

Processos Reversíveis em Grafos Densos*

Isac Costa¹

Centro de Ciências e Tecnologia – Universidade Federal do Cariri
Av. Tenente Raimundo Rocha Nº 1639, Cidade Universitária, Juazeiro do Norte – Ceará, Brasil
CEP 63048-080
isac.costa@aluno.ufca.edu.br

Carlos V.G.C. Lima

Centro de Ciências e Tecnologia – Universidade Federal do Cariri
Av. Tenente Raimundo Rocha Nº 1639, Cidade Universitária, Juazeiro do Norte – Ceará, Brasil
CEP 63048-080
vinicius.lima@ufca.edu.br

RESUMO

Um processo reversível sobre um grafo $G = (V, E)$ é um processo iterativo tal que, dados uma função de limiar $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ e uma rotulação inicial $c_0 : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$, cada vértice v muda seu rótulo se e somente se ele possui ao menos $f(v)$ vizinhos com o rótulo oposto, a cada passo de tempo $t \in \mathbb{N}$. Estudamos o problema de determinar o número mínimo $r_f(G)$ de vértices com rótulo inicial 1, tal que todos os vértices alcançam o rótulo 1 definitivamente, em um número finito de passos de tempo. Mostramos um algoritmo polinomial para grafos completos e qualquer f e estendemos sua solução a grafos blocos e limiares restritos. Provamos também a NP-dificuldade para (k, ℓ) -grafos, mesmo para $\max\{k, \ell\} \leq 2$ e $f(v) = 2$, para todo v . Esta prova de NP-completude mostra que o problema dual associado, ou seja, o problema de decidir se $r_f(G) \leq n - k$, quando parametrizado por k , é W[1]-difícil.

PALAVRAS CHAVE. Processos Reversíveis. Conjunto de Conversão. Complexidade Computacional.

ABSTRACT

A reversible process on a graph $G = (V, E)$ is an iterative process such that, given a threshold function $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ and an initial vertex labelling $c_0 : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$, each vertex v changes its label if and only if it has at least $f(v)$ neighbors with the opposite label, at each time step $t \in \mathbb{N}$. We study the problem of determining the minimum number $r_f(G)$ of vertices with label 1, such that all vertices reach label 1 definitely in a finite number of time steps. We present a polynomial-time algorithm for complete graphs and general threshold function f and extend this solution for block graphs and restricted thresholds. We prove the NP-hardness for (k, ℓ) -graphs, even for $\max\{k, \ell\} \leq 2$ and $f(v) = 2$, for every v . This NP-completeness proof shows that the associated dual problem, that is, the problem of deciding whether $r_f(G) \leq n - k$ parameterized by k is W[1]-hard.

KEYWORDS. Reversible processes. Conversion set. Computational complexity.

Tópicos: TAG – Teoria e Algoritmos em Grafos e OC – Otimização Combinatória

*Trabalho apoiado parcialmente pelo projeto CNPq Universal [422912/2021-2].

¹Bolsista PIBIC/UFCA.

1. Introdução

Para noções e notações básicas sobre Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional (Parametrizada), referenciamos o leitor aos seguintes livros [Bondy e Murty, 2008; Garey e Johnson, 1979; Downey e Fellows, 2012].

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples e finito com n vértices e m arestas. Um *processo dinâmico discreto sobre G* é uma sequência infinita $c = (c_t)_{t \in \mathbb{N}} = (c_0, c_1, \dots)$ de *configurações* $c_t : V(G) \rightarrow \{0, 1\}$. Dizemos que c_0 é a *configuração inicial* de c e $c_t(v)$ denota o *estado* de v no instante $t \in \mathbb{N}$. A transição de c_t para c_{t+1} é feita de acordo com uma regra predeterminada a cada passo de tempo, o que determina processos distintos entre si. Esta abordagem é empregada em uma variedade de áreas [Chen, 2009; Allouche et al., 2001; Adler, 1991; DeGroot, 1974].

Estudamos um processo iterativo em grafos que generaliza a votação majoritária [Peleg, 2002], empregada em muitos algoritmos de programação distribuída. A atualização de estados é tal que c_{t+1} é obtida a partir de c_t através de uma *função de limiar* $f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Denotando a *vizinhança* de v em G por $N_G(v)$, a atualização é síncrona e definida como segue

$$c_{t+1}(v) = \begin{cases} 1 - c_t(v) & , \text{ se } |\{u \in N_G(v) : c_t(u) \neq c_t(v)\}| \geq f(v); \\ c_t(v) & , \text{ caso contrário.} \end{cases} \quad (1)$$

Assim, todo vértice v troca seu estado se e somente se ele possui ao menos $f(v)$ vizinhos com o estado oposto, a cada passo de tempo $t \in \mathbb{N}$. Dizemos que $f(v)$ é o *limiar* de v , que faz parte da entrada. Dada uma configuração inicial c_0 , chamamos tal processo iterativo seguindo a Equação (1) como um *processo f -reversível* em G , denotado por $(c_t)_{t \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente c . Se f é uma função k -constante, $k \in \mathbb{N}$, o processo é chamado de *k -reversível* em G . Dizemos também que um processo f -reversível c em G é *iniciado* por $S \in V(G)$ se $c_0(v) = 1$ se e somente se $v \in S$, ou seja, S é o conjunto de vértices com estado 1 na configuração inicial.

