

Método de Pontos Interiores e Análise de Sensibilidade

Chen Jia Min

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Universidade Estadual de Campinas
c195672@dac.unicamp.br

Petra Maria Bartmeyer

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Universidade Estadual de Campinas
pmb@unicamp.br

Antonio Carlos Moretti

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Universidade Estadual de Campinas
amoretti@unicamp.br

Kelly Cristina Poldi

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Universidade Estadual de Campinas
kelly@ime.unicamp.br

RESUMO

Os preços-sombra é um conceito fundamental na Análise de Sensibilidade em Programação Linear (PL). O Método Simplex é amplamente utilizado para calculá-los, geralmente eles se coincidem com a solução ótima do problema dual. No entanto, em casos de degenerescência, onde múltiplas bases ótimas existem, os preços-sombra podem diferir com o aumento ou diminuição das restrições. Os solvers comerciais de PL, que frequentemente empregam o Método Simplex como método principal de resolução, muitas vezes fornecem informações imprecisas nessas situações. Este trabalho visa identificar tais erros e propõe a possibilidade de utilizar Métodos de Pontos Interiores como uma abordagem alternativa para obter os preços-sombra corretos. O objetivo é empregar o conceito de partição ótima das variáveis, induzido por pares de soluções estritamente complementares. Por fim, apresentamos um exemplo comparativo para ilustrar as informações obtidas utilizando a abordagem de bases ótimas do Método Simplex e as partições ótimas dos Métodos de Pontos Interiores.

PALAVRAS CHAVE. Programação Linear, Pesquisa Operacional, preços-sombra. OA – Outras aplicações em PO

ABSTRACT

In linear programming (LP), shadow prices play an important role in sensitivity analysis. While the Simplex Method is commonly used to compute them, and typically, they are identical to the optimal solution of the dual problem. However, in cases of degeneracy, where multiple optimal bases exist, shadow prices may vary with changes in the right-hand side (RHS) of constraints, either increasing or decreasing accordingly. This variability can introduce inaccuracies in commercial

solvers that rely on the Simplex Method. This study aims to highlight these discrepancies and propose the use of the Interior Point Method as an alternative approach for computing shadow prices. The objective is to utilize the concept of optimal partitions in primal variables and dual slackness variables, induced by pairs of strictly complementary solutions. Finally, we present an illustrative example comparing the results obtained using the optimal basis approach of the Simplex Method with those obtained using the Interior Point Method and optimal partitions.

KEYWORDS. Linear Programming, Operational Research, Shadow Prices.

OA – Others applications of OR

1. Introdução

A análise de sensibilidade em Problemas de Programação Linear (PPL), realizada em uma fase de pós-processamento, é crucial para compreender como alterações nos parâmetros do modelo impactam a solução ideal. Esse tipo de avaliação possibilita que os decisores identifiquem quais variáveis têm maior influência no resultado final e quais parâmetros podem variar sem afetar a solução ótima. As variáveis duais, também chamados de preços-sombra, desempenham um papel fundamental na análise de sensibilidade, pois indicam a variação na função-objetivo decorrente de uma mudança marginal no vetor do lado direito das restrições. Os preços-sombra oferecem uma medida do quanto a função-objetivo melhoraria ou pioraria com um acréscimo ou decréscimo unitário nos recursos disponíveis. Essa informação é essencial para priorizar recursos limitados e compreender o valor econômico de cada recurso no contexto do problema.

Porém, a análise de sensibilidade requer atenção para interpretar corretamente os resultados e traduzir as implicações técnicas em decisões práticas. Após identificar os preços-sombra e os intervalos de viabilidade das variáveis e restrições, é fundamental validar essas informações com dados reais e contexto empresarial. Além disso, é necessário considerar possíveis interações entre múltiplas variáveis e restrições, que podem não ser evidentes na análise isolada de cada parâmetro.

Neste contexto, soluções degeneradas apresentam um desafio significativo. Em uma solução degenerada, várias soluções ótimas são encontradas no mesmo ponto da função objetivo, o que significa que pequenas perturbações nos parâmetros do modelo podem causar mudanças abruptas na base ótima sem afetar o valor da função objetivo. Isso torna a interpretação dos preços-sombra e da análise de intervalo mais complicada.

O processamento pós-análise de sensibilidade em situações de degeneração requer métodos avançados e precisos para revelar a verdadeira relação entre variáveis e restrições. Estratégias como a análise paramétrica e a decomposição de cenários podem ser empregadas para explorar todas as soluções ótimas e suas implicações. Além disso, a interpretação dos resultados deve levar em conta a possibilidade de múltiplas bases ótimas e a necessidade de analisar as transições entre essas bases. A comunicação clara dos resultados dessa análise complexa é crucial para garantir que os decisores compreendam as limitações e a validade das conclusões feitas, possibilitando uma gestão mais eficaz dos riscos associados à incerteza dos parâmetros.

