

MODELOS MATEMÁTICOS PARA BALANCEAMENTO DE CARGA EM REDES DE ENERGIA COM USO DE TEORIA ESPECTRAL DE GRAFOS

Antônio Geovane Cavalcante da Silva & Rafael Castro de Andrade

Universidade Federal do Ceará

Departamento de Estatística e Matemática Aplicada

Campus do Pici S/N - bloco 910 - Fortaleza - Ceará, 60.440-900, Brasil

geovanecavalcante@alu.ufc.br, rafael.andrade@ufc.br

Arnaud Knippel & Jean-Guy Caputo

INSA Rouen Normandie

Laboratoire de Mathématiques

Av. de l'université, 76801 Saint-Etienne du Rouvray, France.

arnaud.knippel@insa-rouen.fr, jean-guy.caputo@insa-rouen.fr

RESUMO

Energia elétrica é fundamental para praticamente todos os aspectos da vida moderna. Seu consumo tem crescido significativamente nos últimos anos, tornando seu projeto e manutenção de extrema importância para garantir seu funcionamento adequado e evitar falhas como blecautes que têm sido observados recentemente no Brasil, acarretando prejuízos enormes a empresas e consumidores residenciais. Visando contribuir para a boa operabilidade de uma rede de energia, nosso estudo visa identificar linhas críticas de transmissão de eletricidade, com base na potência elétrica em cada uma delas, a fim de garantir a confiabilidade da rede e prevenir apagões. Utilizamos uma abordagem geométrica com base no operador laplaciano discreto do grafo associado à rede. Desenvolvemos formulações do problema de balanceamento de carga e uma maneira de resolvê-lo com base nas condições de otimalidade da função quadrática do problema, resultando em um processo mais rápido e eficiente, como observado nos testes computacionais. Esses resultados são promissores e possibilitam tratar variantes do problema de balanceamento de carga em redes de energia onde ativar ou desativar a geração de carga é controlado por variáveis de decisão no modelo matemático.

PALAVRAS CHAVE. Rede elétrica, Balanceamento de carga, Teoria espectral de grafos.

PO na Área de Energia, Petróleo e Gás

ABSTRACT

Electricity is fundamental for all aspects of modern life, and its consumption has significantly increased in recent years. In this case, the design and maintenance of electrical networks are of utmost importance to ensure their proper functioning and prevent failures such as blackouts as observed recently in Brazil, resulting in enormous losses for industrial and residential clients. Our study aims to identify critical transmission lines based on the electrical power in each of them, in order to ensure the reliability of the network and prevent power outages. We adopt a geometric approach based on the discrete Laplacian of the graph associated with the network. We develop formulations for the load balancing problem, and solve it by considering optimality conditions of the

resulting quadratic model, resulting in a faster and more efficient solution process as reported in our numerical experiments. These results are very promising and make it possible to deal with variants of the load balancing problem in power networks where activating or deactivating load generation is controlled by decision variables in the mathematical model.

KEYWORDS. Electrical network. Load balancing. Spectral graph theory.

OR in the Energy, Oil, and Gas.

1. Introdução

A eletricidade constitui um elemento fundamental para o progresso humano. Está interligada a diversos outros elementos de desenvolvimento, tais como educação, saúde, transporte, indústria, entre outros. Situações como o apagão que ocorreu em novembro de 1965 no nordeste dos Estados Unidos e em Ontário, assim como o apagão ocorrido no Brasil em 2001, resultaram em impactos negativos para a sociedade à época, de forma que muitas perguntas foram levantadas em relação a conceitos de design e critérios de planejamento de redes elétricas.

A rede elétrica representa uma das maiores conquistas da engenharia do século XX e tem tornado-se cada vez mais complexa. Isso acarreta desafios de gerenciamento pelo risco de potenciais falhas no fornecimento de energia se não for administrada apropriadamente. A complexidade desses desafios é imensa como observou-se no apagão de 2023 no Brasil. Tal situação expôs a vulnerabilidade da infraestrutura elétrica nacional. Nesse sentido, um aspecto importante é prever a potência elétrica nas linhas da rede e reconhecer aquelas que estão críticas, i.e., apresentam maior sobrecarga. É essencial planejar e operar a rede para gerenciar adequadamente a carga nessas linhas.

Para a análise, a operação e o projeto de redes elétricas estacionárias, as equações de fluxo de carga constituem o principal elemento a ser levado em consideração [Kundur, 1994]. Pois estabelecem a relação entre a potência de entrada, voltagem e corrente relacionada à rede. Essas equações possuem natureza não linear e, comumente, são resolvidas por meio do método de Newton [Grainger e Stevenson, 1994], podendo apresentar múltiplas soluções, acarretando dificuldades de convergência do método de resolução. Diversos autores têm abordado essa problemática como vemos em Pourbagher e Derakhshandeh [2018] e Tostado-Véliz et al. [2019]. Compreender como a solução do fluxo de carga é influenciada pela topologia da rede e pela distribuição nodal de geradores e cargas é desafiador. Uma perspectiva geométrica com base na topologia e a distribuição dos geradores e consumidores de eletricidade é uma alternativa pouco explorada para enfrentar esse desafio.

