Precificação em Mercados Competitivos com Oferta Irrestrita

Heloisa Reis Leal
Universidade Federal Fluminense e Petrobras
Av. Gal. Milton Tavares de Souza, s/n, Praia Vermelha Boa Viagem Niterói - RJ
heloisareis@ic.uff.br

Yuri Abitbol de Menezes Frota
Universidade Federal Fluminense
Av. Gal. Milton Tavares de Souza, s/n, Praia Vermelha Boa Viagem Niterói - RJ
yuri@ic.uff.br

David Sotelo Pinheiro da Silva
Petrobras
R. General Canabarro, 500, Rio de Janeiro
david@petrobras.com.br

RESUMO

Precificação é uma das mais importantes atividades associadas à gestão financeira de uma empresa atuando em um ambiente de livre concorrência de preços. Para a maioria delas, melhorias na política de definição de preços resultam em uma forma rápida e eficiente de aumento em seus lucros auferidos. Neste contexto, este trabalho aborda o problema de ajuste simultâneo de preços em diversos pontos de venda pertencentes a um mesmo agente comercializador, visando a maximização de seu lucro em um ambiente de livre concorrência. Considera-se que o ambiente é composto por pontos de venda pertencentes a outros competidores, com preços pré-definidos, e por consumidores com demandas previamente mapeadas e inelásticas às configurações de preço. Assume-se ainda que os pontos de venda admitem oferta irrestrita do produto comercializado. O artigo traz a formulação matemática deste problema como um problema de programação linear inteira mista, a prova de que sua versão de decisão é $\mathcal{NP}$-Difícil, a implementação da formulação proposta, incluindo uma etapa de pré-processamento, e uma discussão sobre os resultados obtidos em experimentos computacionais conduzidos.

PALAVRAS-CHAVE. Precificação, Ajuste de Preços, Otimização Combinatória.

ABSTRACT

Pricing is one of the most important activities associated with the financial management of a company operating in an environment of free price competition. For most of them, improvements in pricing policy result in a quick and efficient way to increase their earned profits. In this context, this work addresses the problem of simultaneous price adjustment at different points of sale belonging to the same commercial agent, aiming at maximizing its profit in an environment of free competition. It is considered that the environment is composed of points of sale belonging to other competitors, with predefined prices, and by consumers with previously mapped demands that are inelastic to price settings. It is also assumed that the points of sale admit unrestricted supply of the marketed product. The article brings the mathematical formulation of this problem as a mixed integer linear programming problem, the proof that its decision version is $\mathcal{NP}$-Hard, the implementation of the proposed formulation, including a preprocessing stage, and a discussion about the results obtained through computational experiments conducted.

KEYWORDS. Pricing, Price Adjustment, Combinatorial Optimization.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

1. Introdução

Preço e precificação: o *preço de um produto* pode ser definido como o número de unidades monetárias que um consumidor deve dispor de modo a obter uma unidade do produto em questão. Uma *precificação*, por sua vez, é um processo de determinação do preço de um produto por um agente responsável pela venda do mesmo. [Simon e Fassnacht, 2019]. Segundo [Marn e Rosiello, 1992], a precificação é uma das mais importantes atividades associadas à gestão financeira de uma empresa atuando em um ambiente de livre concorrência de preços. Para a maioria delas, melhorias na política de definição de preços resultam em uma forma rápida e eficiente de aumento em seus lucros auferidos. São três as abordagens tradicionais usualmente utilizadas em estratégias de precificação, segundo [Phillips, 2021]: abordagens *baseadas em custo*, que calculam o preço de um produto como sendo seu custo acrescido de uma sobretaxa percentual; abordagens *baseadas em mercado*, que determinam os preços de um produto baseando-se nos preços oferecidos pelos concorrentes; e abordagens *baseadas em valor*, que estabelecem o preço considerando o valor que o produto ofertado representa para o cliente em questão. Cada abordagem tende a privilegiar um aspecto em detrimento de outros, conforme sumarizado na Tabela 1.

