LVI SBPO SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL
DE 04 ATÉ 07 NOVEMBRO 2024
FORTALEZA | CEARÁ

Comparação entre abordagens de programação inteira para o problema da coloração Grundy

Davi Gomes Florêncio, Wladimir Araújo Tavares, Fabio Carlos Sousa Dias
Curso de Ciência da Computação, Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá, Quixadá, Ceará, CEP 63900-000
davigomesflorencio@gmail.com, wladimirtavares@ufc.br,
fabiocsd@lia.ufc.br

RESUMO

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma k-coloração divide os vértices V em k conjuntos independentes $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$. Um vértice $v \in V_i$ é chamado de **vértice de Grundy** se for adjacente a algum vértice $w \in V_j$ para todo $j < i$. O problema da coloração de Grundy busca encontrar o maior valor de k para o qual existe uma k-coloração onde cada vértice seja um vértice de Grundy, chamado número de Grundy ($\Gamma(G)$). Este número representa o pior cenário da heurística de coloração gulosa. O trabalho investiga e compara três formulações de programação inteira para determinar o número de Grundy: duas baseadas no modelo de particionamento de vértices em classes de cores e uma baseada na formulação de representantes assimétrico.

PALAVRAS CHAVE. Teoria e Algoritmos em Grafos, Otimização Combinatória

ABSTRACT

Given a graph $G = (V, E)$, a k-coloring is a way to divide the set of vertices V into k independent sets, denoted by $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$. In a k-coloring, a vertex $v \in V_i$ is considered a **Grundy vertex** if it is adjacent to some vertex $w \in V_j$ for all $j < i$. The Grundy coloring problem seeks to determine the largest value of k for which there exists a k-coloring where each vertex in the coloring is a Grundy vertex. This largest value of k is called the Grundy number and is denoted by $\Gamma(G)$. Obtaining a Grundy coloring can be achieved through the greedy coloring heuristic. Thus, the Grundy number represents the worst-case scenario for the application of the greedy coloring heuristic. This work investigates and compares three integer programming formulations: two are based on the standard model of partitioning vertices into color classes, while the third is based on the asymmetric representatives formulation.

PALAVRAS CHAVE. Theory and Algorithms in Graphs. Combinatorial Optimization.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

1. Introdução

Dado um conjunto de objetos com uma relação entre eles, o problema da coloração consiste em separar os objetos em grupos de modo que objetos relacionados sejam colocados em grupos diferentes. Esse problema surge naturalmente em problemas que precisamos resolver conflitos entre recursos, como no escalonamento de tarefas Leighton [1979], planejamento de quadro de horários de Werra [1985], entre outros . Formalmente, dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto de cores $K = \{1, 2, \ldots, k\}$, uma coloração de vértices é um mapeamento sobrejetivo $c : V \to K$. Uma coloração é dita **própria** quando vértices adjacentes recebem cores diferentes. Uma k-coloração é uma coloração própria com k cores.

Uma maneira de obter uma coloração própria de um grafo G é através da **heurística de coloração gulosa**. Dado uma sequência arbitrária dos vértices $\sigma = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, a heurística gulosa atribui a cada vértice v_i a menor cor que não está presente nos vértices já coloridos da vizinhança de v_i. Uma coloração é chamada de *Coloração Grundy* se ela pode ser obtida pela heurística de coloração gulosa.

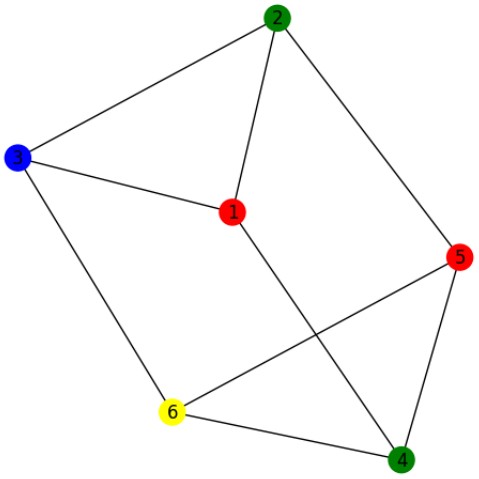


Figura 1: Coloracão gulosa obtida pela sequência (1,2,3,4,5,6)

