cujo pseudo-código está descrito no Algoritmo 1. Este algoritmo gera um ordenamento de alternativas considerando uma matriz de decisão fixa e variando os parâmetros dos métodos, que são distribuídos uniformemente e gerados a partir de uma simulação de Monte Carlo.

Os resultados obtidos com as simulações do modelo linear e Choquet (2-aditivo) na geração de rankings atingíveis sob diferentes cenários serão analisados na Seção 4.

4. Resultados

Nesta seção, apresentamos os resultados obtidos a partir das simulações realizadas com os modelos linear e não linear (baseado na integral de Choquet 2-aditivo) para estimar o número de rankings atingíveis. Os resultados foram gerados utilizando uma matriz de decisão fixa, que foi gerada aleatoriamente a partir de uma distribuição uniforme entre 0 e 1, e variando os parâmetros através de simulações de Monte Carlo.

Algoritmo 1 Gera os rankings para os modelos linear e Choquet (caso 2-aditivo).

Require: m : número de alternativas, n : número de critérios, N_{mc} : número de simulações de Monte Carlo, G : número de vezes que a rotina será rodada

- 1: Declare listas para armazenar as proporções de rankings: *proporção_linear* e *proporção_choquet*
- 2: **for** $g = 1$ até G **do**
- 3: Gere uma matriz $\mathbf{D}$ aleatória de tamanho $m \times n$
- 4: Inicialize as listas de rankings *rank_linear* e *rank_ci* com zeros
- 5: **for** $pp = 1$ até N_{mc} **do**
- 6: Gere pesos w aleatórios e normalize: $w \leftarrow$ vetor aleatório uniforme(0, 1, n), $w \leftarrow w/\text{soma}(w)$
- 7: Calcule $\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{w}$, onde $v = v_i$ e é definido pela Equação 1
- 8: Ordene v e armazene os índices na matriz *rank_linear*
- 9: Gere a matriz de interações $\mathbf{I}$ com coeficientes aleatórios uniformes entre -1 e 1 para $i \neq j$
- 10: **while** I_{ij} (para todo i e j) gerados não satisfizer a condição de monotonicidade **do**
- 11: Gere I_{ij} a partir de distribuição uniforme
- 12: **end while**
- 13: Garanta simetria em $\mathbf{I}$ (torne $\mathbf{I}$ simétrica)
- 14: Calcule v_c para o caso Choquet 2-aditivo, onde $v_c = v_i$ para Choquet 2-aditivo e é definido pela Equação 4
- 15: Ordene v_c e armazene os índices na matriz *rank_ci*
- 16: **end for**
- 17: Calcule as proporções de rankings para a iteração g e adicione a *proporção_linear* e *proporção_choquet*
- 18: **end for**

Para investigar o número total de rankings atingíveis por cada um dos métodos analisados, o algoritmo 1 foi executado para todas as combinações de $m = \{1, 2, \dots, 8\}$ alternativas e $n = \{1, 2, \dots, 8\}$ critérios. Para cada cenário (m, n) foram amostradas $G = 50$ matrizes aleatórias, com dados distribuídos uniformemente e, para cada uma delas, foram sorteados $N_{mc} = 10.000$ vetores de pesos normalizados para o modelo linear, que foram também utilizados como índices de Shapley para a integral de Choquet. Além disso, também foram geradas aleatoriamente 10.000 matrizes de interação I_{ij} . Os valores globais de cada alternativa foram obtidos tanto para o modelo linear (Equação (1)) quanto para o modelo Choquet 2-aditivo (Equação (4)), e ordenadas para determinar os rankings correspondentes.

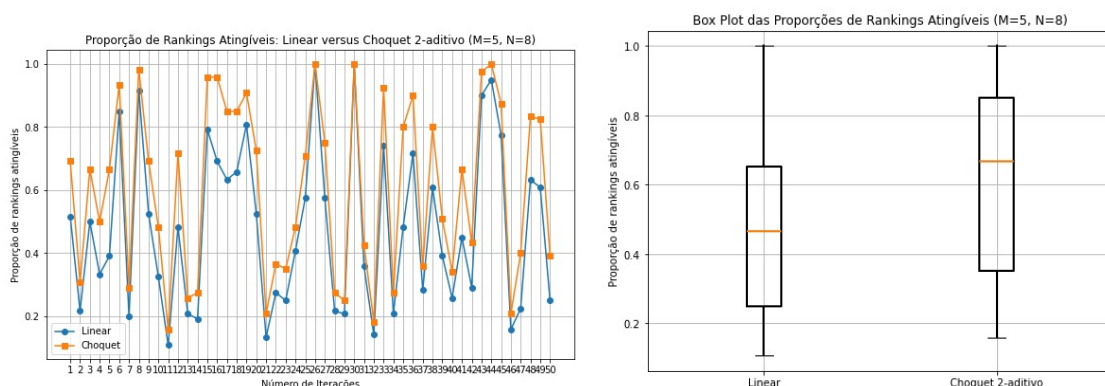
Inicialmente faremos uma análise de três cenários específicos, descritos na Tabela 2.