De fato, Caputo et al. [2019], apresenta uma abordagem geométrica com essa ideia ao aplicar técnicas de linearização de equações de fluxo de carga em sistemas que utilizam corrente alternada (CA) para derivar uma equação que explora a matriz laplaciana do grafo relacionado à rede [Cvetkovic et al., 2011]. Tal matriz pode ser considerada uma representação discreta do laplaciano contínuo. Por ser simétrica e definida positiva, permite a escolha de seus autovetores como sendo vetores ortogonais, fazendo com que a solução espectral para a equação de Laplace assemelhe-se a uma imagem de Fourier da rede. Nessa representação por meio de análise espectral, fica evidente a influência da topologia e da distribuição entre geradores e cargas nos fluxos de potência nas linhas [Caputo et al., 2019]. Conceitos similares podem ser explorados para redes de distribuição, embora, frequentemente, estas apresentem uma estrutura mais simplificada em formato de árvore. O foco principal em [Caputo et al., 2019] são as redes de transmissão, aplicando tal abordagem espectral como em [Retiere et al., 2020] para identificar as fragilidades presentes na rede.

Neste estudo preliminar sobre o problema de balanceamento de carga, realizamos uma análise aprofundada sob a perspectiva da otimização matemática, em conjunto com a análise espectral das equações de fluxo. Por ser o balanceamento de carga um problema antigo e vastamente

estudado, vê-se a abordagem espectral como progressista. Considerando uma rede elétrica composta por pontos de consumo de eletricidade (clientes) e pontos de geração de energia para atender à demanda, nosso objetivo é monitorar e analisar a distribuição da potência elétrica nas linhas. Visamos identificar possíveis linhas críticas (sobrecargas), levando em conta a distribuição da produção de energia pelos geradores. As distribuições de potência nas linhas devem ser calculadas a cada intervalo de 10 a 15 minutos. Nesse sentido, obtêm-se formulações do problema, em que podemos chegar a uma solução mais rapidamente que os métodos convencionais.

2. Fundamentação Teórica com Base em Teoria Espectral de Grafos

Nesta seção, apresentamos a base conceitual, incluindo os principais elementos teóricos e definições utilizados ao longo do trabalho. Iniciamos com alguns conceitos importantes da teoria espectral de grafos utilizados posteriormente no desenvolvimento dos modelos matemáticos. Lembrando que a rede elétrica é representada por um grafo simples conexo e não orientado. Os primeiros conceitos são de gradiente discreto e laplaciano associados a um grafo de uma rede elétrica.

Definição 1 O gradiente discreto ∇ associado a um grafo de rede (para uma orientação de suas arestas em qualquer direção) é a matriz $\nabla = M^T$, em que M^T é a transposta da matriz de incidência nó-arco M do grafo orientado.

Definição 2 O operador Laplaciano Δ de um grafo $\mathcal{G}$ é definido como $\Delta = \nabla^T \nabla = D - A$, em que A_n é a matriz de adjacência e D_n é uma matriz diagonal cujo elemento d_{ii} de D é o grau do vértice i em $\mathcal{G}$.

Agora, considere ω_j e $\mathbf{v}^j$, $j = 1, \dots, n$, os n autovalores e autovetores de Δ , respectivamente. Verificamos que

1. $\omega_1 = 0 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_n$;
2. Os autovetores $\mathbf{v}^j$ podem ser escolhidos ortonormais, com $\mathbf{v}^1 = (1, \dots, 1)^T / \sqrt{n}$, associado a $\omega_1 = 0$, sendo denominado de autovetor de Goldstone e;
3. $\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^j = 0, j > 1$.

Introduzimos em seguida as equações de fluxo de carga para estudar sistemas de corrente alternada (CA). Resumimos ideias de Caputo et al. [2019], cujo conteúdo mais aprofundado podem ser consultado em Grainger e Stevenson [1994]. Partindo da suposição de conservação de energia, o vetor de potências $\mathcal{P}$ inseridas na ou extraídas da rede pode ser dado em função da matriz de voltagem $\mathcal{V}$ e da corrente $\mathcal{I}$ como

$$\mathcal{P} = \mathcal{V} \mathcal{I}^*, \quad (1)$$

em que $\mathcal{I}^*$ é o conjugado complexo da corrente $\mathcal{I}$. Pela generalização da lei de Ohm, representando por $\mathcal{Y} = \hat{G} + jB$ a matriz de admitância nos nós e a voltagem por $\mathcal{V} = V + jW$, com $j^2 = -1$, para matrizes genéricas $\hat{G}$, B , V e W , a corrente $\mathcal{I}$ é dada por

$$\mathcal{I} = \mathcal{Y} \mathcal{V} = (\hat{G} + jB)(V + jW) = (\hat{G} - jB)(V - jW). \quad (2)$$

Reorganizando a expressão em (2), obtemos $\mathcal{I} = (\hat{G}V - BW) + j(-BV - \hat{G}W)$ e, combinando com (1), obtemos

$$\mathcal{P} = V(\hat{G}V - BW) + W(BV + \hat{G}W) + j[W(\hat{G}V - BW) + V(-BV - \hat{G}W)]. \quad (3)$$