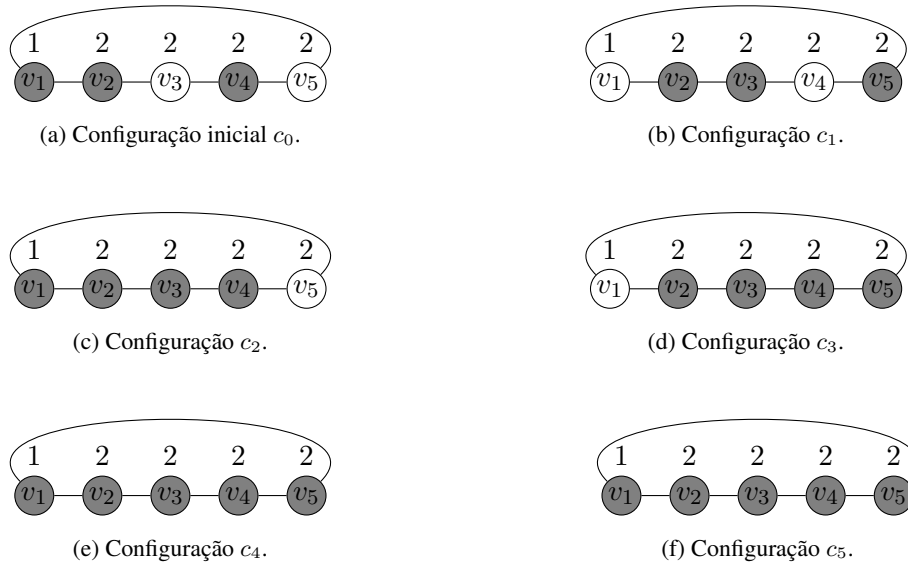


Figura 1: Exemplo de um processo f -reversível sobre um ciclo com cinco vértices, onde $f(v_1) = 1$ e $f(v_i) = 2$, $2 \leq i \leq 5$. Um nó é marcado de cinza se e somente se possui estado 1.

Muitos trabalhos consideram processos iterativos em grafos, mas com a restrição de que as trocas de estados são permitidas no máximo uma vez por vértice [Araújo e Sampaio, 2023; Caro

e Pepper, 2015; Centeno et al., 2011; Dreyer e Roberts, 2009; Kempe et al., 2003], que chamamos *processos irreversíveis* ou um *processo f -irreversível* em G com função de limiar f . Dizemos também que um processo f -irreversível em G é *iniciado* por $S \in V(G)$ se $c_0(v) = 1$ se e somente se $v \in S$. Esses estudos são usados, por exemplo, no contexto de disseminação de opiniões sobre redes sociais ou de doenças entre indivíduos.

Dado um processo f -reversível c , pela Equação (1), todo vértice v considera somente seu próprio estado e de seus vizinhos para definir o seu próximo estado, a cada passo de tempo. Assim, consideramos apenas grafos conexos. Além disso, se $f(v) > d_G(v)$ para algum vértice v , então $c_t(v) = c_0(v)$ para todo $t > 0$, e podemos assumir que $f(v) = d_G(v) + 1$ neste caso, onde $d_G(v)$ denota o *grau* de v em G . Portanto, somente valores de limiar em $\{0, \dots, d(v) + 1\}$ para cada vértice v serão considerados. Note que se $f(v) = 0$, então o estado de v muda a cada passo de tempo.

Como G é finito e c_t determina c_{t+1} de forma única através da Equação (1), o número de configurações é igual a 2^n . Assim, existe um instante $t^* \in \mathbb{N}$ em que $c_{t^*} = c_{t^*+k}$, para algum inteiro $k > 0$. Assim, o processo pode ser dividido em duas fases: a *transiente*, formada pelo conjunto de configurações precedendo c_{t^*} , e a *periódica*, que inclui todas as configurações $c_{t'}$, com $t' \geq t^*$. O comprimento das fases transiente e periódica são denotados por $\tau_f(G)$ e $p_f(G)$, respectivamente. Em [Lima et al., 2018] é mostrado que $p_f(G) \leq 2$ e $\tau_f(G) = O(m + n\Delta(G))$, para qualquer função de limiar f e grafo G , onde $\Delta(G)$ denota o grau máximo de G .

Dado um grafo $G = (V, E)$ e uma função de limiar f , dizemos que um processo f -reversível c iniciado por $S \in V(G)$ *converge* se todos os vértices alcançam estado 1 em algum instante $t \in \mathbb{N}$ e permanecem com ele para todo $t' \geq t$. Neste caso, dizemos que S é um *conjunto conversor* do par (G, f) . O *número de conversão* $r_f(G)$ é a cardinalidade mínima de um conjunto conversor de (G, f) . Se f é k -constante, então denotamos o número de conversão por $r_k(G)$, para um inteiro $k > 0$. Claramente, não pode existir qualquer limiar igual a 0 para haver a convergência. Além disso, $V(G)$ é um conjunto conversor *trivial* de (G, f) , para qualquer G e f , e $r_1(G) = n$, para qualquer grafo G .