Abordagem	**Baseia-se em**	**Ignora**	**Área responsável**
Baseada em custo	Custo	Competição e Clientes	Finanças
Baseada em mercado	Competição	Custo e Clientes	Vendas
Baseada em valor	Clientes	Custo e Competição	Marketing

Tabela 1: Abordagens de Precificação [Phillips, 2021]

Objeto de estudo: o objeto de estudo deste trabalho é um problema de precificação de um produto em cada um dos pontos de venda pertencentes a uma mesma empresa (denominada *companhia*), a qual encontra-se inserida em um ambiente de livre competição. Este ambiente competitivo é composto por outras empresas (denominadas *concorrentes*), as quais, por suas vez, também possuem pontos de venda do produto em questão, para os quais considera-se que os preços encontram-se pré-estabelecidos. O presente problema trata, portanto, do ajuste de preços nos pontos de venda pertencentes à companhia, uma vez considerados os preços dos pontos de venda concorrentes. Ressalta-se ainda que o preço p_s em um ponto de venda s da companhia deve pertencer a um conjunto finito discreto $\{p_s \in \mathbb{N} \mid \underline{p_s} \leq p_s \leq \overline{p_s}\}$, onde $\underline{p_s}$ e $\overline{p_s}$ são limites inferiores e superiores para o preço de p_s, respectivamente, fornecidos na instância do problema. No ambiente competitivo considerado, enquanto as empresas são responsáveis pela venda do produto em questão, existe um mercado consumidor, representado por um conjunto de consumidores, os quais possuem interesse em adquirir o produto comercializado ao menor custo unitário de aquisição. Mais especificamente, assume-se que cada consumidor possui uma demanda pré-estabelecida (inelástica à precificação) a qual será totalmente atendida pelo ponto de venda que lhe oferecer o menor custo unitário de aquisição. Em particular, o custo unitário de aquisição de um produto ofertado em um ponto de venda, sob a ótica de um consumidor, é definido como a soma entre o preço do produto no polo de venda ofertante e o custo logístico unitário necessário para o atendimento do consumidor por parte do ponto de venda, sendo o custo logístico unitário pré-fornecido na instância do problema. Considera-se que a demanda de um consumidor é totalmente atendida pelo ponto de venda que lhe oferecer o menor custo unitário de aquisição pois assume-se, por simplificação, que as ofertas dos pontos de venda são ilimitadas. Ressalta-se que a premissa de oferta irrestrita é importante na definição do problema, pois remove a necessidade de representação de uma possível competição entre consumidores pela

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

oferta limitada de um ponto de venda que ofereça o menor custo unitário de aquisição para ambos. A função objetivo do problema analisado é a maximização do lucro total da companhia, o qual depende das demandas de cada um dos consumidores que decidem ser atendidos por algum dos pontos de venda da companhia, do preço estabelecido e do custo operacional associado em cada um de seus pontos de venda. Em particular, consideraremos que o custo operacional de um ponto de venda é uma função constante por partes, fornecida na instância do problema, a qual dependerá da quantidade total vendida pelo respectivo ponto de venda. O problema assim descrito pode ser classificado como um problema de otimização combinatória, uma vez que cada preço a ser definido pertence a um conjunto finito e discreto; sendo denotado, neste trabalho, como o problema de PRECIFICAÇÃO EM MERCADOS COMPETITIVOS COM OFERTA IRRESTRITA (PMCOI). Por fim, no que tange às abordagens de precificação tradicionais propostas por Phillips [2021], o PMCOI poderia ser classificado como uma abordagem mista baseada em custo e mercado, uma vez que custos logísticos e operacionais são considerados, assim como os preços de pontos de venda concorrentes.