Nessa expressão das potências $\mathcal{P}$, desmembramos em duas partes para indicar o vetor de potências ativas P e o vetor de potências reativas Q , levando às equações de fluxo de carga

$$P = V (\hat{G}V - BW) + W (BV + \hat{G}W), \quad (4)$$

$$Q = W (\hat{G}V - BW) + V (-BV - \hat{G}W). \quad (5)$$

Uma observação importante é que as matrizes B e $\hat{G}$ na expressão de $\mathcal{V}$ são matrizes laplacianas [Cvetkovic et al., 2011]. Como nosso foco é em rede de transmissão, seguimos três suposições clássicas [Kundur, 1994]:

- A parte ôhmica da matriz $\mathcal{V}$ é desprezável, i.e., $\hat{G} = \mathbf{0}$;
- O módulo da tensão $\mathcal{V}$ pode ser considerado constante e próximo de 1;
- A fase θ pode ser considerada pequena.

Assumindo a primeira condição ($\hat{G} = \mathbf{0}$) em (4) e (5), temos $P = -V (BW) + W (BV)$ e $Q = -W (BW) - V (BV)$ e, pela segunda e terceira condições, considerando $|\mathcal{V}| = v \approx 1$, temos

$$\mathcal{V} = V + jW \equiv ve^{j\theta} = v (\cos \theta + j \sin \theta) \approx 1 + j\theta. \quad (6)$$

De onde deduzimos que $V = \mathbf{1}$ e $W = \theta$, levando o vetor de potências ativas P a ser dado por $P = -B\theta$. Isso é um sistema linear singular a ser resolvido para o vetor de fases θ conhecendo P . Para identificar as linhas críticas com maiores potências, calculamos o vetor de potências ativas nas linhas, P_{lin} , usando o gradiente discreto ∇ como

$$P_{lin} = \nabla \theta. \quad (7)$$

Para deduzirmos uma expressão alternativa para P_{lin} , note que cada componente do vetor de potências ativas $P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ corresponde a um nó da rede. Podemos expressar esse vetor na base canônica de $\mathbb{R}^n$, i.e., $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ em que $\mathbf{e}_k$ é o k -ésimo vetor unitário (a componente k de $\mathbf{e}_k$ é igual a 1 e as demais são nulas). Ou seja, $P = \sum_{k=1}^n P_k \mathbf{e}_k$. Para encontrarmos a solução espectral do fluxo de carga, projetamos P na base de autovetores ortonormais $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ do laplaciano da matriz da rede, determinando coeficientes $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ tais que

$$P = p_1 \mathbf{v}^1 + p_2 \mathbf{v}^2 + \dots + p_n \mathbf{v}^n \quad (8)$$

Assumindo que a demanda e o fornecimento de carga estejam equilibrados na geração elétrica, as componentes do vetor de potência P satisfazem $\sum_{k=1}^n P_k = 0$. Manipulando essa expansão em (8), verificando que os autovetores $\mathbf{v}^i$ satisfazem $\sum_{i=1}^n \mathbf{v}_k^i = 0, i > 1$ e $\mathbf{v}^1 = (1, \dots, 1)^T / \sqrt{n}$, obtemos

$$\sum_{k=1}^n P_k = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n P_k = \sum_{i=1}^n P_i \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{v}_k^i \right) = p_1 \sqrt{n} = 0 \Rightarrow p_1 = 0. \quad (9)$$

Observando [Caputo et al., 2019] que $P = -B\theta$ e $B \equiv \Delta^T \Delta \equiv \nabla$, podemos calcular a matriz inversa de ∇ , $\nabla^{-1} = B^{-1}$, e então θ pode ser dado por

$$\theta = -B^{-1}P = -\nabla^{-1}P = -\frac{p_2}{\omega_2} \mathbf{v}^2 - \frac{p_3}{\omega_3} \mathbf{v}^3 - \dots - \frac{p_n}{\omega_n} \mathbf{v}^n. \quad (10)$$

Consequentemente, a potência nas linhas P_{lin} pode ser dada alternativamente por

$$P_{lin} = \nabla \theta = -\frac{p_2}{\omega_2} \nabla \mathbf{v}^2 - \frac{p_3}{\omega_3} \nabla \mathbf{v}^3 - \dots - \frac{p_n}{\omega_n} \nabla \mathbf{v}^n \quad (11)$$

Expressamos, em seguida, a distribuição de geradores e de cargas da rede nas bases canônica e dos autovetores do laplaciano $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Introduzimos vetores G (denotando a geração em nós, a calcular) e L (denotando a carga ou demanda em nós, conhecida) e tomamos suas representações nessas bases. Representamos por $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ e $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ os coeficientes da projeção de G e de L na base dos autovetores, respectivamente.

$$G = \sum_{k=1}^n G_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}^i, \quad L = \sum_{k=1}^n L_k \mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^n l_i \mathbf{v}^i. \quad (12)$$