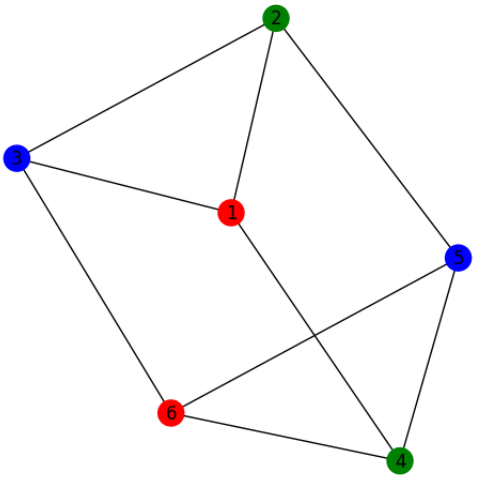


Figura 2: Coloracão gulosa obtida pela sequência (1,2,3,4,6,5)

A Figura 1 apresenta uma coloração com 4 cores obtida pela heurística de coloração gulosa com a sequência (1,2,3,4,5,6). A Figura 2 apresenta uma coloração com 3 cores obtida pela heurística de coloração gulosa com a sequência (1,2,3,4,6,5).

O **número cromático** de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor k tal que G admite uma k-coloração. O **número cromático Grundy**, denotado por $\Gamma(G)$, é o maior k tal que G admite uma k-coloração Grundy. O problema da coloração de Grundy consiste em encontrar $\Gamma(G)$ de um grafo G. Note que existe uma sequência de vértices para a qual a heurística gulosa obtém uma $\chi(G)$-coloração. O número cromático de Grundy é o maior número de cores usado pelo algoritmo de coloração gulosa considerando todas as ordens possíveis. O grafo mostrado nas Figuras 1 e 2 apresenta $\chi(G) = 3$ e $\Gamma(G) = 4$.

O número Grundy foi primeiramente estudado por Grundy em 1939 no contexto de grafos orientados na análise de jogos combinatóriosGrundy [1939]. Em 1979, o problema foi formalmente apresentado em Christen e Selkow [1979].

O problema de decisão associado número de Grundy é NP-Completo para grafos em geralGoyal e Vishwanathan [1997] e permanece NP-completo para várias classes de grafos como

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

grafos bipartidos Havet e Sampaio [2013] e grafos complementos de grafos bipartidosZaker [2005, 2006].

Do ponto de vista prático, temos algumas abordagens exatas para computar o número Grundy para árvores Hedetniemi et al. [1982] e para k-árvores parciais Telle e Proskurowski [1997].

Recentemente, temos algumas abordagens determinar o número de Grundy para grafos gerais utilizando programação inteira. Rodrigues [2020] estudou o problema da coloração k-imprópria em que a cor de um vértice pode ser compartilhada com até k vizinhos. O autor também apresenta uma heurística gulosa de coloração k-imprópria e introduz o conceito de número Grundy k-impróprio. Além disso, é apresentada uma formulação de programação inteira para o número de Grundy e também para a versão k-imprópria. A grande vantagem desse modelo para número de Grundy é que a restrição relacionada com a propriedade Grundy é garantida através de um número quadrático de restrições.

Em Carvalho et al. [2023], os autores apresentam dois modelos de programação inteira para a obtenção do número de Grundy para grafos gerais. O primeiro modelo baseado na abordagem padrão de particionamento dos vértices em classes de cores e o segundo baseado no modelo de representantes. Nos resultados reportados, o modelo de representantes tem um desempenho melhor do que a formulação padrão.

A contribuição deste trabalho consiste em realizar uma análise computacional dos três modelos de programação inteira propostos para resolver o problema da obtenção do número de Grundy em grafos gerais. Além disso, estamos propomos modificações no modelo apresentado em Carvalho et al. [2023] na restrição relacionada com a propriedade Grundy.

O restante do trabalho será organizado da seguinte maneira: Na Seção 2, apresentamos as notações que serão utilizadas ao longo do texto. Na Seção 3, apresentamos os três modelos de programação inteira para o problema do número de Grundy. Na Seção 4, apresentamos os experimentos computacionais comparando as três formulações conhecidas para o problema.

2. Preliminares

Um **grafo** G é um par ordenado (V, E) composto por um conjunto finito V, cujos elementos são denominados **vértices**, e por um conjunto $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$, cujos elementos são denominados **arestas**. Para todo grafo G, denotamos $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente, os conjuntos de vértices e arestas de G.