2. Conceitos Básicos

Esta seção apresenta a metodologia utilizada para calcular os preços sombras usando a ideia de partições ótimas. Primeiramente, introduzimos as notações e os conceitos básicos que serão utilizados ao longo do texto.

Considere a forma padrão de um PPL na forma primal:

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \quad c^T x \\ & \text{s.a.} \quad Ax = b \\ & \quad \quad x \geq 0, \end{aligned}$$

em que $c, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. E cujo problema dual associado é:

$$\begin{aligned} (D) \quad & \max \quad b^T y \\ & \text{s.a.} \quad A^T y + s = c \\ & \quad \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

As condições de otimalidade para (P) e (D) são dados pela factibilidade primal-dual e a folgas de complementaridade, isto é, o trio (x, y, s) é ótimo para (P) e (D) se e somente se satisfazem:

$$Ax = b, \quad A^T y + s = c, \quad x^T s = 0, \quad x \geq 0, \quad s \geq 0.$$

Um vez definidos os problemas primal e dual, são apresentados a seguir as definições de Complementaridade Estrita e de Partição Ótima.

Definição 1 (Complementaridade Estrita) *Seja (P) e (D) um par de problemas de PL factíveis. Denota por $\mathcal{P}$ e $\mathcal{D}$ o conjunto de soluções factíveis para os problemas (P) e (D) , respectivamente. Se existe $x^* \in \mathcal{P}$ e $(y^*, s^*) \in \mathcal{D}$ tais que $(x^*)^T s^* = 0$ e $x_i^* + s_i^* > 0$, $i = 1, \dots, n$, dizemos que (x^*, y^*, s^*) é uma solução estritamente complementar.*

Para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^n$, seu *suporte* é definido como

$$\sigma(x) := \{i : x_i > 0\}.$$

Assim, uma solução factível (x, s) é ótima e estritamente complementar se e somente se $\sigma(x) \cap \sigma(s) = \emptyset$ e $\sigma(x) \cup \sigma(s) = \{1, 2, \dots, n\}$. Usando a solução estritamente complementar, a partição ótima de um problema de programação linear é definido como abaixo.

Definição 2 (Partição Ótima) *Seja (x^*, s^*) uma solução estritamente ótima de (P) e de (D) , tendo*

$$\mathcal{B} = \sigma(x) = \{i : x_i > 0\}$$

$$\mathcal{N} = \sigma(s) = \{i : s_i > 0\}.$$

A partição $\pi = (\mathcal{B}, \mathcal{N})$ do conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ é chamada de **partição ótima**.

Considerando os conceitos de Complementaridade Estrita e Partição Ótima, definimos o conjunto de soluções ótimas dos problemas (P) e (D) por $\mathcal{P}^*$ e $\mathcal{D}^*$, respectivamente. A partição ótima $\pi = (\mathcal{B}, \mathcal{N})$ de uma solução estritamente complementar para (P) e (D) induz a partição nos vetores x e s :

$$\begin{bmatrix} x_{\mathcal{B}} \\ x_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} s_{\mathcal{B}} \\ s_{\mathcal{N}} \end{bmatrix}.$$

Assim, é possível reescrever o conjuntos $\mathcal{P}^*$ e $\mathcal{D}^*$ como:

$$\mathcal{P}^* = \{x : Ax = b, x_{\mathcal{B}} \geq 0, x_{\mathcal{N}} = 0\}$$

$$\mathcal{D}^* = \{(y, s) : A^T y + s = c, s_{\mathcal{B}} = 0, s_{\mathcal{N}} \geq 0\}.$$

2.1. Preços-sombra

Análise de sensibilidade (ou pós-otimização) estuda o comportamento da solução ótima de um PPL a respeito uma pequena mudança nos parâmetros de entrada. Um dos aspectos importantes da Análise de Sensibilidade é o conceito de "preços-sombra", que representa a taxa de variação no valor da função objetivo quando ocorre uma pequena mudança em algum elemento do vetor b . A forma clássica para fazer esta Análise de Sensibilidade para problemas não-degenerados é baseado na análise das bases ótimas obtidas pelo Método Simplex. Nestes casos, os preços-sombra das restrições no problema primal são dados pelas soluções ótimas y^* do problema dual. No entanto,

quando se trata de um problema primal degenerado (vide [Quaresma, 2024]), o problema dual associado pode ter mais de uma solução básica ótima, e a interpretação usual dos preços-sombra não se aplica. Rubin e Wagner [Rubin e Wagner, 1990] demonstram a interpretação correta desses resultados na prática.