Em [Centeno et al., 2011] é provada a NP-dificuldade de determinar se $r_2(G) \leq k$ para um grafo G qualquer, dado um inteiro k como entrada. Em [Lima et al., 2018] é provado a NP-completude, mesmo para grafos bipartidos de grau máximo 3 e limiares em $\{1, 2, 3\}$, provando que o problema está também em NP. A NP-completude foi primeiramente provada em [Dreyer e Roberts, 2009] para processos k -reversíveis, além de mostrar valores exatos de $r_k(G)$ em classes específicas, com $k \geq 3$.

De fato, determinar $r_f(G)$ em tempo polinomial não é trivial mesmo para classes simples e limiares máximos pequenos. Em [Centeno et al., 2011] é apresentado um limite superior para $r_2(T)$ em árvores T e um algoritmo de programação dinâmica quadrático para $r_f(P)$ em caminhos P e limiares em $\{1, 2\}$, porém para funções de limiar restritas, deixando aberto o problema para caminhos no caso geral.

Seja CONJUNTO CONVERSOR o problema de determinar se um dado grafo G possui um conjunto conversor com tamanho no máximo um inteiro positivo k . Neste trabalho estudamos a complexidade de CONJUNTO CONVERSOR para algumas classes de grafos. Mostramos um algoritmo de tempo polinomial para grafos completos e qualquer função de limiar. Aplicamos esta solução a grafos bloco e valores de limiar restritos. Provamos também a NP-dificuldade para (k, ℓ) -grafos (grafos que admitem uma partição dos vértices em k -cliques e ℓ conjuntos independentes), mesmo para $\max\{k, \ell\} \leq 2$ e $f(v) = 2$, para todo v . Esta prova de NP-completude para CONJUNTO CONVERSOR mostra que o problema dual associado, ou seja, o problema de de-

cidir se $r_f(G) \leq n - k$, quando parametrizado por k é W[1]-difícil. Chamamos tal problema de CONJUNTO CONVERSOR DUAL.

Ao longo do texto usaremos as seguintes definições e notações. Seja $N_S(v)$ a vizinhança de v em $S \subseteq V(G)$, ou seja, $N_G(v) \cap S$. Denotamos por $C_i(t)$ o conjunto de todos os vértices com o mesmo estado i em $t \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, 1\}$. Dizemos que $A \subseteq C_0(t)$ e $B \subseteq C_1(t)$ formam um *par ruim* de um processo f -reversível c sobre G em $t \in \mathbb{N}$ se $|N_B(v)| \geq f(v)$, para cada $v \in A$, e $|N_A(u)| \geq f(u)$, para cada $u \in B$. Claramente c não converge se possui qualquer par ruim, em qualquer instante $t \in \mathbb{N}$. Finalmente, seja $S_1(t)$ o conjunto de vértices cujos estados mudam do instante $t \in \mathbb{N}$ para $t + 1$ e $S_2(t) = V(G) \setminus S_1(t)$.

2. Algoritmo para Grafos Completos e Blocos

Seja $G = (V, E)$ um grafo completo e f uma função de limiar sobre $V(G)$. Considere $V(G)$ ordenado em ordem não-crescente de limiares, ou seja, $f(v_1) \geq f(v_2) \geq \dots \geq f(v_n)$. Seja $u(G)$ o menor inteiro $k \leq n - 1$, se existe, tal que $f(v_k) > n - k$ e $f(v_{k+1}) \leq k$; caso contrário, $u(G) = n$. Desta forma, os primeiros $u(G)$ vértices formam um conjunto conversor de (G, f) , ou seja, $r_f(G) \leq u(G)$.

Proposição 1. *Se um processo f -reversível c sobre um grafo completo G converge, então $C_1(t) \cap S_2(t) \neq \emptyset$, para todo $t \in \mathbb{N}$, e $C_0(t) \cap S_1(t) \neq \emptyset$, para todo $t < \tau_f(G)$.*

Demonstração. Devido à convergência do processo c , temos que $|C_1(t)| \geq r_f(G) > 0$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Suponha por contradição que $C_1(t) \cap S_2(t) = \emptyset$, para algum $t \in \mathbb{N}$. Logo, existe um subconjunto $R \subseteq C_0(t) \cap S_1(t)$, tal que $|R| \geq r_f(G)$ e $f(v) \leq |R|$, para todo $v \in C_1(t)$. Assim, $C_1(t + 1) = R$ e $C_1(t) \subseteq C_0(t + 1)$, o que implica que $R \cap S_2(t + 1) = \emptyset$. Assim, existe um subconjunto de vértices $R' \subseteq C_0(t + 1)$, tal que $C_1(t + 2) = R'$. Portanto $f(u) \leq |R|$, para todo $u \in R'$. Dessa forma, para cada passo de tempo $t^* \geq t$, temos que $C_1(t^*) \cap S_2(t^*) = \emptyset$, uma contradição pela convergência de c .

Agora, suponha por contradição que $C_0(t) \cap S_1(t) = \emptyset$ para algum $t < \tau_f(G)$. Se $C_1(t) \subseteq S_2(t)$, então o processo está em uma configuração periódica, uma contradição pela escolha de t . Logo, alguns vértices de $C_1(t)$ trocam seus estados, implicando que $|C_0(t)| < |C_0(t + 1)|$. Assim, temos que $C_0(t + 1) \subset S_2(t + 1)$. Podemos ver que $C_0(t + 1)$ também cresce em $t + 2$. Portanto, todo vértice terá estado 0 na configuração periódica, uma contradição pela convergência de c . $\square$

Uma consequência da Proposição 1 é que o vértice v_1 , de maior limiar, deve estar em qualquer conjunto conversor de um grafo completo G . Além disso, v_1 nunca muda de estado. O Lema 2 caracteriza os casos em que $r_f(G) = n$.