As seguintes notações serão utilizadas neste artigo:

- $grau_G[v]$ é o grau do vértice v em G e $\Delta(G)$ é o valor do grau máximo de G.
- $N(v) = \{u \in V : \{v, u\} \in E\}$ é a vizinhança aberta do vértice v em G.
- $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ é a vizinhança fechada do vértice v em G.
- $\overline{N}(v) = \{u \in V : \{v, u\} \notin E\}$ é a anti-vizinhança aberta do vértice v em G.
- $\overline{N}[v] = \overline{N}(v) \cup \{v\}$ é a anti-vizinhança fechada do vértice v em G.
- Se $U \subseteq V$, então $G[U] = (U, E[U])$ denota o subgrafo de G induzido por U, onde $E[U] = \{\{u, v\} \in E : u, v \in U\}$.
- S é um conjunto independente de G se somente se $\forall u, v \in S, \{u, v\} \notin E(G)$.
- Uma k-coloração própria de G é uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes $\mathbb{S} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

- O número cromático, $\chi(G)$, é o menor número de cores que pode ser usado em uma coloração própria de um grafo G.

- Dada uma k-coloração, um vértice $v \in V_i$ é chamado um vértice Grundy se v é adjacente a pelo menos um vértice na classe de cor V_j para todo $j < i$.

- Uma **k-coloração Grundy** é uma k-coloração em que todos os vértices de todas as classes são Grundy.

- O número de Grundy, $\Gamma(G)$, é o maior número de cores em uma coloração em que todos os vértices são vértices Grundy.

Na Figura 3, temos uma coloração de Grundy de um grafo. Os vértices do grafo estão rotulados com o rótulo da classe de cor que ele pertence. Note que todos os vértices são Grundy.

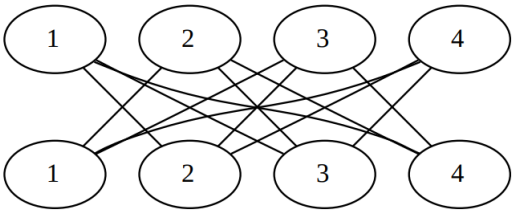


Figura 3: Coloração Grundy.

O número de Grundy determina o pior caso do número de cores do algoritmo de coloração gulosa.

A seguir, apresentaremos a formulação padrão para o Problema de Coloração de Vértices (PCV).

2.1. Formulação padrão para PCV

A formulação padrão para a coloração utiliza as seguintes variáveis de decisão:

$$x_{v,c} = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } v \text{ recebe a cor } c \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$z_c = \begin{cases} 1, \text{se a cor } c \text{ é usada} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

O problema de coloração pode ser modelado pela seguintes restrições:

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

$$\min \quad \sum_{c \in C} z_c \tag{2.1.1}$$

$$s.a. \quad \sum_{c \in C} x_{v,c} = 1 \qquad \forall v \in V \tag{2.1.2}$$

$$x_{v,c} + x_{u,c} \leq z_c \qquad \forall \{u,v\} \in E, \forall c \in C \tag{2.1.3}$$

$$z_c \leq \sum_{v \in V} x_{v,c} \qquad \forall c \in C \tag{2.1.4}$$

$$z_c \leq z_{c-1} \qquad \forall c \in \{2, \ldots, |C|\} \tag{2.1.5}$$

$$x_{v,c} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V(G), \forall c \in C \tag{2.1.6}$$

$$z_c \in \{0,1\} \qquad \forall c \in C \tag{2.1.7}$$

A restrição (2.1.2) garante que cada vértice só pode receber uma cor. A restrição (2.1.3) garante que a coloração obtida será uma coloração própria. A restrição (2.1.4) garante que uma cor k só pode ser usada se algum vértice v recebeu a cor k. A restrição (2.1.5) assegura que as primeiras cores serão usadas.

A partir de uma solução viável (x', z') da **Formulação padrão para PCV** podemos encontrar uma coleção de subconjuntos $V_1, \ldots, V_k$ de V tal que $V_i = \{v \mid x_{v,i} = 1 \quad \forall v \in V\}$. É fácil ver que $V_1, \ldots, V_k$ é uma k-coloração própria de G.

3. Formulação de Programação Inteira

Nesta seção, apresentaremos as três formulações de programação inteira conhecidas para o problema de determinação do número de Grundy. Nas duas formulações seguintes, vamos considerar o conjunto de cores disponíveis $C = \{1, 2, \ldots, \Delta(G) + 1\}$.

3.1. Formulação Padrão de Rodrigues Rodrigues [2020]

Nesta subseção, apresentaremos uma modificação do modelo de programação inteira apresentado em Rodrigues [2020].

Na formulação de programação inteira, utilizamos as mesmas variáveis de decisão apresentadas na Formulação Padrão para o problema de coloração apresentada na Subseção 2.1.