Sendo $P \equiv G - L = \sum_{i=1}^n (g_i - l_i) \mathbf{v}^i$, podemos mostrar que a norma euclidiana de P_{lin} , usando (10), (11) e $p_1 = 0$, pode ser dada por $\|P_{lin}\|_2^2 = \sum_{i,j=2}^n \frac{(g_i - l_i)(g_j - l_j)}{\omega_i \omega_j} (\nabla \mathbf{v}^i)^\top \nabla \mathbf{v}^j$. Por fim, como $(\nabla \mathbf{v}^i)^\top \nabla \mathbf{v}^j = (\mathbf{v}^i)^\top (\nabla^\top \nabla) \mathbf{v}^j = (\mathbf{v}^i)^\top \Delta \mathbf{v}^j = \omega_i$, obtemos finalmente

$$\|P_{lin}\|_2^2 = \sum_{i=2}^n \frac{(g_i - l_i)^2}{\omega_i}. \quad (13)$$

Essa expressão mostra que a norma euclidiana das potências das linhas depende apenas dos autovalores e das projeções das potências de entrada e saída nos autovetores do laplaciano, usando ω_i , g_i e l_i . A expressão (13) também é válida para o laplaciano ponderado, de modo que pode ser usada em redes elétricas reais [Caputo et al., 2019]. Usamos a seguir esse desenvolvimento da teoria espectral para obter modelos matemáticos para o problema de balanceamento de carga em redes elétricas.

3. Formulações matemáticas

Nesta seção, apresentamos o problema de otimização para balancear a carga de uma rede. O mesmo foi proposto em [Knippel et al., 2020] como uma extensão do trabalho em [Caputo et al., 2019]. Para tanto, considere a rede elétrica como o grafo $\mathcal{G}$ cujos vértices são classificados em nós geradores $\mathcal{V}_{ger}$ e nós consumidores $\mathcal{V}_{cons}$. Toda a energia gerada por $\mathcal{V}_{ger}$ é consumida por $\mathcal{V}_{cons}$.

Nosso objetivo é encontrar a eletricidade gerada por cada nó gerador que minimize a “potência elétrica” nas linhas, que denominamos de balanceamento de carga em redes de transmissão de energia. Na verdade, minimizaremos a norma da potência nas linhas, dada pela expressão (13), equivalendo a determinar o vetor de distribuição de geradores G , conhecendo-se o vetor de distribuição de consumidores L . Porém, no desenvolvimento a seguir, esses vetores podem também ser representados por suas projeções g_i e l_i , $i = 1, \dots, n$, no espaço dos autovetores ortonormais do laplaciano. Nesse sentido, pode-se formular o problema como segue, em que os três primeiros

modelos (FP) , (FM) e $(FM)_K$ foram desenvolvidas em [Knippel et al., 2020].

$$(FP) \quad \min \quad \sum_{i=2}^n \frac{(g_i - l_i)^2}{\omega_i} \quad (14)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}_k^i \geq 0, \quad k \in \mathcal{V}_{ger} \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}_k^i = 0, \quad k \notin \mathcal{V}_{ger} \quad (16)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} \sum_{i=1}^n g_i \mathbf{v}_k^i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n l_i \mathbf{v}_k^i \quad (17)$$

em que (15) garante a não negatividade da geração de energia G_k (sem projeção) pelos vértices geradores, (16) significa a não geração de eletricidade pelos vértices não geradores e (17) indica que toda a energia gerada será consumida. O equivalente na base canônica dos autovetores é

$$(FM) \quad \min \quad \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i=2}^n \frac{\mathbf{v}_j^i \mathbf{v}_k^i}{\omega_i} \right) (G - L)_j (G - L)_k \quad (18)$$

$$\text{s.a:} \quad G_k \geq 0, \quad k \in \mathcal{V}_{ger} \quad (19)$$

$$G_k = 0, \quad k \notin \mathcal{V}_{ger} \quad (20)$$

$$\sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} G_k = \sum_{i=1}^n L_i \quad (21)$$

Os autores [Knippel et al., 2020] deixaram um questionamento sobre a possibilidade de resolver o modelo (FM) aproximativamente. A ideia seria aproximar o valor do coeficiente $\left(\sum_{i=2}^n \frac{\mathbf{v}_j^i \mathbf{v}_k^i}{\omega_i} \right)$ de um produto $(G - L)_j (G - L)_k$ em (18). O número de variáveis no modelo de otimização seria o mesmo. Empregaríamos alguma técnica para enumerar iterativamente, como ocorre num esquema de geração de colunas, um conjunto $K \subset \{1, 2, \dots, n\}$ de autovalores/autovetores, para definir os coeficientes dos referidos produtos de dois elementos j e k de K . A questão é saber o quão próximo da solução ótima de (FM) estaria a solução do novo modelo, digamos $(FM)_K$ abaixo, considerando apenas um subconjunto K de autovalores e respectivos autovetores.

$$(FM)_K \quad \min \quad \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i \in K} \frac{\mathbf{v}_j^i \mathbf{v}_k^i}{\omega_i} \right) (G - L)_j (G - L)_k \quad (22)$$

$$\text{s.a:} \quad (19), (20), (21).$$

Até o momento, apresentamos os modelos disponíveis na literatura. Agora, passamos a expor a contribuição deste trabalho. Perceba que podemos eliminar as variáveis relacionadas a vértices não geradores de cada modelo. Isso reduz suas dimensões e acelera sua resolução, como mostra os resultados computacionais. Para introduzir uma nova abordagem de resolução, emprega-

remos a notação $q_{jk} = \sum_{i=2}^n \frac{\mathbf{v}_j^i \mathbf{v}_k^i}{\omega_i}$ e reescreveremos o modelo (FM) como

$$\begin{aligned}
 (\text{QP}) \quad \min \quad Z = & \sum_{j,k \in \mathcal{V}_{ger}} q_{jk} G_j G_k - 2 \sum_{j \in \mathcal{V}_{ger}} \sum_{k=1}^n q_{jk} G_j L_k + 2 \sum_{j,k=1}^n q_{jk} L_j L_k \\
 \text{s.a: } & (19), (21).
 \end{aligned} \tag{23}$$