Referências bibliográficas e contextualização: nas últimas décadas, problemas de precificação têm sido modelados como problemas de otimização combinatória sob diversas variações. Ressalta-se, por exemplo, o PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DE PREÇOS E LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES [Ahmadi-Javid et al., 2018], cujo objetivo é maximizar o lucro através de precificação e determinação da localização de novos pontos de venda; tratando-se de um problema característico de vários ramos da indústria, como serviços postais, sistemas de distribuição de frutas, couro, dentre outros produtos [Lin e Tian, 2023]. Outro exemplo relevante é o PROBLEMA DA PRECIFICAÇÃO EM REDES, muito estudado nos setores de transportes e telecomunicações, no qual um operador determina tarifas sobre um subconjunto de arestas sob sua responsabilidade e clientes selecionam o caminho de menor custo que conecte dois vértices de interesse com uma capacidade mínima necessária [Hoesel, 2008]. Nos últimos anos, com o avanço das tecnologias de venda em comércios eletrônicos, o PROBLEMA DA PRECIFICAÇÃO DINÂMICA tem despertado um grande interesse da comunidade científica, fazendo uso em abordagens híbridas baseadas em custo, mercado e valor para precificação em tempo real [Deksnyte e Lydeka, 2012]. Até onde nosso conhecimento permite afirmar, a variação mais próxima ao problema PMCOI encontra-se em [Plyasunov e Panin, 2013]. Nele, os autores estudam a precificação com o objetivo de maximizar o lucro de um produtor e minimizar o custo de consumidores, mas com algumas características diferentes em relação ao problema apresentado aqui. Em particular: os consumidores possuem um orçamento máximo definido, mas não têm demanda; não é considerado o custo operacional dos pontos de venda e a companhia não tem concorrentes ou faixas de preços para limitar a definição de preços nos pontos de venda.

Contribuições e organização: dentre as contribuições deste trabalho, destacamos a formalização do problema PMCOI e sua modelagem como um problema de programação linear inteira mista, a prova de que seu problema de decisão associado pertence à classe $\mathcal{NP}$-Difícil, a implementação de um método exato baseado na formulação apresentada, incluindo um método de pré-processamento, a criação de instâncias sintéticas de testes e a realização de experimentos computacionais para avaliar a performance da modelagem proposta. O artigo esta dividido da seguinte forma: na Seção 2, é introduzida a formulação matemática do PMCOI como um problema de programação linear inteira mista. Na Seção 3, é demonstrado que seu problema de decisão associado pertence à classe $\mathcal{NP}$-Difícil. Na Seção 4, são descritos: a criação das instâncias de teste, a implementação da formulação proposta, o algoritmo de pré-processamento empregado e os resultados dos experimentos computacionais. Por fim, conclusões e perspectivas de trabalhos futuros são apresentados na Seção 5.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

2. Formulação Matemática

A seguir, o problema PMCOI será formulado como um problema de programação linear inteira mista. Uma primeira observação a ser ressaltada é o fato do preço de cada um dos pontos de venda da companhia poder ser representado como uma variável contínua, embora seu domínio na definição original do problema seja representado por um conjunto finito de valores discretos. De fato, em contextos nos quais instâncias reais dos PMCOI puderam ser observadas, valores referentes a custos e preços são usualmente representados por números reais com determinado limite de quantidade de casas decimais. Em particular, verificamos que, na representação de parâmetros de uma instância do problema, a preservação de 2 casas decimais para os preços dos pontos de venda concorrentes, custos operacionais e logísticos e 4 casas decimais para demandas de consumidores são suficientes para garantia da precisão numérica desejada. Assumimos portanto que, uma vez multiplicados por uma potência de 10 adequada, todos os valores fornecidos como parâmetros de entrada são inteiros. A partir dessa premissa é possível demonstrar que, ainda que relaxe-se a restrição de integralidade dos preços dos pontos de venda da companhia, configurações de preços referentes a soluções ótimas do problema formulado sempre assumirão valores inteiros. As Tabelas 2 e 3 apresentam a notação usada na formulação:

Conjuntos e Parâmetros	**Descrição**
S	Conjunto de pontos de venda da companhia.
S^c	Conjunto de pontos de venda dos concorrentes.
$\mathbb{S} = (S \cup S^c)$	Conjunto de todos os pontos de venda.
B	Conjunto de consumidores.
L_s	Conjunto de intervalos $\{0, \ldots, \lvert L_s \rvert - 1\}$ do total de unidades vendidas pelo ponto de venda $s \in S$.
$\overline{u}_{sl}, \underline{u}_{sl}$	Máximo ($\overline{u}_{sl}$) e mínimo ($\underline{u}_{sl}$) de número de unidades vendidas no intervalo $l \in L_s$ pelo ponto de venda $s \in S$.
$\underline{p}_s, \overline{p}_s$	Limites inferiores ($\underline{p}_s$) e superiores ($\overline{p}_s$) para o preço do ponto de venda $s \in S$.
p^c_s	Preço do concorrente $s \in S^c$.
d_b	Demanda do consumidor $b \in B$.
c^{op}_{sl}	Custo operacional unitário do ponto de venda $s \in S$, no intervalo $l \in L_s$.
c^{lo}_{sb}	Custo logístico unitário incorrido no consumidor $b \in B$ quando compra uma unidade no ponto de venda $s \in \mathbb{S}$.