O problema pode ser modelado através das seguintes restrições:

$$\Gamma_R = \quad \max \quad \sum_{c \in C} z_c \tag{3.1.1}$$

$$s.a. \quad \sum_{c \in C} x_{v,c} = 1 \qquad \forall v \in V(G) \tag{3.1.2}$$

$$x_{v,c} + x_{u,c} \leq z_c \qquad \forall \{u,v\} \in E(G), \forall c \in C \tag{3.1.3}$$

$$z_c \leq \sum_{v \in V} x_{v,c} \qquad \forall c \in C \tag{3.1.4}$$

$$x_{v,c} \geq 1 - \sum_{d=1}^{c-1} x_{v,d} - \sum_{u \in N(v)} x_{u,c} \qquad \forall v \in V(G), \forall c \in C \tag{3.1.5}$$

$$x_{v,1} = 1 \qquad \forall v \in V(G) \text{ se } |N(v)| = 0 \tag{3.1.6}$$

$$z_c \leq z_{c-1} \qquad \forall c \in \{2, \ldots, |C|\} \tag{3.1.7}$$

$$x_{v,c} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V(G), \forall c \in C \tag{3.1.8}$$

$$z_c \in \{0,1\} \qquad \forall c \in C \tag{3.1.9}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

A função objetivo (3.1.1) é maximizar o número de cores usadas pela coloração de Grundy. As restrições (3.1.2), (3.1.3), (3.1.4), (3.1.7) são as mesmas da formulação padrão apresentada na Subseção 2.1. A restrição (3.1.5) garante que a propriedade Grundy será respeitada. A restrição (3.1.6) estabelece que os vértices isolados devem receber a primeira cor. As restrições (3.1.7) e (3.1.6) foram incorporadas ao modelo apresentado Rodrigues [2020].

Proposição 1. *Dada uma solução viável (x', z') para o modelo Γ_R. A coleção de subconjuntos $\{V_1, \ldots, V_k\}$ obtida a partir da solução viável (x, z) é uma coloração Grundy.*

Prova : Suponha por absurdo que $V_1, \ldots, V_k$ não é Grundy. Logo, existe um $v \in V_i(x_{v,i} = 1)$ tal que v não é Grundy, ou seja, v não tem nenhum vizinho para algum V_j para $j < i$. Sem perda de generalidade, suponha que V_m é o primeiro conjunto que não tem nenhum vizinho de v. Logo, $\sum_{d=1}^{m} x_{v,d} = 0$ e $\sum_{u \in N(v)} x_{u,m} = 0$. Por (3.1.5), $x_{v,m} \geq 1$. O que implica que $x_{v,m} = 1$. Por (3.1.2), temos $x_{v,i} = 0$. Absurdo. □

3.2. Formulação Padrão de Carvalho Carvalho et al. [2023]

Nesta subseção, apresentaremos o modelo apresentado em Carvalho et al. [2023]. O modelo utiliza as mesmas variáveis de decisão do modelo anterior e como conjunto de cores disponíveis $C = \{1, \ldots, \Delta(G) + 1\}$.

A formulação padrão para o número de Grundy apresentada em Carvalho et al. [2023] é a seguinte:

$$\Gamma_C = \max \sum_{c \in C} z_c \tag{3.2.1}$$

$$s.a. \quad \sum_{c \in C} x_{v,c} = 1 \qquad \forall v \in V(G) \tag{3.2.2}$$

$$x_{v,c} + x_{u,c} \leq z_c \qquad \forall \{u, v\} \in E(G), \forall c \in C \tag{3.2.3}$$

$$z_c \leq \sum_{v \in V} x_{v,c} \qquad \forall c \in C \tag{3.2.4}$$

$$x_{v,c} \leq z_c \qquad \forall c \in C \quad \forall v \in V(G) \text{ se } |N(v)| = 0 \tag{3.2.5}$$

$$z_{c'} \leq z_c \qquad \forall c, c' \in C \text{ se } c < c' \tag{3.2.6}$$

$$x_{v,c'} \leq \sum_{u \in N(v)} x_{u,c} \qquad \forall v \in V(G) \forall c, c' \in C \text{ se } c < c' \tag{3.2.7}$$

$$x_{v,c} \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V(G), \forall c \in C \tag{3.2.8}$$

$$z_c \in \{0, 1\} \qquad \forall c \in C \tag{3.2.9}$$

As restrições (3.2.2), (3.2.3), (3.2.4) são as mesmas restrições do modelo padrão para o problema de coloração mínima apresentada em 2.1. A restrição (3.2.6) assegura que as primeiras cores serão usadas. A restrição (3.2.5) declara que os vértices isolados podem receber qualquer cor. Já a restrição (3.2.7) garante a propriedade Grundy. Vale destacar que a propriedade Grundy nesse modelo é garantida com uma complexidade de restrições $\mathcal{O}(|V||C|^2)$.