Obtendo-se as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) como em [Bradley et al., 1977], é possível resolver (QP) aplicando a tradicional Fase I do método simplex, com a modificação de que uma variável nunca é introduzida na base se sua variável complementar já estiver nela, mesmo que o critério simplex indique a possibilidade de introdução dessa variável. Como a função objetivo de (QP) é convexa, terá um ponto único de ótimo. Para encontrá-lo, basta ver que na base ótima todas as variáveis G_k estão nela. As condições KKT de otimalidade para (QP) são: i) a solução é primal viável, i.e., satisfaz (21); ii) a solução é dual viável, i.e., cada derivada parcial da função em (23) para um dado G_j satisfaz $\left(2 \sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} q_{jk} G_k - 2 \sum_{k=1}^n q_{jk} L_k \right) \geq u$, sendo u a variável dual relacionada à restrição (21); e iii) verifica-se a complementariedade das folgas, i.e., $x_j G_j = 0$, para $j = 1, \dots, n$, sendo x_j uma variável de folga introduzida na desigualdade da condição de dual viabilidade para G_j . Nesse sentido, basta montar uma base cujas colunas são associadas às variáveis G_j para o sistema abaixo, pois x_j e G_j não podem estar simultaneamente na base, encontrar sua inversa e multiplicar pelo vetor do lado direito dele para obter os valores de cada G_j no ótimo.

$$(\text{QP})_B \quad \begin{cases} \sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} G_k = \sum_{i=1}^n L_i \\ x_j - 2 \sum_{k \in \mathcal{V}_{ger}} q_{jk} G_k + u = -2 \sum_{k=1}^n q_{jk} L_k \end{cases} \tag{24}$$

O emprego dessa técnica do uso das condições de otimalidade KKT tem sido utilizada para resolver problemas no setor de energia elétrica, como no problema de Fluxo de Potência Ótimo (OPF), que lembra o problema aqui estudado e cujo objetivo é minimizar as perdas de potência ativa na transmissão [Baptista et al., 2004].

Na próxima seção discutimos resultados para as abordagens de resolução discutidas acima.

4. Resultados computacionais

Para a análise dos resultados computacionais para os modelos da literatura e o proposto neste trabalho, consideramos instâncias de referência de redes elétricas do IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers). As linhas das redes são homogêneas e todos os nós, em nossos experimentos, consomem uma unidade de energia a exemplo de [Knippel et al., 2020]. A máquina utilizada foi um processador Intel Core i3-6006U, 2 × 2.00 GHz, com 12 GB de memória RAM, sistema operacional Windows 10 Pro 64 bits. Utilizamos a linguagem de programação Julia 1.9.3 e bibliotecas HiGHS.jl, JuMP.jl e LinearAlgebra.jl.

Empregando as formulações apresentadas anteriormente, podemos encontrar o valor de suas soluções ótimas, a linha de potência máxima da rede (mais sobrecarregada), quais suas extremidades e o identificador dessa linha na rede em questão. Esses valores são calculados para quatro redes IEEE. Uma rede com 30 nós, 41 linhas e o conjunto de geradores $\{1, 2, 13, 22, 23, 27\}$; outra com 118 nós, 179 linhas e conjunto de geradores $\{10, 25, 26, 46, 49, 54, 59, 61, 65, 66, 69, 80, 89, 110, 111\}$; uma rede de 300 nós, 409 linhas e 69 nós geradores; e por último uma rede de 2383 nós, 2886 linhas e 327 nós geradores. Os nós geradores das redes com 300 e 2383 vértices foram

omitidos por serem conjuntos numerosos. Porém, estão disponíveis sob demanda. Os resultados para essas redes estão apresentados na Tabela 1 e são comuns a todas as formulações empregadas. Isso mostra que a abordagem de resolução com uso de teoria espectral atinge os mesmos resultados de modelos clássicos sem seu uso. Para a formulação $(FM)_K$, consideramos um subconjunto de autovetores, conduzindo experimentos e avaliando algumas métricas para 100%, 90%, 80%, 70%, 60%, 50%, 30%, e 20% do total de autovalores.

Rede	Função de custo	Potência máxima	Linha	Extremidades da linha
IEEE 30	62.28	2.78	28	10 - 22
IEEE 118	690.24	7.52	38	26 - 30
IEEE 300	1506.09	18.00	53	266 - 271
IEEE 2383	14749.63	11.94	1011	797 - 1004

Tabela 1: **Função de custo** informando o valor ótimo da função objetivo do modelo para a respectiva **Rede**, a **Potência máxima** em uma linha dessa rede, a **Linha** correspondente, e as **Extremidades da linha** de máxima potência.