Tabela 2: Descrição dos Cenários de Simulação.

Cenário	Número de Alternativas (m)	Número de Critérios (n)
1	5	8
2	8	5
3	6	6

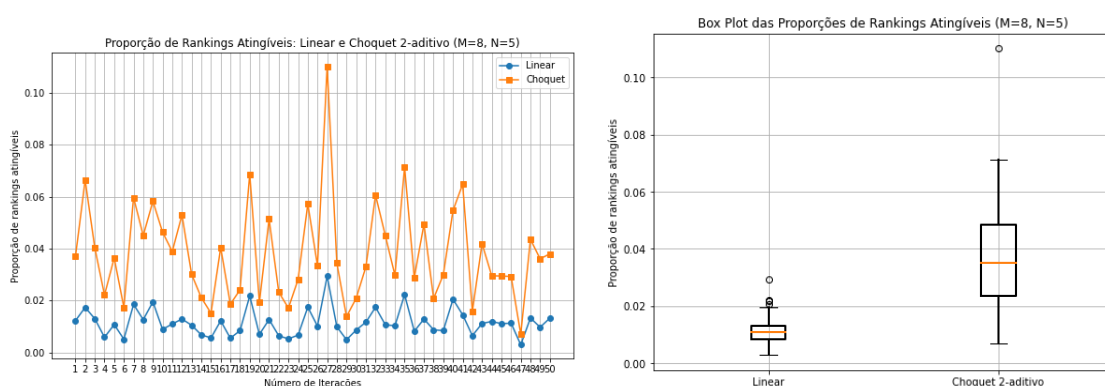
Iniciamos comparando os cenários 1 ($m = 5$ e $n = 8$) com o cenário 2 ($m = 8$ e $n = 5$), cujo os resultados são apresentados nas Figuras 1 e 2. A Figura 1(a), mostra, para cada

uma das matrizes $\mathbf{D}$ gerada, a proporção de rankings atingidos pelos dois modelos testados em relação ao número total de rankings possível, ou seja, $NR(f) \leq m!$. Já a Figura 2(b) mostra o boxplot considerando as $G = 50$ diferentes execuções da matriz $\mathbf{D}$. Nesta primeira análise podemos observar que o método baseado na integral de Choquet 2-aditivo permite atingir um número maior de rankings que o método linear. É possível observar também que no cenário 1 (Figura 1), onde o número de alternativas é menor que o número de critérios ($m < n$), ambos os modelos tem um desempenho parecido em termos de proporção de rankings atingidos. Já quando analisamos o cenário 2 (Figura 2), em que o número de alternativas é maior que o número de critérios ($m > n$), a diferença entre a proporção de rankings atingíveis pela integral de Choquet e pelo modelo linear se acentua. Note que a proporção de rankings atingíveis é menor no cenário 2. Isso ocorre porque essa proporção é calculada em relação ao número total de rankings possíveis, dado por $m!$. Consequentemente, o número de rankings possíveis é $(5! = 120)$ no cenário 1 e $(8! = 40.320)$ no cenário 2.



(a) Cenário 1: Proporção de rankings atingíveis para diferentes realizações da matriz $\mathbf{D}$. (b) Cenário 1: Boxplots para a proporção de rankings atingidos para o modelo linear e a integral de Choquet.

Figura 1: Resultados do Cenário 1 (5 alternativas e 8 critérios).