Proposição 2. *Dada uma solução viável (x', z') para o modelo Γ_C. A coleção de subconjuntos de V obtida da solução viável é uma coloração Grundy.*

Prova : Suponha por absurdo que $V_1, \ldots, V_k$ não é uma coloração Grundy, ou seja, existe $v \in V_i$ tal que v não possui nenhum vizinho em V_j para algum $j < i$. Sem perda de generalidade, assuma que V_m seja o primeiro subconjunto que não possui nenhum vizinho de v tal que $m < i$. Logo, $\sum_{u \in N(v)} x_{u,m} = 0$. Pela restrição (3.2.7), $x_{v,i} \leq 0$. Pela restrição (3.2.8), temos que $x_{v,i} = 0$, absurdo uma vez que assumimos que $x_{v,i} = 1$. □

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

3.3. Formulação Padrão de Carvalho Modificada

Nesta subseção, apresentamos algumas modificações no modelo padrão de Carvalho apresentado na subseção anterior.

A formulação padrão de Carvalho modificada é dada pelas seguintes restrições:

$$\Gamma_M = \quad \max \sum_{c \in C} z_c \tag{3.3.1}$$

$$s.a. \quad \sum_{c \in C} x_{v,c} = 1 \qquad \forall v \in V(G) \tag{3.3.2}$$

$$x_{v,c} + x_{u,c} \leq z_c \qquad \forall \{u,v\} \in E(G), \forall c \in C \tag{3.3.3}$$

$$z_c \leq \sum_{v \in V} x_{v,c} \qquad \forall c \in C \tag{3.3.4}$$

$$x_{v,1} = 1 \qquad \forall c \in C \quad \forall v \in V(G) \text{ se } |N(v)| = 0 \tag{3.3.5}$$

$$z_c \leq z_{c-1} \qquad \forall c \in \{2, \ldots, |C|\} \tag{3.3.6}$$

$$\sum_{c' > c} x_{v,c'} \leq \sum_{u \in N(v)} x_{u,c} \qquad \forall v \in V, \forall c \in C \tag{3.3.7}$$

$$x_{v,c} \in \{0,1\} \qquad \forall v \in V(G), \forall c \in C \tag{3.3.8}$$

$$z_c \in \{0,1\} \qquad \forall c \in C \tag{3.3.9}$$

As restrições (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4) são as mesmas da formulação apresentada subseção 3.2. As restrições (3.3.6) e (3.3.5) são as mesmas da formulação apresentada na subsecção 3.1. Já a restrição (3.3.7) garante a propriedade Grundy com o número de restrições em $\mathcal{O}(|V||C|)$.

Proposição 3. *Dada uma solução viável (x', z') para o modelo padrão de carvalho modificada Γ_M. A coleção de subconjuntos de V obtida da solução viável é uma coloração Grundy.*

Prova : Suponha por absurdo que $V_1, \ldots, V_k$ não é uma coloração Grundy, ou seja, existe $v \in V_i$ tal que v não possui nenhum vizinho em V_j para algum $j < i$. Sem perda de generalidade, assuma que V_m seja o primeiro subconjunto que não possui nenhum vizinho de v tal que $m < i$. Logo, $\sum_{u \in N(v)} x_{u,m} = 0$. Pela restrição (3.3.7), $\sum_{c' > m} x_{v,c'} \leq 0$. Pela restrição (3.2.8), temos que $x_{v,i} = 0$, absurdo uma vez que assumimos que $x_{v,i} = 1$ e $i > m$. □

3.4. Formulação Representantes Carvalho et al. [2023]

Nesta subseção, apresentamos a formulação de representantes apresentada em Carvalho et al. [2023] baseada na conhecida formulação de representantes.

Campêlo et al. [2004] propuseram a formulação para o problema da coloração chamada Formulação de Representante baseada na ideia de considerar um vértice representante para cada classe de cor e impor a restrição que um vértice u pode representar outro vértice v somente se u e v pertencem a mesma classe de cor. Esta formulação admite várias soluções associadas a uma mesma coloração, uma vez que dada k-coloração $V_1, V_2, \ldots, V_k$, cada vértice $v_i \in V_i$ pode ser escolhido para representar a cor i formando uma solução para a formulação de representantes.