A Tabela 2 reporta os resultados relativos ao tempo computacional para resolver as instâncias IEEE de teste com os modelos (MF), (QP) e $(QP)_B$. Os resultados para o modelo (FP) ainda não foram realizados. Nessa Tabela 2, observamos que o método (QP) se destaca dos demais obtendo uma solução muito mais rápida em comparação aos outros dois. Veja que para a rede IEEE 2383, o modelo (MF) não foi capaz de resolver o problema após 24 horas de execução. Para a rede IEEE 300, a redução do tempo computacional atingiu quase 97% do tempo do modelo (MF).

Rede	IEEE 30			IEEE 118			IEEE 300			IEEE 2383		
Modelo	(MF)	(QP)	$(QP)_B$	(MF)	(QP)	$(QP)_B$	(MF)	(QP)	$(QP)_B$	(MF)	(QP)	$(QP)_B$
$\bar{t}$ (s)	0.91	0.13	0.25	16.24	3.32	0.85	217.70	51.62	6.54	-	359×60	22×60
Red(%)	0.00	85.71	72.53	0.00	79.56	94.77	0.00	76.21	96.99	-	-	-

Tabela 2: Comparação para a redução do tempo computacional para resolver cada instância com os modelos (MF), (QP) e $(QP)_B$.

As Tabelas 3 e 4 mostram os resultados para nossas instâncias, comparando algumas métricas para ver como varia a solução considerando uma porcentagem dos autovalores em relação ao uso do conjunto completo. Na Tabela 3, K é escolhido considerando a ordenação crescente dos índices dos autovalores, enquanto na Tabela 4, os elementos de K são escolhidos de forma aleatória. Para cada instância identificada na primeira linha de seu grupo de métricas, escolhemos porcentagens distintas do total de autovalores (na linha Porcent. de $|K|$), variando de 100% a 20%. Na linha seguinte, Função de custo, informamos o valor da solução ótima. As métricas escolhidas para avaliar o desvio em relação ao ótimo tomando todo o conjunto de autovalores estão na primeira coluna dessas tabelas sendo calculadas como: i) $\|P_{lin}^{\%}\|_2$: representa a norma 2 da potência nas linhas; ii) $\|P_{lin}^{\%}\|_{\infty}$: representa a norma infinita, que indica o valor máximo da potência nas linhas; iii) $\frac{100\|P_{lin} - P_{lin}^{\%}\|_2}{\|P_{lin}\|_2}$: indica o quão distantes estão essas duas potências em termos da norma 2; iv) $\frac{100\|P_{lin} - P_{lin}^{\%}\|_{\infty}}{\|P_{lin}\|_{\infty}}$: indica a maior diferença entre as potências nas linhas; v) $\frac{100\| \|P_{lin}\|_2 - \|P_{lin}^{\%}\|_2 \|}{\|P_{lin}\|_2}$: indica o desvio da potência nas linhas com relação à norma 2; e vi) $\frac{100\| \|P_{lin}\|_{\infty} - \|P_{lin}^{\%}\|_{\infty} \|}{\|P_{lin}\|_{\infty}}$: indica a maior diferença entre as potências máximas nas linhas. P_{lin} representa a potência nas linhas considerando 100% dos autovalores e $P_{lin}^{\%}$ é a potência nas linhas que considera a solução (G ou g) utilizando uma porcentagem deles pegos em ordem crescente, com $K = \{1, 2, 3, \dots, \lfloor \%|K| \rfloor\}$, enquanto no outro caso, escolhemos os $\lfloor \%|K| \rfloor$ elementos de K de forma aleatória (P_{lin}^r). Os símbolos “-” na coluna de 20% para o caso IEEE 300 da Tabela 4 significa que a execução foi

abortada após 5 horas. Para as demais porcentagens, o tempo máximo foi de 10 segundos. Nessas tabelas, notamos que a diminuição do percentual de autovalores só aproxima o valor ótimo calculado para todos eles, quando a rede é muito grande. Essa aproximação é melhor se pegarmos os menores autovalores em ordem crescente, em oposição a pegá-los de forma aleatória. Quanto maior a rede, melhores os valores das métricas calculadas em comparação a 100% dos autovalores. Tal questionamento foi colocado em [Knippel et al., 2020]. No entanto, os resultados da Tabela 4 indicam claramente que a escolha aleatória de K pode levar a grandes distorções das métricas avaliadas. Pois, para considerar uma escolha baseada na ordenação dos autovalores, primeiro é necessário determinar todos eles, comprometendo a geração de K iterativamente.