Lema 2. *Seja $G = (V, E)$ um grafo completo e f uma função de limiar. Então $r_f(G) = n$ se e somente se $u(G) = n$ e ocorre um dos seguintes casos:*

1. $f(v_n) \geq n$;
2. Existe um inteiro $q \geq 0$, tal que $f(v_i) \leq n - i$ para todo $q + 1 \leq i \leq n - 1$. Além disso, se $q > 0$, então $f(v_q) > n - q$ e $f(v_{q+1}) > q$.

Demonstração. Suponha que escolhemos uma configuração inicial que faz o processo convergir. Se $r_f(G) = n$, então é claro que $u(G) = n$. Logo, suponha que $u(G) = n$. Se $f(v_n) \geq n$, pela ordenação de $V(G)$ temos que todos os vértices v de G satisfazem $f(v) \geq n$ e é claro que $r_f(G) =$

n , satisfazendo o Caso 1. Agora, suponha que $f(v_n) \leq n-1$. Como $u(G) = n$, então $f(v_{n-1}) \leq 1$ e, assim, $f(v_{n-1}) = f(v_n) = 1$. Seja p^1 o número de vértices $v \in V(G)$ tal que $f(v) = 1$. Pela convergência do processo, todos tais vértices devem ter o mesmo estado ao longo de todo o processo. Além disso, seja p^2 o número de vértices $v_r \in V(G)$ tal que $f(v_r) \leq p^1$ e $r \leq n - p_1$. Se um destes vértices v_r possui estado oposto aqueles p_1 com limiar 1, então v_r junto com eles formam um par ruim. Assim, os últimos $p_1 + p_2$ vértices devem possuir o mesmo estado ao longo de todo o processo. De modo geral, seja p^i o número de vértices v_r tal que $f(v_r) \leq \sum_{j=1}^{i-1} p^j$ e $r \leq n - \sum_{j=1}^{i-1} p^j$. Definimos $0 \leq q \leq n-2$ como o maior índice satisfazendo $f(v_q) > n - q$. Então temos que $q = n - \sum_{j=1}^k p^j$, para algum inteiro $k \geq 1$. Podemos ver que todos os vértices v_j , $q+1 \leq j \leq n$ devem ter o mesmo estado durante todo o processo e seja S o conjunto formado por tais vértices. Se $q = 0$, então $S = V(G)$, o que implica que $r_f(G) = n$ e o teorema satisfaz o Caso 2. Então, considere $q > 0$. Como $u(G) = n$ e $f(v_j) \leq n - j$ para todo $q+1 \leq j \leq n-1$, então $f(v_{q+1}) > q$. Desta forma, se existe pelo menos um vértice cujo estado inicial é diferente daqueles em S , então todos os vértices com limiares iguais a 1 trocam seus estados no instante 0 para o instante 1, a menos de v_{q+1} , uma contradição pela convergência do processo. Portanto, todos os vértices devem possuir o mesmo estado inicial, concluindo a prova. $\square$

O próximo lema descreve um conjunto conversor mínimo em grafos completos.

Lema 3. *Seja c um processo f -reversível em um grafo completo G . Então os $r_f(G)$ vértices com maiores limiares formam um conjunto conversor de G .*

Demonstração. Provaremos por indução em $f(v_1)$. Pelo Lema 2, o lema segue trivialmente se $f(v_1) = 1$. Suponha que o lema é verdadeiro para qualquer função de limiar f em que $f(v_1) \leq k-1$, para algum inteiro $k \geq 2$. Considere agora um processo f -reversível c em G cujos $p \geq 1$ primeiros maiores limiares são iguais a $f(v_1) = k$. Considere c' um processo f' -reversível em G , onde f' é obtida de f decrementando os primeiros p limiares para $k-1$.

Pela Proposição 1, se c converge, então $C_1(0) \cap S_2(0) \neq \emptyset$. Além disso, todos os vértices de $C_1(0) \cap S_2(0)$ não trocam seus estados iniciais, para todo instante $t \in \mathbb{N}$. Desta forma, se $p > r_{f'}(G)$ e o conjunto dos primeiros $r_{f'}(G)$ vértices não é um conjunto conversor de (G, f) , então os $p - r_{f'}(G)$ vértices com limiar k não podem mudar seus estados iniciais, que são iguais a 0, ou seja, $r_{f'}(G) + (n - p) < k$. Porém, como c' converge através dos $r_{f'}(G)$ vértices de limiares $k-1$, por hipótese de indução, temos que $r_{f'}(G) + (n - p) \geq k-1$, uma vez que este conjunto deve ser suficiente para converter os demais vértices de limiar $k-1$ em c' . Portanto, $r_{f'}(G) + (n - p) = k-1$. Isso implica que é suficiente adicionar apenas um vértice de limiar k ao conjunto dos $r_{f'}(G)$ vértices de limiar k em c , de modo a obter um conjunto conversor de (G, f) e o lema segue neste caso com $r_f(G) = r_{f'}(G) + 1$, onde todos tais $r_f(G)$ vértices possuem limiar k .