Campêlo et al. [2008] propuseram uma formulação conhecida como formulação de representantes assimétrica com o objetivo de remover as várias soluções associadas a uma mesma k-coloração. Nesta formulação, uma ordem $\prec$ dos vértices é utilizada para estabelecer que o representante de uma classe de cor deve ser o vértice minimal pela $\prec$ entre os vértices de uma dada cor.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

A formulação de representante já foi aplicada em diversos problemas na literatura como coloração de partição Frota et al. [2010], b-coloração Melo et al. [2021], coloração de soma mínima Delle Donne et al. [2021], número cromático fracionário de Araújo et al. [2023], coloração Grundy Carvalho et al. [2023].

Considere as seguintes variáveis de decisão:

$$x_{v,u} = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } v \text{ representa o vértice } u \in \overline{N}(v), \text{ para } v \leq u \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_{v,v} = \begin{cases} 1, \text{se o vértice } v \text{ é um representante} \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$y_{v,u} = \begin{cases} 1, \text{se os vértice } v, u \text{ são representantes e a cor de } v \text{ precede a cor de } u \text{ para } v \neq u \\ 0, \text{caso contrário} \end{cases}$$

A formulação de representantes apresentada Carvalho et al. [2023] é dada pelas seguintes restrições:

$$\max \quad \sum_{v \in V} x_{v,v} \tag{3.4.1}$$

$$x_{u,v} + x_{u,w} \leq x_{u,u} \qquad \begin{array}{c} \forall u \in V, v, w \in \overline{N}(u) \\ \text{com } \{v,w\} \in E \text{ e } u \leq v < w \end{array} \tag{3.4.2}$$

$$x_{u,v} \leq x_{u,u} \qquad \begin{array}{c} \forall u \in V, v \in \overline{N}(u) \\ \text{com } N(v) \cap \overline{N}(u) = \emptyset \text{ e } u \leq v \end{array} \tag{3.4.3}$$

$$\sum_{\substack{v \in \overline{N}(u) \\ v \leq u}} x_{v,u} = 1 \quad \forall u \in V \tag{3.4.4}$$

$$x_{u,v} \leq \sum_{\substack{w \in N(v) \cap \overline{N}(p) \\ w \geq p}} x_{p,w} + 1 - y_{pu} \qquad \begin{array}{c} \forall u, p \in V, v \in \overline{N}[u] \\ \text{com } p \neq u \text{ e } u \leq v \end{array} \tag{3.4.5}$$

$$y_{v,u} + y_{u,v} \geq x_{u,u} + x_{v,v} - 1 \quad \forall u, v \in V \text{ com } u < v \tag{3.4.6}$$

$$y_{u,v} + y_{v,u} \leq x_{u,u} \quad \forall u, v \in V(G) \text{ com } u \neq v \tag{3.4.7}$$

$$\phi_u - \phi_v + 1 \leq |V| \times (1 - y_{u,v}) \quad \forall u, v \in V(G) \text{ com } u \neq v \tag{3.4.8}$$

$$0 \leq \phi_v \leq |V| - 1 \quad \forall v \in V \tag{3.4.9}$$

$$x_{u,v} \in \{0,1\} \quad \forall u, v \in V, v \in \overline{N}[u] \text{ com } u \leq v \tag{3.4.10}$$

$$y_{u,v} \in \{0,1\} \quad \forall u, v \in V, \text{ com } u \neq v \tag{3.4.11}$$

$$\phi_v \in \mathbb{R}_+ \quad \forall v \in V \tag{3.4.12}$$

A função objetivo (3.4.1) maximiza o número de vértices representantes. A restrição (3.4.2) garante que vértices adjacentes não podem serem representandos pelo mesmo vértice. A restrição (3.4.3) garante que um vértice só pode representar outro vértice se ele for um representante. A restrição (3.4.4) determina que cada vértice deve ser representado por algum vértice da sua anti-vizinhança. A restrição (3.4.5) assegura que um vértice u representa um vértice v somente se

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

todo vértice representante p que precede a u precisa representar algum vértice w vizinho de v. A restrição (3.4.6) assegura que, se dois vértices u e v são representantes, então a classe de u precede a classe de v ou vice-versa, ou seja, a relação de precedência é assimétrica. A restrição (3.4.7) garante que, se u é um representante, a sua classe antecede ou sucede qualquer outra classe de um representante diferente, assegurando que todos os pares de classes sejam comparáveis na relação de precedência. Já a restrição (3.4.8) garante que se um vértice representante u precede outro, então ele deve ter potencial menor. Na Proposição **??**, demonstraremos que o potencial pode ser utilizado para estabelecer a transitividade da relação de precedência.