Gauvin [Gauvin, 1980] utilizou os preços-sombra da *direita* e da *esquerda* para diferenciar entre o aumento e o decréscimo nos coeficientes vetor b . Variando o coeficiente b_i , as notações para os preços-sombra da esquerda e da direita da i -ésima restrição são: p_i^- e p_i^+ . Gauvin provou que,

$$p_i^- = \min\{y_i : y \text{ solução ótima em } (D)\} = \min_k \{y_i^k\}$$

$$p_i^+ = \max\{y_i : y \text{ solução ótima em } (D)\} = \max_k \{y_i^k\},$$

em que y^k ($k = 1, 2, \dots, K$) são as soluções ótimas do problema dual.

O seguinte exemplo ilustra a noção de preços-sombra da esquerda e de direita.

Exemplo 1 Considere o seguinte problema primal degenerado:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
 \text{s.a} \quad & \begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 \geq 12 \\ x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 0x_4 \geq 12 \\ 0x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Seu dual associado é:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 12y_1 + 12y_2 + 0y_3 \\
 \text{s.a} \quad & \begin{cases} y_1 + y_2 + 0y_3 \leq 1 \\ y_1 + 0y_2 + y_3 \leq 1 \\ 0y_1 + 2y_2 + 0y_3 \leq 1 \\ 0y_1 + 0y_2 + 3y_3 \leq 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

O valor ótimo da função objetivo é $z^* = 12$ e o problema dual admite 4 soluções básicas ótimas:

$$y^1 = (1, 0, 0) \quad y^2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \quad y^3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad y^4 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Então, os preços-sombra da esquerda e da direita são dados por:

$$p_1^- = \frac{1}{2} \quad p_2^- = 0 \quad p_3^- = 0$$

$$p_1^+ = 1 \quad p_2^+ = \frac{1}{2} \quad p_3^+ = \frac{1}{3}.$$

Os *solvers* comerciais fornecem somente uma solução dual ótima, assim poderiam considerar os preços-sombra incorretos para os casos degenerados. No exemplo citado acima, usando *GLPK*, a

solução ótima do dual obtido é $y^* = (1, 0, 0)$ e, portanto os preços-sombra fornecido pelo *solver* são:

$$p_1^+ = p_1^- = 1 \quad p_2^+ = p_2^- = 0 \quad p_3^+ = p_3^- = 0,$$

que não coincidem com os preços-sombra reais.

O exemplo acima mostra que os *solvers* comerciais apresentam dificuldades para encontrar os preços-sombra corretos quando se trata de problemas primais degenerados, já que o problema dual associado admite soluções básicas alternativas. No entanto, ao utilizar o conceito de partições ótimas, evitamos esse problema. Além disso, a aplicação desse conceito na análise de sensibilidade se integra de forma natural aos Métodos de Pontos Interiores. Güler e Ye [1993] demonstraram que, se os conjuntos $\mathcal{P}^*$ e $\mathcal{D}^*$ forem limitados, o limite do caminho central converge para uma solução estritamente complementar, determinando assim uma partição ótima.

Jansen, Ross e Terlaky [B.Jansen e T.Terlaky, 1992] mostram que, usando os Métodos dos pontos Interiores, os preços-sombra da esquerda p_i^- e da direita p_i^+ da i -ésima restrição são as soluções dos problemas:

$$\min\{y_i : A^T y + s = c, \quad s_B = 0, \quad s_N \geq 0\}$$

$$\max\{y_i : A^T y + s = c, \quad s_B = 0, \quad s_N \geq 0\},$$

em que $\pi = (\mathcal{B}, \mathcal{N})$ é a partição ótima de uma solução estritamente complementar (x^*, y^*, s^*) dos problemas (P) e (D) .

Note que, como $s_B = 0$, então as restrições dos problemas auxiliares acima podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} B^T y = c_B \\ N^T y + s_N = c_N \\ s_N \geq 0 \end{cases}$$

em que B e N são submatrizes de A com as colunas correspondentes aos índices das partições $\mathcal{B}$ e $\mathcal{N}$ e c_B e c_N é a partição de c .

Próxima seção mostra a maneira para encontrar a partição ótima e os preços sombras corretos usando o Método de Pontos Interiores.

3. Implementação Computacional

Para realizar os testes computacionais, a implementação foi realizada no programa *Julia*, com o auxílio do pacote de otimização *JuMP* e o *solver Ipopt*. Foi desenvolvido um único código para o encontrar a partição ótima e os preços-sombra corretos usando o Método de Pontos Interiores do tipo *Path-Following*. Quanto aos parâmetros com valores fixos no algoritmo, foi adotado $\epsilon = 10^{-8}$ como o critério de parada.