Tabela 2: Conjuntos e Parâmetros

Variáveis	**Descrição**
p_s	Variável contínua que indica o preço do ponto de venda $s \in \mathbb{S}$.
m_s	Variável contínua que indica a margem de lucro unitária do ponto de venda $s \in S$.
x_{sb}	Variável contínua que indica o lucro obtido pelo ponto de venda $s \in S$ com o consumidor $b \in B$.
w_{sl}	Variável binária que indica que o total de unidades vendidas pelo ponto de venda $s \in S$ está no intervalo $l \in L_s$.
y_{sb}	Variável binária que indica que o ponto de venda $s \in \mathbb{S}$ atende à demanda total de $b \in B$.

Tabela 3: Variáveis

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

Usando a notação apresentada, definimos a função objetivo do problema (1) como maximizar o lucro da companhia. As várias características que definem o problema são formuladas como suas restrições. As Restrições (2) definem que cada consumidor será atendido por apenas um ponto de venda. A margem de lucro unitária de um ponto de venda da companhia é definida nas Restrições (3), sendo dada pelo preço no ponto de venda decrescido de seu custo operacional unitário. As Restrições (4) definem os preços mínimos e máximos para cada ponto de venda da companhia, enquanto que as Restrições (5) definem os preços dos concorrentes. O lucro obtido pelo ponto de venda em relação a cada consumidor atendido encontra-se definido nas Restrições (6). As Restrições (7) garantem que cada consumidor irá comprar do ponto de venda mais barato (considerando preço e custo logístico), onde M é um valor grande o suficiente. Nesta Restrição, se $s \in S$ e $q \in S^c$, temos que α = 1, caso contrário α = 0. Isso garante que um comprador só compra de um ponto de venda da companhia se o seu preço acrescido do respectivo custo logístico for estritamente menor do que o preço do concorrente acrescido do respectivo custo logístico. Por fim, as Restrições (8) e (9) identificam o intervalo correto da quantidade de unidades vendida por cada ponto de venda. Segue-se, portanto, a formulação do PMCOI:

$$\max \sum_{s \in S} \sum_{b \in B} x_{sb} \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{s \in \mathbb{S}} y_{sb} = 1, \qquad \forall b \in B \tag{2}$$

$$p_s = m_s + \sum_{l \in L_s} c^{op}_{sl} w_{sl} \qquad \forall s \in S \tag{3}$$

$$\underline{p}_s \leq p_s \leq \overline{p}_s \qquad \forall s \in S \tag{4}$$

$$p_s = p^c_s, \qquad \forall s \in S^c \tag{5}$$

$$x_{sb} = (y_{sb} \cdot m_s) d_b, \qquad \forall s \in S, \forall b \in B \tag{6}$$

$$p_s + c^{lo}_{sb} - p_q - c^{lo}_{qb} + \alpha \leq (1 - y_{sb}) M, \qquad \forall s, q \in \mathbb{S}, \text{ tal que } s \neq q, \; \forall b \in B \tag{7}$$

$$\sum_{l \in L_s} w_{sl} = 1 \qquad \forall s \in S \tag{8}$$

$$w_{sl} \underline{u}_{sl} \leq \sum_{b \in B} y_{sb} d_b \leq (1 - w_{sl}) M + \overline{u}_{sl} \qquad \forall s \in S, \forall l \in L_s \tag{9}$$

Notemos que as Restrições (6) possuem multiplicação de variáveis, o que torna o modelo apresentado não-linear e dificulta sua solução. Com o objetivo de linearizar a formulação iremos substituir as Restrições (6) pelas equivalentes (e lineares) Restrições (10) e (11).