Rede IEEE 30								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	62.28	61.53	48.95	40.07	39.67	36.33	18.40	4.40
$\ P_{lin}^{\%}\ _2$	7.89	7.89	8.09	8.15	8.16	8.26	8.93	9.18
$\ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}$	2.78	2.78	2.68	2.97	2.90	2.84	3.78	4.43
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	2.10	22.40	25.94	26.51	31.13	53.09	59.53
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	4.15	49.95	55.69	58.36	66.30	64.01	85.07
$\frac{100\ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	0.00	2.53	3.29	3.42	4.69	13.43%	16.35
$\frac{100\ P_{lin}\ _{\infty} - \ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	0.00	3.60	6.83	4.32	2.16	35.97	59.35
Rede IEEE 118								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	690.24	625.08	617.83	592.43	565.73	539.77	437.66	368.45
$\ P_{lin}^{\%}\ _2$	26.27	26.64	26.60	26.61	27.03	27.25	28.29	28.61
$\ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}$	7.52	7.27	7.20	7.40	7.65	7.84	8.51	9.13
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	16.86	15.87	16.13	24.24	27.57	39.91	43.08
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	27.06	24.97	24.00	34.92	47.13	84.58	92.77
$\frac{100\ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	1.41	1.26	1.29	2.89	3.73	7.69	8.91
$\frac{100\ P_{lin}\ _{\infty} - \ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	3.32	4.25	1.59	1.73	4.25	13.16	21.41
Rede IEEE 300								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	1506	1461	1404	1329	1275	1185	1.006	–
$\ P_{lin}^{\%}\ _2$	38.81	38.88	39.06	39.17	39.26	39.43	42.0	–
$\ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}$	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	18.00	–
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00%	5.99	11.50	13.74	15.33	18.00	41.69	–
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	4.48	7.35	7.96	10.45	9.80	19.86	–
$\frac{100\ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	0.00	0.00	0.01	1.15	1.60	8.21	–
$\frac{100\ P_{lin}\ _{\infty} - \ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	–
Rede IEEE 2383								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	14750	13061	12310	11838	11280	10456	7911	5978
$\ P_{lin}^{\%}\ _2$	121.45	122.84	123.23	123.48	124.13	126.23	135.18	144.34
$\ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}$	11.94	12.62	12.57	12.51	12.55	12.23	16.29	18.09
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	15.18	17.18	18.39	21.14	28.32	48.88	64.23
$\frac{100\ P_{lin}-P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	36.89	36.18	32.93	40.06	53.91	123.45	149.30
$\frac{100\ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^{\%}\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	1.14	1.46	1.67	2.21	3.93	11.30	18.85
$\frac{100\ P_{lin}\ _{\infty} - \ P_{lin}^{\%}\ _{\infty}}{\ P_{lin}\ _{\infty}}$	0.00	5.69	5.28	4.77	5.11	2.43	36.43	51.51

Tabela 3: Avaliação de métricas para K considerando a ordenação crescente dos autovalores com (QP).

5. Considerações Finais

O artigo apresenta uma nova abordagem de resolução para o problema de balanceamento de carga em redes de energia, sob uma ótica da teoria espectral de grafos. Desenvolvemos um

método mais eficiente e rápido para sua resolução, que pode ser estendido para uma versão mais complexa do problema em que podemos desligar/ligar a geração em certos nós da rede. A partir da convexidade da função quadrática definida positiva e das condições KKT, resolvemos o problema efetuando operações elementares de inversão de matrizes, diminuindo o tempo computacional para obter as soluções. Com tal perspectiva geométrica baseada na teoria espectral, realizamos uma análise de redução de dimensionalidade no espaço dos autovetores. Investigamos se a equação da norma das potências nas linhas reflete uma “imagem de Fourier”, onde os autovetores associados aos autovalores de menor ordem correspondem a um maior fluxo na rede e têm maior importância. Mas isso requer conhecer o conjunto completo dos autovalores do laplaciano. Assim, usar aproximação da função objetivo gerando iterativamente um subconjunto K de autovalores não nos parece viável em um processo de geração de coluna para quando formos tratar de uma extensão deste trabalho. Ou seja, este estudo representa, na verdade, uma fase inicial da pesquisa, cuja sequência natural é investigar o atual problema considerando variáveis de decisão (binárias) para ativar ou desativar a geração de energia em nós geradores para evitar sobrecarga das linhas.

Adicionalmente, planejamos conduzir uma análise de sensibilidade para avaliar o impacto das variações na geração, visando evitar qualquer violação das especificações operacionais das linhas, tendo como base [Baptista et al., 2004].