Agora, se $p < r_{f'}(G)$, então os primeiros $r_{f'}(G)$ vértices formam um conjunto conversor de (G, f) , tal que os primeiros p vértices devem estar em $C_1(0) \cap S_2(0)$. Neste caso, se $r_f(G) \leq p$, então o lema segue tomando os primeiros p vértices como solução ótima. Caso contrário, temos que os primeiros p vértices devem estar em $C_1(0) \cap S_2(0)$ e é suficiente tomar os $r_f(G)$ vértices com maiores limiares. $\square$

O Lema 3 não caracteriza as soluções ótimas. Por exemplo, se $G = K_3$, $f(v_1) = f(v_2) = 2$ e $f(v_3) = 1$, então $\{v_1, v_3\}$ é um conjunto conversor mínimo. O próximo lema mostra como determinar $r_f(G)$ em grafos completos.

Teorema 4. Determinar $r_f(G)$ em grafos completos G e função de limiar f qualquer pode ser feito em tempo polinomial.

Demonstração. Se $r_f(G) = n$, então, pelo Lema 2, podemos obter $r_f(G)$ em tempo linear. logo, é suficiente considerar $r_f(G) < n$. Neste caso, considere uma solução ótima dada pelo Lema 3. Desta forma, é suficiente aplicar busca binária dos valores 1 a $n - 1$, tal que $r_f(G)$. A cada etapa da busca executamos o processo f -reversível, onde $C_1(0)$ é dado pelos primeiros vértices, seguindo a ordenação não-crescente dos valores de limiar. A execução do processo em cada etapa da busca pode levar tempo da ordem de $\tau_f(G)$ configurações, onde a atualização de cada configuração é feita em tempo $O(n + m)$. Assim, o algoritmo completo possui complexidade assintótica $O(\tau_f(G) \times (n + m) \log n)$. Como $\tau_f(G)$ é polinomialmente limitado para todo grafo e função de limiar [Lima et al., 2018], o resultado segue. $\square$

Teorema 5. Existe um algoritmo polinomial que computa $r_f(G)$ em um grafo bloco G , tal que $f(v) > d(v)$, para toda articulação v .

Demonstração. Dada uma articulação v de G com $f(v) > d(v)$ em um grafo bloco G , construímos outro processo sobre o grafo $G - v$ como segue: i.) um vértice u troca seu estado de 1 (0) para 0 (1) se u possui pelo menos $f'(u)$ ($f''(u)$) vizinhos com estado 1 (0); ii.) $f'(u) = f(u)$, para todo $u \in V(G')$; iii.) $f''(u) = f(u)$ para todo $u \in V(G')$ e $u \notin N_G(v)$; iv.) $f''(u) = f(u) - 1$, se $u \in N_G(v)$. Neste novo processo, o tamanho de um conjunto conversor não é maior que $r_f(G)$, porque um vértice necessita de menos vizinhos com estado 1 para trocar o seu próprio. Assim, construímos uma solução ótima de cada clique K , obtida pela remoção de todas as articulações, pelo Teorema 4. $\square$

3. Processos f -Reversíveis em grafos (k, ℓ)

Um grafo é dito *split* se admite uma partição de seus vértices em uma clique e um conjunto independente. Um grafo é dito (k, ℓ) se podemos particionar seu conjunto de vértices em k cliques e ℓ conjuntos independentes. Mesmo para cliques pequenas, determinar $r_f(G)$ para grafos *split* G e função de limiar qualquer f parece não trivial. Para exemplificar, consideremos grafos *split* cuja clique possui tamanho 1 ou 2. Primeiro, vamos considerar G como uma estrela com vértice central v e $N(v) = \{u_1, u_2, \dots, u_{n-1}\}$.

Lema 6. Seja G uma estrela com vértice central v . Se f é uma função de limiar em que exatamente $0 \leq p \leq n - 1$ vizinhos u_i de v satisfazem $f(u_i) \geq 2$ e os $q = n - 1 - p$ restantes não, então:

$$r_f(G) = \begin{cases} p & , \text{ se } q < f(v) \leq p; \\ p + 1 & , \text{ se } q < f(v) \text{ e } p < f(v); \\ n - f(v) + 1 & , \text{ se } f(v) \leq q. \end{cases}$$

Além disso, em toda configuração inicial c_0 com exatamente $r_f(G)$ vértices com estado 1 e tal que $c_0(v) = 0$, $q < f(v)$.