O primeiro passo é obter a partição ótima $\pi = (\mathcal{B}, \mathcal{N})$. Para isso, é necessário resolver os problema (P) e (D) para encontrar a solução ótima (x^*, y^*, s^*) , que é uma solução estritamente complementar conforme mencionado na seção anterior. Continuando com o **Exemplo 1**, o valor ótimo da função objetivo do primal $z_P^* = 11,99999999$ e do dual é $z^* = 12$. As soluções ótimas

de (P) e (D) são:

$$x^* = \begin{bmatrix} 11,99999999 \\ 2,8 \times 10^{-9} \\ 2,4 \times 10^{-9} \\ 6,4 \times 10^{-9} \\ -5,8 \times 10^{-9} \\ -3,7 \times 10^{-9} \\ 4,7 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \quad y^* = \begin{bmatrix} 0,70093002 \\ 0,29906998 \\ 0,126931437 \end{bmatrix} \quad s^* = \begin{bmatrix} -9,7 \times 10^{-9} \\ 0,17213853 \\ 0,40186003 \\ 0,61920568 \\ 0,70093002 \\ 0,29906998 \\ 0,12693143 \end{bmatrix}.$$

De acordo com os dados, a solução ótima (x^*, y^*, s^*) de fato é estritamente complementar. Para obter a partição ótima, foi adotado uma tolerância de 10^{-6} para truncar os valores menores. Portanto, $x_i^* = 0$ para $i = 2, 3, 4, 5, 6$ e $s_1^* = 0$. Logo,

$$\mathcal{B} = \{1\} \quad \text{e} \quad \mathcal{N} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Uma vez que a partição ótima foi obtida, para encontrar os preços sombras, basta resolver os seguintes problemas auxiliares:

$$\begin{array}{ll}
 \min & y_i \\
 \text{s.a.} & \begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + y_3 + s_2 = 1 \\ 2y_2 + s_3 = 1 \\ 3y_3 + s_4 = 1 \\ -y_1 + s_5 = 0 \\ -y_2 + s_6 = 0 \\ -y_3 + s_7 = 0 \\ s_i \geq 0, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}
 \end{array}$$

para encontrar os preços-sombra da esquerda p_i^- e

$$\begin{array}{ll}
 \max & y_i \\
 \text{s.a.} & \begin{cases} y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + y_3 + s_2 = 1 \\ 2y_2 + s_3 = 1 \\ 3y_3 + s_4 = 1 \\ -y_1 + s_5 = 0 \\ -y_2 + s_6 = 0 \\ -y_3 + s_7 = 0 \\ s_i \geq 0, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}
 \end{array}$$

para encontrar os preços-sombra da direita p_i^+ .

Os preços-sombra da esquerda e da direita portanto são:

$$\begin{aligned}
 p_1^- &\approx 0,5 & p_2^- &\approx 0 & p_3^- &\approx 0 \\
 p_1^+ &\approx 1 & p_2^+ &\approx 0,5 & p_3^+ &\approx 0,333
 \end{aligned}$$

na casa de precisão de 10^{-8} .

4. Considerações Finais

A degenerência é um fenômeno que pode impactar as decisões em Problemas de Programação Linear. Neste trabalho, demonstramos os preços-sombra corretas podem ser efetuadas tanto usando bases ótimas quanto usando a partição ótima. O Método Simplex é comumente utilizado por *solvers* comerciais para resolver Problemas de Programação Linear, mas frequentemente fornece informações incompletas e incorretas em problemas degenerados, já que os problemas duais podem ter múltiplas soluções ótimas e os preços-sombra não coincidem com as soluções da variável dual.

A abordagem de análise de sensibilidade usando os Métodos de Interiores é bastante interessante, pois a solução ótima é o centro analítico da faceta ótima e portanto, ela não é o vértice do polítopo das restrições. Por esse motivo, o fenômeno de bases ótimas alternativas no dual que ocorre nos problemas primais degeneradas não acontece. Além disso, uma vez obtida a solução ótima dos problemas originais, a partição ótima é uma consequência imediata e a reutilização das restrições do problema dual para efetuar os preços-sombra agiliza o processo de cálculo dos preços-sombra. Entretanto, é crucial escolher com cuidado a tolerância do critério de parada e de truncamento para obter a partição ótima correta.

Referências

- B.Jansen, C. e T.Terlaky (1992). An interior point approach to postoptimal and parametric analysis in linear programming. p. 34.
- Gauvin, J. (1980). Shadow prices in nonconvex mathematical programming. *Mathematical Programming*, 19(1):300–312.
- Güler, O. e Ye, Y. (1993). Convergence behavior of interior-point algorithms. p. 60.
- Quaresma, B. (2024). Preços-sombra em problemas de programação linear com solução ótima primal degenerada. p. 118.
- Rubin, D. S. e Wagner, H. M. (1990). Shadow prices: tips and traps for managers and instructors. *Interfaces*, 20(4):150–157.