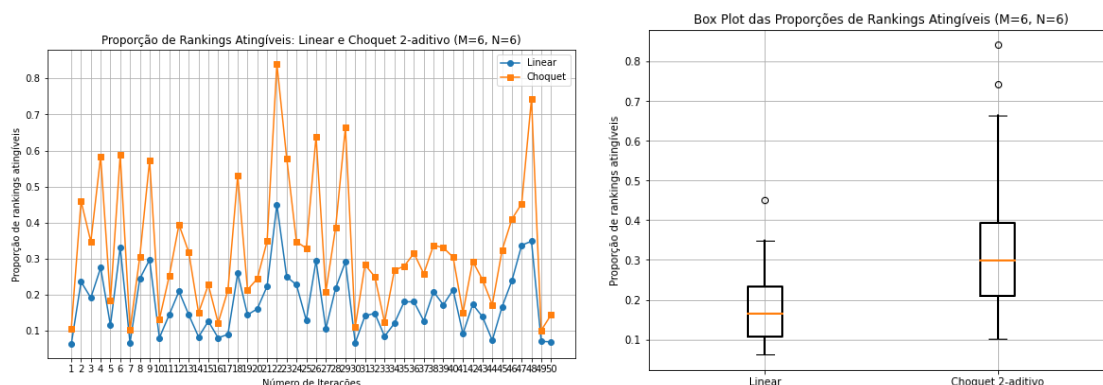
(a) Cenário 2: Proporção de rankings atingíveis para diferentes realizações da matriz $\mathbf{D}$. (b) Cenário 2: Boxplots para a proporção de rankings atingidos para o modelo linear e a integral de Choquet.

Figura 2: Resultados do Cenário 2 (8 alternativas e 5 critérios).

Em relação ao número de rankings possíveis, destaca-se ainda o trabalho de [Ray e Triantaphyllou, 1999], onde os autores demonstram que quando o número de critérios é menor que o

número de alternativas, não é possível obter todos os ordenamentos possíveis das alternativas simplesmente alterando os pesos dos critérios. Além disso, o número possível de rankings que podem ser gerados pode ser significativamente inferior ao seu limite superior: o fatorial do número de alternativas ($m!$).

No cenário 3, em que o número de alternativas ($m = 6$) é o mesmo que o número de critérios ($n = 6$), apresentado na Figura 3, os resultados mostram que o modelo de Choquet 2-aditivo também atinge um número significativamente maior de rankings que o modelo linear. Para este cenário, dado que o número de alternativas é 6, o número de rankings possíveis é $6!$, ou seja 720. Neste cenário, a proporção média de rankings atingíveis pelo modelo linear é $\approx 0,18$ e no caso do modelo de Choquet 2-aditivo é $\approx 0,30$.



(a) Cenário 3: Proporção de rankings atingíveis para diferentes realizações da matriz D . (b) Cenário 3: Boxplots para a proporção de rankings atingidos para o modelo linear e a integral de Choquet.

Figura 3: Resultados do Cenário 3 (6 alternativas e 6 critérios).

A Tabela 3 apresenta uma síntese dos resultados obtidos para todos os cenários simulados. Essa Tabela apresenta o aumento, em percentual, do número de rankings atingíveis pelo método da integral de Choquet (2-aditivo) em comparação com o número de rankings atingíveis pelo método linear, isto é: $(NR(Choquet) - NR(Linear)) / NR(Linear)$. Por exemplo, ao compararmos um cenário com 6 alternativas ($m = 6$) e 7 critérios ($n = 7$), podemos ver que o modelo de Choquet 2-aditivo supera o modelo linear em 61%. Além disso, o modelo Choquet 2-aditivo amplia o seu desempenho em relação ao modelo linear especialmente à medida que aumenta o número de alternativas e critérios, permitindo um maior grau de liberdade na avaliação das alternativas.

4.1. Discussão dos resultados

A pergunta central deste trabalho refere-se a uma investigação sobre o número de rankings que são atingíveis por dois modelos de agregação distintos. Ou seja, nosso intuito foi responder se para uma mesma matriz de decisão D , métodos mais sofisticados, como a Integral de Choquet 2-aditivo, permitem obter um número diferente de ordenamentos quando comparados com métodos lineares, considerando o conjunto de todos os possíveis pesos. Com os resultados analisados nesta seção, podemos concluir que, de fato, o método baseado na integral de Choquet apresenta um número maior de ordenamentos atingíveis que o modelo linear e essa diferença de desempenho depende dos números de critérios e alternativas. Importante destacar que, em qualquer situação, a integral deve atingir um número de rankings maior que o número atingido por um modelo linear, uma vez que a integral de Choquet generaliza o modelo. Assim sendo, o nosso interesse principal foi justamente investigar em quais situações o número de rankings pela integral de Choquet é con-