$$x_{sb} \leq (m_s)\, d_b \qquad \forall s \in S, \forall b \in B \tag{10}$$

$$x_{sb} \leq (y_{sb})\, d_b \overline{p}_s \qquad \forall s \in S, \forall b \in B \tag{11}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

3. $\mathcal{NP}$-Dificuldade de PMCOI

Nesta seção provaremos que o problema de decisão referente ao problema de otimização PRECIFICAÇÃO EM MERCADOS COMPETITIVOS COM OFERTA IRRESTRITA é $\mathcal{NP}$-Difícil. A redução será realizada a partir do problema CONJUNTO INDEPENDENTE (CI) Karp [1972]. Denotaremos a versão de decisão de PMCOI por PMCOI-D. Cabe ressaltar que, durante a demonstração, assumiremos que o custo operacional é uma função constante, e que é natural estender a prova de $\mathcal{NP}$-dificuldade apresentada para o caso mais geral. Apresentaremos agora as descrições dos problemas de decisão considerados e em seguida provaremos o principal teorema desta seção.

PRECIFICAÇÃO EM MERCADOS COMPETITIVOS COM OFERTA IRRESTRITA (PMCOI-D)

INSTÂNCIA: uma tupla $(S, S^c, B, \underline{p}, \overline{p}, p^c, d, c^{op}, c^{lo})$ e um inteiro positivo k, onde S é o conjunto de pontos de venda da companhia, S^c é o conjunto de concorrentes, B é o conjunto de consumidores, $\underline{p} : S \mapsto \mathbb{N}$ são limites inferiores nos preços dos pontos de venda da companhia, $\overline{p} : S \mapsto \mathbb{N}$ são limites superiores nos preços dos pontos de venda da companhia, $p^c : S^c \mapsto \mathbb{N}$ são os preços dos pontos de venda dos concorrentes, $d : B \mapsto \mathbb{N}$ são as demandas dos consumidores, $c^{op} : S \mapsto \mathbb{N}$ são os custos operacionais unitários dos pontos de venda da companhia e $c^{lo} : (\mathbb{S} \times B) \mapsto \mathbb{N}$ são os custos logísticos unitários incorridos quando o consumidor $b \in B$ é atendido do ponto de venda $s \in \mathbb{S}$, onde $\mathbb{S} = S \cup S^c$.

QUESTÃO: existe uma função de preços $p : S \mapsto \mathbb{N}$, com $\underline{p(s)} \leq p(s) \leq \overline{p(s)}$ para todo $s \in S$, tal que $\texttt{lucroTotal}(p) \geq k$?

CONJUNTO INDEPENDENTE (CI)

INSTÂNCIA: um grafo simples não direcionado $G = (V, E)$ e um inteiro positivo k.

QUESTÃO: existe um subconjunto de vértices $K \subseteq V$, com $|K| \geq k$, tal que para todos os pares de vértices $u, v \in K$ segue que $\{u, v\} \notin E$?

Teorema 3.1. *O problema* PMCOI-D *é fortemente $\mathcal{NP}$-Difícil.*

Demonstração. A redução será a partir do problema CI, o qual é fortemente $\mathcal{NP}$-Difícil. Primeiro, vamos descrever como converter uma instância $I = (V, E) \in$ CI em uma instância $I' = (S, S^c, B, \underline{p}, \overline{p}, p^c, d, c^{op}, c^{lo}) \in$ PMCOI-D. Para cada vértice $v \in V$, criamos um ponto de venda da companhia $s_v \in S$ e um consumidor $b_v \in B$. Para cada aresta $e \in E$, criamos um consumidor $b_e \in B$. Considere, sem perda de generalidade, que o conjunto S^c de pontos de venda concorrentes possuirá apenas um elemento, denotado por s^c. Limites inferiores dos preços dos pontos de venda da companhia serão iguais a 1 e seus limites superiores serão todos iguais a 2. Considere que o preço do ponto de venda concorrente será $2 - \epsilon$, onde $0 < \epsilon < 1$ é uma constante arbitrária. As demandas de todos os consumidores serão iguais a 1. Os custos operacionais de todos os pontos de venda serão iguais a zero. Finalmente, os custos logísticos serão definidos da seguinte forma:

(i) Para todo $v \in V$: $c^{lo}(s_v, b_v) = 0$.
(ii) Para todo $e = \{u, v\} \in E$: $c^{lo}(s_u, b_e) = c^{lo}(s_v, b_e) = 0$.
(iii) Para todo $e \in E$: $c^{lo}(s^c, b_e) = 0$, onde s^c é o ponto de venda concorrente.
(iv) Caso contrário, para todo ponto de venda $s \in \mathbb{S}$ e consumidor $b \in B$: $c^{lo}(s, b) = \infty$.