Demonstração. Sabemos que todos os vizinhos de v com limiares iguais a 2 não mudam seus estados iniciais, que devem ser iguais a 1, pela convergência do processo. Assim $r_f(G) \geq p$. Se $n - 1 - p < f(v)$, então seja S o conjunto de vértices $u \in N(v)$ com $f(u) = 1$ e tal $f(v) > |S|$. Além disso, se $f(v) \leq p$, então S é um conjunto conversor de (G, f) , uma vez que v muda de estado no tempo $t = 1$ e permanece com este para todo $t' > t$. Assim, todo o conjunto S alcança estado 1 no tempo 2 e o processo converge. Caso contrário, se $f(v) > p$, então são necessários mais do que p

vértices para mudar o estado inicial de v . Dessa forma, podemos considerar $N(v) \setminus S \cup \{v\}$ como um conjunto conversor mínimo. Finalmente, se $f(v) \leq n - 1 - p$ então cada subconjunto $S' \subseteq S$ com $f(v)$ vértices deve possuir o mesmo estado que v . Assim, temos que v não pode ter estado inicial igual a 0, caso contrário todos os vértices de S teriam estado 0 e v teria estado 1 no tempo $t = 1$, uma contradição. Logo $c_0(v) = 1$ e existe no máximo $f(v) - 1$ vértices de S com estado inicial 0, portanto $f(v) = n - (f(v) - 1) = n - f(v) + 1$. $\square$

Trataremos agora de processos 2-reversíveis em grafos *split* $G = (V, E)$, tal que $V(G)$ é particionado em uma clique K e um conjunto independente I . Então existe convergência de tais processos somente se, considerando $|K| \geq 4$, existe no máximo um vértice de K com estado diferente dos $|K| - 1$ demais vértices de K . Assim, existem somente quatro possibilidades para os estados dos vértices de K : todos possuem estado 0; exatamente um deles possui estado 1; exatamente $|K| - 1$ deles possuem estado 1; todos possuem estado 1. Além disso, se $|I| > 1$, então $r_2(G) \leq n - 1$, já que $I \cup K \setminus \{v\}$ é um conjunto conversor de (G, f) , para qualquer $v \in K$.

Seja $K' \subseteq K$ tal que $N_I(v) = \emptyset$, para todo $v \in K'$. Além disso, seja I' o maior subconjunto de I tal que, se $u \in I'$, então $d(u) \geq 2$, $|\bigcap_{u \in S} N(u)| \leq 1$, para qualquer $S \subseteq I'$ e $|\{k_i \in K \setminus K' : |N_{I'}(k_i)| \geq 1\}| \leq 1$. Portanto, se $K \subseteq C(1, 0)$, então todos os vértices de I' devem possuir estado inicial 0.

Lema 7. *Se G é um grafo split com clique K e conjunto independente I , tal que $|K| \geq 4$ e $|K'| \geq 2$, então $r_2(G) = \min\{n - 1, n - |I'|\}$.*

Demonstração. Seja c um processo 2-reversível em G que converge por um conjunto conversor mínimo. Se existem pelo menos dois vértices $v_1, v_2 \in K'$, tais que $c_t(v_1) = c_t(v_2) = 0$, para algum instante $t \in \mathbb{N}$, então eles trocam seus estados no tempo $t' > t$ somente se existem ao menos dois vértices $v_3, v_4 \in K$, tal que $c_{t'}(v_3) = c_{t'}(v_4) = 1$, o que implica que $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_3, v_4\}$ formam um par ruim de c . Assim, no máximo um vértice $v_1 \in K'$ pode possuir estado inicial 0 e pelo menos um vértice $v_2 \in K'$ tem estado inicial 1. Se v_2 é o único vértice de K com estado inicial 1, então $c_1(v_1) = c_1(v_2) = 0$, uma contradição, como no caso anterior. Logo, existe pelo menos um vértice $v_3 \in K \setminus K'$ com estado inicial 1 e, portanto, não existe $v_4 \in K \setminus K'$ com estado inicial 0, caso contrário $\{v_1, v_4\}$ e $\{v_2, v_3\}$ formam um par ruim de c .

Agora, suponha que $v_1 \in K'$ é o único vértice de K com estado inicial 0. Assim, todos os vértices de K' devem possuir estado 1 no tempo $t = 1$ e existe no máximo um vértice $v \in K \setminus K'$ tal que $c_1(v) = 0$. Se tal vértice v existe, então temos que v tem pelo menos um vizinho $u \in I$ com estado inicial 0, o que implica que $d(u) \geq 2$. Assim, ao menos um vértice $v' \in K \setminus K'$ e $v' \neq v$ deveria mudar seu estado inicial para 0, uma contradição pela convergência de c . Neste caso, pela minimalidade do conjunto conversor, temos que $C_0^1 = V(G) \setminus \{v_1\}$ e o lema segue com $r_2(G) = n - 1$.

Assim, suponha que $K' \subseteq C_0^1 \cap S_2(0)$. Logo, no máximo um vértice $v \in K \setminus K'$ é tal que $c_0(v) = 0$ e suponha que v existe. Se $d(u) = 1$ para todo vértice $u \in I$, então $|I'| = 0$ e é claro que $r_2(G) = n - 1$. Então, seja $u \in I$ um vértice com $d(u) \geq 2$ e $c_0(u) = 0$. Desta forma, temos que $uv \in E(G)$ e exatamente um vértice $v' \in K \setminus K'$ e $v' \neq v$ devem trocar seus estados iniciais, o que implica que $d(u) = 2$. Assim, u deve manter seu estado inicial e v e v' trocam seus estados durante todo o processo, uma contradição pela convergência de $R_2(G)$.