Proposição 4. *Se u e v são representantes, então $y_{uv} = 1$ ou $y_{vu} = 1$.*

Prova : Como u e v são representantes, a restrição (3.4.6) garante que $y_{uv} + y_{vu} \geq 1$. Como u é representante, a restrição (3.4.7) assegura que $y_{uv} + y_{vu} \leq 1$. Logo, $y_{uv} + y_{vu} = 1$.□

Proposição 5. *Dada uma solução viável (x, y, ϕ). A coleção de subconjuntos $V_1, \ldots, V_k$ obtida a partir de (x, y, ϕ) é Grundy.*

Prova : Suponha por absurdo que $V_1, \ldots, V_k$ não é uma coloração Grundy, ou seja, existe $v \in V_i$ sendo r representante de V_i tal que v não possui nenhum vizinho em V_j sendo que p é representante de V_j tal que $y_{pr} = 1$ Pela hipótese, temos que $x_{r,v} = 1$. Sabemos que $\sum_{w \in N(v) \cap \overline{N}(p), p \leq w} x_{p,w} = 0$. Pela restrição (3.4.5), $x_{r,v} \leq 0$, absurdo com o fato de $x_{r,v} = 1$. □

4. Experimentos computacionais

Nesta seção são descritos os experimentos realizados e os resultados obtidos utilizando as formulações de programação inteira da seção anterior.

Todos os experimentos reportados aqui foram implementados na linguagem de programação Python e executados em um computador com um processador Intel Xeon E5-2670 v3, 40GB de memória RAM e sistema operacional Windows 11 64 bits.

Nos modelos de PLI, utilizamos o pacote networkX, que é um pacote Python utilizado para manipulação de grafos e redes complexas. A documentação da biblioteca, além de exemplos mais aprofundados, estão disponíveis em: `https://networkx.org/`. Para a resolução dos modelos de PLI foi utilizada a ferramenta OR-Tools, que é um pacote de software gratuito e de código aberto desenvolvido pelo Google para resolver problemas de Programação Linear, Programação Inteira Mista, Programação Linear por Restrição, roteamento de veículos e problemas de otimização relacionados.

Todas as formulações foram executadas com limitação de tempo de execução de 1800 segundos (30 minutos) para encontrar o valor de $\Gamma(G)$. Se a instância possuir um tempo de execução maior que 1800 segundos, isso significa que a execução foi interrompida antes de conseguir encontrar o número de Grundy e o melhor resultado obtido nas sub-soluções é retornado.

Em nosso experimento, foram gerados grafos aleatórios, utilizando probabilidade p de geração de arestas, de 20, 50 e 75 por cento, onde para cada probabilidade foram gerados 5 grafos com 10, 15, 20, 25 e 30 vértices, totalizando 75 grafos.

As Tabelas 1 e 2 apresentam os resultados dos experimentos para os grafos aleatórios.

Na Tabela 1, a segunda, terceira e quarta colunas representam o grupo de 25 instâncias para cada probabilidade $p \in \{0.2, 0.5, 0.75\}$, de forma que cada linha corresponde aos valores médios do tempo de execução em segundos e a quinta coluna apresenta a média do tempo de execução de todas as instâncias. Em negrito, destacamos o melhor tempo de execução para cada faixa de densidade. Nos testes realizados, para instâncias com densidade 0.2, a Formulação Padrão

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

Tabela 1: Média do tempo de execução em segundos das formulações

Formulação	p=0.2	p=0.5	p=0.75	**Média**
Modelo Padrão Rodrigues [2020]	**250.53**	876.76	1094.14	740.48
Modelo Padrão Carvalho et al. [2023]	512.87	1094.72	1242.54	950.04
Modelo Representativos Carvalho et al. [2023]	543.73	**442.89**	**37.35**	341.32
Modelo Padrão Carvalho Modificada	239.85	899.33	1102.45	747.21

Tabela 2: Quantidade de soluções ótimas encontradas para cada formulação

Formulação	p=0.2	p=0.5	p=0.75	**Total**
Modelo Padrão Rodrigues [2020]	**22**	15	10	47
Modelo Padrão Carvalho et al. [2023]	19	15	10	44
Modelo Representativos Carvalho et al. [2023]	20	**24**	**25**	69
Modelo Padrão Carvalho Modificada	**22**	15	10	47

Rodrigues [2020] alcançou o melhor resultado seguido da formulação apresentada neste trabalho. Para as outras faixas de instâncias, a Formulação de Representantes mostrou-se bem superior as demais. Para os grafos com densidade alta, a formulação alcançou resultados impressionantes.