A partir deste ponto, considere que, dada uma instância I do problema CI , sua *instância correspondente* I' do PMCOI-D será construída seguindo o procedimento previamente descrito. Iremos provar agora que I admite uma solução K com $|K| \geq k$ se e somente se sua instância correspondente I' admitir uma função de preços p tal que $\texttt{lucroTotal}(p) \geq k'$, onde $k' = |V| + |E| + k$. Os lemas a seguir demonstrarão, respectivamente, necessidade e suficiência.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

Lema 3.1.1. *Se a instância I admite uma solução K com $|K| \geq k$ então sua instância correspondente I' admite uma função de preços p tal que* $\texttt{lucroTotal}(p) \geq |V| + |E| + k$.

Demonstração. Suponha a existência de uma solução K para instância I com $|K| \geq k$. A função de preço $p : S \mapsto \mathbb{Z}$ será construída da seguinte forma:

$$p(s_v) = \begin{cases} 2, & \forall v \in K \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Por definição, $\texttt{lucroTotal}(p) = \sum_{b \in B} \texttt{lucro}(p, b)$, onde:

$$\texttt{lucro}(p, b) = \begin{cases} d(b) * \big(p(s) - c^{op}(s)\big), & \text{se } s \in S \\ 0, & \text{se } s \in S^c \end{cases}$$

sendo s é o ponto de venda que atende à demanda do consumidor b , dados a função de preços p, os custos operacionais c^{op} e os custos logísticos c^{lo}. Utilizaremos a função $alpha : B \mapsto \mathbb{S}$ para identificar o ponto de venda $s \in \mathbb{S}$ que atende que à demanda do consumidor $b \in B$.

Para uma instância particular I' obtida para PMCOI-D após a conversão das instância I de CI, segue que $d(b) = 1$ para todo $b \in B$ e $c^{op}(s) = 0$ para todo $s \in \mathbb{S}$. Além disso, se s atende b então $c^{lo}(s, v) = 0$; caso contrário $c^{lo}(s, v) = \infty$ e existiria um outro ponto de venda $s' \in \mathbb{S}$ capaz de atender à demanda de b a um custo total menor. Portanto, a expressão $\texttt{lucroTotal}(p, b)$ poderia ser simplificada como:

$$\texttt{lucroTotal}(p) = \sum_{b \in B} \texttt{lucro}(p, b) = \sum_{b \in B | s = \alpha(b) \in \mathbb{S}} p(s)$$

Vamos analisar agora os possíveis preços para o ponto de venda $s = \alpha(b)$. Primeiro, recorde da construção da instância I' que $p(s) \in \{1, 2\}$ para todo $s \in S$. Além disso, o conjunto B de consumidores em I' pode ser decomposto em dois conjuntos disjuntos , os quais iremos denotar por B_v and B_e, correspondendo aos consumidores que originaram-se de vértices e arestas da instância I, respectivamente.

Um consumidor $b_v \in B_v$ pode ser atendido apenas pelo seu ponto de venda associado s_v, uma vez que o custo logístico que incorre no seu atendimento pelo ponto de venda concorrente ou por outro ponto de venda da companhia é proibitivamente alto (assumido ∞ por construção). Portanto:

$$\sum_{b_v \in B_v} \texttt{lucro}(p, b_v) = \sum_{b_v \in B_v} p(\alpha(b_v)) = \sum_{s_v \in S} p(s_v)$$

Dado que, por construção, os $|K|$ pontos de venda $s_v \in S$ terão $p(s_v) = 2$ e os restantes $|V| - |K|$ pontos de venda irão adotar $p(s_v) = 1$, temos que:

$$\sum_{b_v \in B_v} \texttt{lucro}(p, b_v) = \sum_{s_v \in S} p(s_v) = 2 \cdot |K| + 1 \cdot (|V| - |K|) = |V| + |K|$$