Finalmente, suponha que $K \subseteq C_0^1$. Assim, existe pelo menos um vértice $u \in I$ tal que $d(u) \geq 2$ e $c_0(u) = 0$. Além disso, para cada vértice $u' \in I$, tal que $|N(u) \cap N(u')| \geq 2$, temos que somente um deles pode possuir estado 0, caso contrário $\{N(u) \cap N(u')\}$ e $\{u, u'\}$

formam um par ruim de $R_2(G)$. Assim, temos que todos os vértices de I' podem receber estado inicial 0, uma vez que todos eles trocam seus estados iniciais e no máximo m vértice de K possui estado 0 no tempo $t = 1$, o que implica que a convergência de $R_2(G)$ em no máximo dois passos de tempo e $r_2(G) = n - |I'|$. $\square$

Agora, provaremos a NP-completude de CONJUNTO CONVERSOR em grafos *split* G , restrito a processos 2-reversíveis. Apresentamos uma redução polinomial do problema CONJUNTO INDEPENDENTE, que é NP-completo mesmo para grafos cúbicos [Garey e Johnson, 1979]. Seja $\alpha(G)$ o tamanho de um conjunto independente máximo de G .

Teorema 8. CONJUNTO CONVERSOR é NP-completo mesmo se $f(v) = 2$ para todo vértice v em um grafo *split* $G = (V, E)$ com clique K e conjunto independente I , tal que $d(u) = 3$, para todo vértice $u \in I$, $|K'| = 2$ e $|N_I(v)| = 2$, para todo $v \in K \setminus K'$.

Demonstração. Seja G um grafo cúbico. Construímos um processo 2-reversível em um grafo *split* H com clique K e conjunto independente I como segue. Para cada aresta $uv \in E(G)$ associamos um vértice $w_{uv} \in V(H)$. Adicionamos também dois vértices k'_1 e k'_2 em $V(H)$. Portanto, construímos H tal que $K = K' \cup \{w_{uv} \mid uv \in E(G)\}$ e $I = V(G)$, onde $K' = \{k'_1, k'_2\}$. Além disso, adicionamos uma aresta entre cada vértice $w_{uv} \in K \setminus K'$ para as suas correspondentes extremidades u e v , tal que $uv \in E(G)$. Podemos notar que $|N_I(w_{uv})| = 2$, para todo $w_{uv} \in K \setminus K'$, e $d(v) = 3$, para todo $v \in I$. Pela prova do Lema 7, se $|I'| \geq 2$, então qualquer conjunto conversor mínimo de (G, f) deve conter todo K . Além disso, I' é formado por vértices não adjacentes em G , a menos por dois vértices. Assim, temos que $|I'| \in \{\alpha(G), \alpha(G) + 1\}$ e o teorema segue. $\square$

Corolário 9. CONJUNTO CONVERSOR DUAL é $W[1]$ -completo quando parametrizado por k , mesmo se $f(v) = 2$ para todo vértice v em um grafo *split* $G = (V, E)$ com clique K e conjunto independente I , tal que $d(u) = 3$, para todo $u \in I$, $|K'| = 2$ e $|N_I(v)| = 2$, para todo $v \in K \setminus K'$.

Demonstração. A prova do Teorema 8 mostra uma fpt-redução de CONJUNTO INDEPENDENTE parametrizado pelo tamanho da solução, que é um problema $W[1]$ -completo [Downey e Fellows, 2012], para CONJUNTO CONVERSOR DUAL, onde $k \in \{\alpha(G), \alpha(G) + 1\}$. $\square$

Mostraremos agora que CONJUNTO CONVERSOR é também NP-completo mesmo se G é um $(2, 1)$ -grafo e $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$. Apresentamos uma redução de uma restrição do 3SAT, onde cada cláusula possui 2 ou 3 literais e cada variável ocorre em no máximo 3 cláusulas [Garey e Johnson, 1979]. Seja 2-IN-3 3SAT essa restrição de 3SAT. Esse problema pode ser resolvido se todas as cláusulas possuem exatamente 2 ou 3 literais [Papadimitriou, 1994]. Na demonstração usamos um fato provado em [Lima et al., 2018] (Lema 11), que garante que se um processo f -reversível sobre um grafo $G = (V, E)$ converge, existe um vértice v com $f(v) = d(v)$ e todos os seus vizinhos u satisfazem $f(u) = 1$, então v deve manter seu estado inicial igual a 1, para todo tempo $t \in \mathbb{N}$. Além disso, ao menos um vizinho de v deve possuir estado 1 durante todo o processo. Este resultado pode ser obtido do Lema 6.

Teorema 10. CONJUNTO CONVERSOR é NP-completo em um $(2, 1)$ -grafo $G = (V, E)$ e $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3\}$.

Demonstração. Seja F uma instância de 2-IN-3 3SAT com $n \geq 4$ variáveis $X_1, \dots, X_n$ e m cláusulas $C_1, \dots, C_m$. Construímos um processo f -reversível sobre G , tal que G é um (k, ℓ) -grafo como segue: para cada variável X_i associamos três vértices, $x_i, \bar{x}_i$, chamados de *vértices*