Número de alternativas (m)	Número de critérios (n)							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%
2	0%	0%	7%	8%	4%	1%	0%	0%
3	0%	33%	32%	21%	8%	4%	4%	8%
4	0%	76%	70%	30%	31%	16%	20%	15%
5	0%	142%	126%	80%	62%	48%	30%	29%
6	0%	222%	225%	183%	102%	73%	61%	51%
7	0%	288%	477%	259%	164%	112%	81%	64%
8	0%	416%	668%	382%	221%	138%	111%	80%

Tabela 3: Ganho na proporção de rankings atingíveis observado para a integral de Choquet (2-aditivo) em relação ao modelo linear.

sideravelmente maior que o número atingido pelo modelo linear. Esse resultado está sintetizado na Tabela 3.

Ressaltamos que os resultados desta pesquisa foram obtidos por meio de simulação de Monte Carlo, o que apresenta limitações, uma vez que não há garantias que o processo de simulação visita todo o espaço de busca referente aos parâmetros dos modelos de agregação. Além disso, os dados da matriz de decisão e dos critérios foram gerados a partir de uma distribuição uniforme.

5. Considerações finais

Neste artigo, discutimos o problema do número de rankings atingíveis pelo modelo linear clássico em comparação com o modelo baseado na integral de Choquet 2-aditivo, por meio de um processo de simulação de Monte Carlo. As análises foram conduzidas utilizando resultados obtidos por meio de simulações, considerando diferentes cenários nos quais a matriz de decisão foi mantida fixa enquanto os parâmetros dos modelos de agregação eram amostrados. Os resultados mostram que o modelo baseado na integral de Choquet 2-aditivo apresenta um desempenho consideravelmente melhor que o modelo linear nos casos em que o número de alternativas é igual ou maior que o número de critérios ($m \geq n$). Observou-se também que, quanto maior o número de alternativas, maior é o grau de liberdade que o método Choquet possui em comparação ao linear. Além disso, o ganho proporcional do modelo Choquet 2-aditivo é ampliado à medida que o número de alternativas e critérios aumentam. Isso ressalta a capacidade do modelo Choquet 2-aditivo de lidar com a interação entre os critérios, proporcionando uma abordagem mais flexível à medida que a escala do problema aumenta.

Agradecimentos

Agradecemos o CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) e Programa de Pós-Graduação em Tecnologia (PPGT) da Unicamp, pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

Referências

Duarte, L. T. (2018). A novel multicriteria decision aiding method based on unsupervised aggregation via the choquet integral. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 65(2):293–302.

- Grabisch, M. (2000). A graphical interpretation of the choquet integral. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(5):627–631.
- Grabisch, M. (1997). k-order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy Sets and Systems*, 92(2):167–189. ISSN 0165-0114. Fuzzy Measures and Integrals.
- Grabisch, M. e Labreuche, C. (2004). Fuzzy measures and integrals in MCDA. In *Multiple Criteria Decision Analysis*, p. 563–608. Kluwer Academic Publishers.
- Greco, S. (2006). *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer New York. ISBN 9780387230818.
- Heijungs, R. (2020). On the number of monte carlo runs in comparative probabilistic lca. *The International Journal of Life Cycle Assessment*, 25(2):394–402.
- Keeney, R. L. e Raiffa, H. (1993). *Decisions with multiple objectives: preferences and value trade-offs*. Cambridge university press.
- Lust, T. e Rolland, A. (2013). On the computation of choquet optimal solutions in multicriteria decision contexts. In Ramanna, S., Lingras, P., Sombaththeera, C., e Krishna, A., editors, *Multi-disciplinary Trends in Artificial Intelligence*, p. 131–142, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-44949-9.
- Mazurek, J. e Strzałka, D. (2022). On the monte carlo weights in multiple criteria decision analysis. *PLOS ONE*, 17(10):1–18.
- Metropolis, N. e Ulam, S. (1949). The monte carlo method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247):335–341.
- Ray, T. e Triantaphyllou, E. (1999). Procedures for the evaluation of conflicts in rankings of alternatives. *Computers and Industrial Engineering*, 36.
- Roy, B. (1996). *Multicriteria Methodology Goes Decision Aiding*. Kluwer Academic Publishers.
- Triantaphyllou, E. e Shu, B. (2001). On the maximum number of feasible ranking sequences in multi-criteria decision making problems. *European Journal of Operational Research*, 130(3): 665–678. ISSN 0377-2217.
- Yager, R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision-making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18(1):183–190.