Por outro lado, um consumidor $b_e \in B_e$ originário de uma aresta $e = \{u, v\}$ da instância I, poderia ser atendido por exatamente um de seus pontos de venda associados, $s_u \in S$ ou $s_v \in S$, ou pelo único ponto de venda concorrente s^c. Em particular, uma vez que, por construção, $p(s^c) = 2 - \epsilon$, o consumidor b_e seria atendido por s^c somente no caso em que $p(s_u) = p(s_v) = 2$. Entretanto,

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

recorde que a função de preços p foi construída de tal forma que os pontos de venda com preço igual a 2 constituem um conjunto independente K. Portanto, pelo menos um entre s_u e s_v terá seu preço igual a um, o que implica que $\texttt{lucro}(p, b_e) = 1$ para todo $b_e \in B_e$. Logo:

$$\sum_{b_e \in B_e} \texttt{lucro}(p, b_e) = \sum_{b_e \in B_e} p(\alpha(b_e)) = \sum_{b_e \in B_e} 1 = |B_e| = |E|$$

O que finalmente nos leva a :

$$\texttt{lucroTotal}(p) = \sum_{b_v \in B_v} \texttt{lucro}(p, b_v) + \sum_{b_e \in B_e} \texttt{lucro}(p, b_e) = |V| + |E| + |K|$$

□

Lema 3.1.2. *Um instância I admite uma solução K com $|K| \geq k$ se sua instância correspondente I' admite uma função de preços p com* $\texttt{lucroTotal}(p) \geq |V| + |E| + k$.

Demonstração. Suponha a existência de uma função de preços p para a instância correspondente I' tal que $\texttt{lucroTotal}(p)$ honre a propriedade desejada. Provaremos primeiro que isto implica a existência de uma função de preços equivalente $p^\star$ para I' com $\texttt{lucroTotal}(p^\star) \geq \texttt{lucroTotal}(p)$, na qual cada consumidor $b_e \in B_e$ é atendido por um ponto de venda da companhia s, onde $p^\star(s) = 1$.

De fato, suponha que, para a função de preço p, existe pelo menos um consumidor $b_e \in B_e$ tal que $p(s_u) = p(s_v) = 2$, onde $e = \{u, v\} \in E$. Portanto, $\alpha(b_e) = s^c$ e $\texttt{lucro}(p, b_e) = 0$. Vamos construir agora uma função de preço alternativa $p^\star$, a qual é quase idêntica a p, exceto pelo fato de que $p^\star(s_u) = 1$ (o que seria equivalente a considerar $p^\star(s_v) = 1$). Iremos mostrar que $\texttt{lucroTotal}(p^\star) \geq \texttt{lucroTotal}(p)$.

Substituindo o preço de s_u de 2 para 1 podemos apenas afetar os lucros de dois tipos de consumidores: $\texttt{lucro}(b_u)$ iria decrescer de 2 para 1, para o único consumidor b_u associado ao ponto de venda s_u, e $\texttt{lucro}(b_e)$ iria crescer de 0 para 1, para todos consumidores b_e tal que $e = \{u, v\} \in E$ e $p(s_u) = p(s_v) = 2$. Uma vez que a função de preços p, como previamente descrita, garante a existência de pelo menos um consumidor b_e tal que $e = \{u, v\} \in E$ e $p(s_u) = p(s_v) = 2$, haveria pelo menos um consumidor $b_e \in B_e$ cujo lucro iria crescer de 0 a 1 e exatamente um consumidor $b_u \in B_u$ cujo lucro iria decrescer de 2 para 1 durante a substituição da função de preços p pela função de preços $p^\star$. Logo, a redução de $\texttt{lucro}(b_u)$ de 2 para 1 não diminui $\texttt{lucroTotal}$, o que implica que $\texttt{lucroTotal}(p^\star) \geq \texttt{lucroTotal}(p)$.

Portanto, de agora em diante, considere a existência de uma função de preços $p^\star$ na qual todo consumidor $b_e \in B_e$ é atendido por um ponto de venda da companhia $s \in S$ com $p^\star(s) = 1$ e tal que $\texttt{lucroTotal}(p^\star) \geq |V| + |E| + k$. Provaremos agora, por contradicção que isso implica a existência de pelo menos k pontos de venda da companhia cujos preços são 2 em p^*.