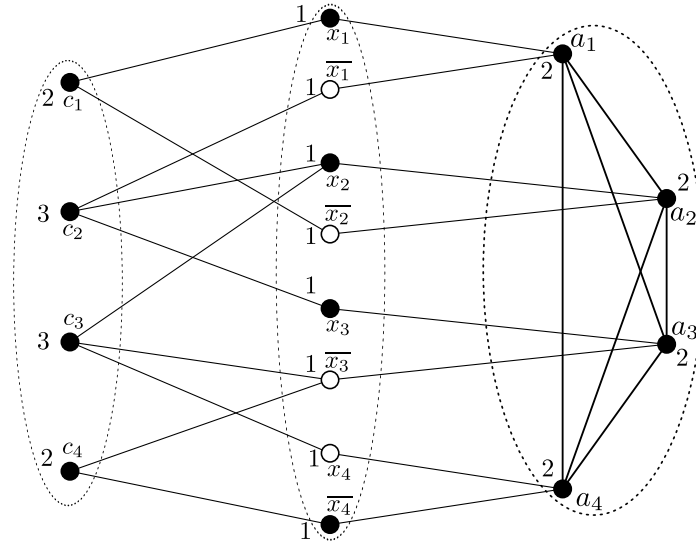


Figura 2: Uma atribuição satisfável com $r_f(G)$ vértices (pretos)
 a $F = (X_1 \vee \overline{X}_2) \wedge (\overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_3) \wedge (X_2 \vee \overline{X}_3 \vee X_4) \wedge (\overline{X}_3 \vee \overline{X}_4)$ na redução do Teorema 10.

literais, e a_i , chamado de vértice *auxiliar*, $i \in \{1, \dots, n\}$; associamos um vértice c_j , chamado de *vértice cláusula*, para cada cláusula C_j , $j \in \{1, \dots, m\}$; adicionamos uma aresta $x^i c_j$ se e somente se $X_i \in C_j$ em F , onde $x^i \in \{x_i, \overline{x}_i\}$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$; adicionamos arestas $x^i a_i$ e $\overline{x}_i a_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$; também adicionamos arestas entre cada par de vértices auxiliares, tal que tais vértices forma uma clique de G ; finalmente, associamos $f(x^i) = 1$, para todos os vértices literais $x^i \in \{x_i, \overline{x}_i\}$, $f(a_i) = 2$ para todos os vértices auxiliares a_i e $f(c_j) = d(v_j)$, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Podemos notar que G é um $(2, 1)$ -grafo com $m + 3n$ vértices, tal que os conjuntos de vértices cláusulas e literais induzem conjuntos independentes e o conjuntos de vértices auxiliares induzem uma clique em G . A Figura 2 apresenta um exemplo da construção. Mostramos que F é satisfável se e somente se $r_f(G) = m + 2n$, tal que todos os vértices cláusulas e auxiliares devem possuir estados iniciais iguais a 1 e o mesmo para exatamente um de cada par de literais x_i e $\overline{x}_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. A prova para este último fato é análoga à demonstração de [Lima et al., 2018] (Teorema 12). $\square$

4. Conclusão

Neste trabalho apresentamos os primeiros resultados sobre grafos densos com respeito ao problema de conversão mínima em processos reversíveis. Os próximos passos consistem em verificar algoritmos eficientes para caminhos e qualquer valores de limiar e estender tal resultado para árvores e grafos blocos com funções de limiar gerais.

Referências

- Adler, J. (1991). Bootstrap percolation. *Physica A*, 171:453–470.
- Allouche, J.-P., Courbage, M., e Skordev, G. (2001). Notes on cellular automata. *Complex Syst.*, 3: 213–244.
- Araújo, R. e Sampaio, R. (2023). Domination and convexity problems in the target set selection model. *Discret. Appl. Math.*, 330:14–23. ISSN 0166-218X.

- Bondy, J. A. e Murty, U. S. R. (2008). *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag London. ISBN 978-1-84628-969-9.
- Caro, Y. e Pepper, R. (2015). Dynamic approach to k -forcing. *Theory and Applications of Graphs*, 2(2):1–5. Available at: <http://digitalcommons.georgiasouthern.edu/tag/vol2/iss2/2>.
- Centeno, C. C., Dourado, M. C., Penso, L. D., Rautenbach, D., e Szwarcfiter, J. L. (2011). Irreversible conversion of graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 412(29):3693–3700.
- Chen, N. (2009). On the approximability of influence in social networks. *SIAM J. Discret. Math.*, 23:1400–1415.
- DeGroot, M. H. (1974). Reaching a consensus. *J. Am. Stat. Assoc.*, 69:167–182.
- Downey, R. G. e Fellows, M. R. (2012). *Parameterized complexity*. Springer Science & Business Media.
- Dreyer, P. A. e Roberts, F. S. (2009). Irreversible k -threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion. *Discret. Appl. Math.*, 157(7):1615–1627. ISSN 0166-218X.
- Garey, M. R. e Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA.
- Kempe, D., Kleinberg, J., e Tardos, E. (2003). Maximizing the spread of influence through a social network. In *Proc. of the Ninth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, KDD '03, p. 137–146, New York, NY, USA. ACM. ISBN 1-58113-737-0.
- Lima, C. V., Oliveira, L. I., Barbosa, V. C., Dourado, M. C., Protti, F., e Szwarcfiter, J. L. (2018). A computational study of f -reversible processes on graphs. *Discret. Appl. Math.*, 245:77–93.
- Papadimitriou, C. H. (1994). *Computational Complexity*. Addison Wesley Pub. Co.
- Peleg, D. (2002). Local majorities, coalitions and monopolies in graphs: a review. *Theor. Comput. Sci.*, 282(2):231–257. ISSN 0304-3975. {FUN} with Algorithms.