Na Tabela 2, cada linha corresponde a quantidade de soluções ótimas encontradas para cada probabilidade. A última coluna representa a quantidade de soluções ótimas encontradas para cada formulação. Em negrito, destacamos a formulação que encontrou o maior número de soluções ótimas. Nestes experimentos, a formulação padrão Rodrigues [2020] e a formulação de Carvalho modificada encontraram o mesmo número de soluções ótimas para a faixa de densidade 0.2. Nas outras faixas de densidade, a formulação de representantes encontrou a solução ótima em 49 das 50 instâncias testadas.

5. Conclusões

Nesse trabalho, foram apresentadas formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy e realizados testes computacionais a fim de comparação. Os experimentos computacionais realizados indicam que a formulação por representativos Carvalho et al. [2023] tem um desempenho melhor comparados aos demais, pois quanto mais denso um grafo, menor será a anti-vizinhança de um vértice, então a quantidade de variáveis e de restrições será bastante reduzida, resultando em um modelo mais enxuto. Nos testes realizados foi observado que para todas as formulações, que para instâncias com 20 e 25 vértices o problema se mostrou desafiador, pois não conseguiram encontrar a solução ótima de todas as instâncias dentro do tempo limite de 1800 segundos.

Referências

Campêlo, M., Campos, V. A., e Corrêa, R. C. (2008). On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Discrete Applied Mathematics*, 156(7):1097–1111.

Campêlo, M., Corrêa, R., e Frota, Y. (2004). Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters*, 89(4):159–164.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403

Carvalho, M., Melo, R., Santos, M. C., Toso, R. F., e Resende, M. G. C. (2023). Formulações de programação inteira para o problema da coloração de grundy. *Anais SBPO 2023*.

Christen, C. A. e Selkow, S. M. (1979). Some perfect coloring properties of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(1):49–59.

de Araújo, P. H. M., Corrêa, R. C., e Campêlo, M. (2023). A parallel lagrangian heuristic for the fractional chromatic number of a graph. *RAIRO-Operations Research*, 57(4):1821–1841.

de Werra, D. (1985). An introduction to timetabling. *European journal of operational research*, 19 (2):151–162.

Delle Donne, D., Furini, F., Malaguti, E., e Calvo, R. W. (2021). A branch-and-price algorithm for the minimum sum coloring problem. *Discrete Applied Mathematics*, 303:39–56.

Frota, Y., Maculan, N., Noronha, T. F., e Ribeiro, C. C. (2010). A branch-and-cut algorithm for partition coloring. *Networks: An International Journal*, 55(3):194–204.

Goyal, N. e Vishwanathan, S. (1997). Np-completeness of undirected grundy numbering and related problems. *Manuscript, Bombay*.

Grundy, P. M. (1939). Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–9.

Havet, F. e Sampaio, L. (2013). On the grundy and b-chromatic numbers of a graph. *Algorithmica*, 65(4):885–899.

Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., e Beyer, T. (1982). A linear algorithm for the grundy (coloring) number of a tree. *Congr. Numer*, 36:351–363.

Leighton, F. T. (1979). A graph coloring algorithm for large scheduling problems. *Journal of research of the national bureau of standards*, 84(6):489.

Melo, R. A., Queiroz, M. F., e Santos, M. C. (2021). A matheuristic approach for the b-coloring problem using integer programming and a multi-start multi-greedy randomized metaheuristic. *European Journal of Operational Research*, 295(1):66–81.

Rodrigues, E. N. H. D. (2020). **Coloração k-imprópria gulosa**. Disponível em: `http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/50955`. Acesso em: 14 fev. 2022.

Telle, J. A. e Proskurowski, A. (1997). Algorithms for vertex partitioning problems on partial k-trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 10(4):529–550.

Zaker, M. (2005). Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. *Australas. J Comb.*, 31:325–330.

Zaker, M. (2006). Results on the grundy chromatic number of graphs. *Discrete mathematics*, 306 (23):3166–3173.

DOI: 10.59254/sbpo-2024-193403
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/193403