Rede IEEE 30								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	62.28	57.52	35.07	29.46	44.06	31.06	17.59	6.60
$\ P_{lin}^r\ _2$	7.89	7.94	8.20	8.44	9.09	8.41	15.79	15.93
$\ P_{lin}^r\ _\infty$	2.78	2.69	3.33	3.86	3.99	3.74	6.90	9.24
$\frac{100\ P_{lin} - P_{lin}^r\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	11.22	28.06	37.78	57.21	36.92	173.29	175.33
$\frac{100\ P_{lin} - P_{lin}^r\ _\infty}{\ P_{lin}\ _\infty}$	0.00	13.01	26.43	45.90	71.66	55.01	181.20	260.52
$\frac{100\ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^r\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	0.01	3.93	6.97	15.21	6.59	100.13	101.90
$\frac{100\ P_{lin}\ _\infty - \ P_{lin}^r\ _\infty}{\ P_{lin}\ _\infty}$	0.00	3.24	19.78	38.85	43.52	34.53	148.20	232.37
Rede IEEE 118								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	690.24	666.62	308.52	246.02	172.15	62.57	27.90	28.47
$\ P_{lin}^r\ _2$	26.27	26.29	36.63	33.24	35.51	59.00	48.37	51.20
$\ P_{lin}^r\ _\infty$	7.52	7.86	12.42	13.26	17.34	16.30	13.50	14.05
$\frac{100\ P_{lin} - P_{lin}^r\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	3.33	97.15	77.53	90.96	201.06	154.60	167.29
$\frac{100\ P_{lin} - P_{lin}^r\ _\infty}{\ P_{lin}\ _\infty}$	0.00	4.56	85.72	102.49	156.66	219.42	179.46	168.77
$\frac{100\ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^r\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	0.00	39.44	26.53	35.17	124.59	84.13	94.90
$\frac{100\ P_{lin}\ _\infty - \ P_{lin}^r\ _\infty}{\ P_{lin}\ _\infty}$	0.00	4.52	65.16	76.33	130.58	116.76	79.52	86.83
Rede IEEE 300								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	1506	904.11	507.98	642.43	246.47	229.04	33.50	1.92
$\ P_{lin}^r\ _2$	38.81	54.49	80.54	106.41	84.97	72.80	86.21	161.64
$\ P_{lin}^r\ _\infty$	18.00	26.91	18.00	28.92	20.03	21.20	31.60	89.64
$\frac{100\ P_{lin} - P_{lin}^r\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	98.57	181.85	255.30	194.77	158.71	198.36	404.33
$\frac{100\ P_{lin} - P_{lin}^r\ _\infty}{\ P_{lin}\ _\infty}$	0.00	100.99	91.59	152.25	82.59	86.85	144.65	485.82
$\frac{100\ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^r\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	40.40	107.52	174.18	118.94	87.58	122.13	316.49
$\frac{100\ P_{lin}\ _\infty - \ P_{lin}^r\ _\infty}{\ P_{lin}\ _\infty}$	0.00	45.50	0.00	60.67	11.28	17.78	75.55	598.00
Rede IEEE 2383								
Porcent. de $ K $	100%	90%	80%	70%	60%	50%	30%	20%
Função de custo	14750	11054	11288	7976	6845	3949	1612	553
$\ P_{lin}^r\ _2$	121.45	158.22	132.03	233.65	233.14	190.41	231.02	298.06
$\ P_{lin}^r\ _\infty$	11.94	25.92	11.74	47.20	47.69	26.33	24.57	42.82
$\frac{100\ P_{lin} - P_{lin}^r\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	83.49	42.64	164.35	163.87	120.75	161.81	224.12
$\frac{100\ P_{lin} - P_{lin}^r\ _\infty}{\ P_{lin}\ _\infty}$	0.00	218.70	84.67	423.70	427.83	222.13	193.57	387.02
$\frac{100\ P_{lin}\ _2 - \ P_{lin}^r\ _2}{\ P_{lin}\ _2}$	0.00	30.27	8.71	92.38	91.96	56.78	90.22	145.42
$\frac{100\ P_{lin}\ _\infty - \ P_{lin}^r\ _\infty}{\ P_{lin}\ _\infty}$	0.00	117.08	1.67	295.31	299.41	120.51	105.78	258.63

Tabela 4: Avaliação de métricas para K escolhido de forma aleatória com (QP).

6. Agradecimentos

Pesquisa financiada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) (Código de Financiamento 001 e Proc. 88887.858272/2023-00), pela Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (FUNCAP) (Proc. PGP-0192-00040.01.00/22, SPU No: 10583149/2022) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Proc. CNPq 303988/2021- 5). Por fim, agradecemos aos revisores pelos comentários e sugestões para melhorar o texto.

Referências

- Baptista, E. C., Belati, E. A., e da Costa, G. R. M. (2004). Um método primal-dual aplicado na resolução do problema de fluxo de potência ótimo. *Pesquisa Operacional*, 24(2):215–226.
- Bradley, S. P., Hax, A. C., e Magnanti, T. L. (1977). *The Laplacian Spectrum of Graphs*. Addison-Wesley, Boston.
- Caputo, J. G., Knippel, A., e Retiere, N. (2019). Spectral analysis of load flow equations for transmission networks. *Engineering Research Express*, 1:025007.
- Cvetkovic, D., Rowlinson, P., e Simic, S. (2011). *An introduction to the theory of graph spectra*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Grainger, J. J. e Stevenson, W. (1994). *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, New York.
- Knippel, A., Caputo, J.-G., e Aymaz, I. (2020). Modèle de load flow et décomposition spectrale pour l'optimisation des réseaux électriques. In *Congrès Annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision*, Montpellier, France.
- Kundur, P. (1994). *Power System Stability and Control*. McGraw-Hill, New York.
- Pourbagher, R. e Derakhshandeh, S. Y. (2018). A powerful method for solving the power flow problem in the ill-conditioned systems. *International Journal of Electrical Power Energy Systems*, 94:8–96.
- Retiere, N., Ha, D. T., e Caputo, J. G. (2020). Spectral graph analysis of the geometry of power flows in transmission networks. *Engineering Research Express*, 14(2):2736–2747.
- Tostado-Véliz, M., Kamel, S., e Jurado, F. (2019). Robust and efficient approach based on richardson extrapolation for solving badly initialised/ill-conditioned power-flow problems. *IET Generation, Transmission & Distribution*, 13:3524–3533.