De fato, suponha por contradição que a afirmação é falsa ou, de forma equivalente, que $k' \leq k - 1$ pontos de venda da companhia assumem preço igual a 2 na função de preço p^*. Uma vez que, por construção de p^*, todo consumidor $b_e \in B_e$ é atendido por um ponto de venda s com $p^\star(s) = 1$, o lucro obtido junto aos consumidores pertencentes ao conjunto B_e seria:

$$\sum_{b_e \in B_e} \texttt{lucro}(p^*, b_e) = \sum_{b_e \in B_e} p^*(\alpha(b_e)) = \sum_{b_e \in B_e} 1 = |B_e| = |E|$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

Por completude, analisaremos o lucro obtido dos restantes dos consumidores, pertencentes a B_v:

$$\sum_{b_v \in B_v} \texttt{lucro}(p, b_v) = \sum_{b_v \in B_v} p(\alpha(b_v)) = 1 \cdot (|V| - k') + 2 \cdot k' = |V| + k'$$

Resumindo, o $\texttt{lucroTotal}(p^*)$ torna-se:

$$\texttt{lucroTotal}(p^*) = \sum_{b_v \in B_v} \texttt{lucro}(p^*, b_v) + \sum_{b_e \in B_e} \texttt{lucro}(p^*, b_e) = |V| + |E| + k'$$

Entretanto, o fato de que $k' \leq k - 1$ nos leva a $\texttt{lucroTotal}(p^*) \leq |V| + |E| + k - 1$, o que contradiz a premissa original de que $\texttt{lucroTotal}(p^*) \geq |V| + |E| + k$. Portanto, existem pelo menos $k' \geq k$ pontos de venda da companhia em p^* cujos preços são iguais a 2.

Finalmente, mostraremos como construir um conjunto independente para a instância original I a partir da função de preço p^* para a instância correspondente I'. Seja $K \subseteq V$ o subconjunto de vértices v de I para os quais $p^*(s_v) = 2$ em I'. Como na função de preços p^*, todo consumidor $b_e \in B_e$ é atendido por um ponto de venda da companhia $s \in S$ com $p^*(s) = 1$, não existe aresta $e = \{u, v\} \in E$ para a qual $p^*(s_u) = p^*(s_v) = 2$. Portanto, os vértices em K não compartilham aresta, formando um conjunto independente de tamanho $|K| \geq k$ na instância original I. □

□

4. Resultados

Nesta seção, serão descritos a criação das instâncias de teste, seu pré-processamento, a implementação do modelo proposto, a realização de experimentos computacionais e sua análise.

Instâncias: Para a geração de instâncias, consideramos cada município brasileiro como um consumidor. Temos 5569 municípios no território brasileiro, escolhemos subconjuntos aleatórios de 20, 100, 500, 1000, 3000 e 5569 consumidores dentre todos os municípios. Os pontos de venda foram escolhidos, também aleatoriamente, como subconjuntos de 10 e 30 municípios, para pontos de venda da companhia; e subconjuntos de 5 e 9 municípios, para concorrentes. Ao todo, foram geradas 24 instâncias de teste. Desta forma, reproduzimos o ambiente de livre concorrência onde um município pode comprar um produto qualquer em um ponto de venda localizado em qualquer município brasileiro. A demanda de cada consumidor foi inferida a partir da população de seu município, e os custos logísticos, a partir da distância de cada consumidor a cada ponto de venda. O preço máximo e mínimo de cada ponto de venda s, foi obtido a partir de um valor preço p_s, e uma média de variação deste preço, v_s, gerados aleatoriamente. O valor do preço mínimo de s é igual a p_s - v_s* p_s, e preço máximo é igual a p_s + v_s* p_s. Os custos operacionais das empresas variam com sua produção. Como nosso problema trata de oferta irrestrita, aproximamos, então, a produção máxima de todos os pontos de venda pela maior quantidade possível de vendas, $D_{max} = \sum_{b \in B} d_b$, que é igual a soma de todas as demandas de todos os consumidores. Dividimos o intervalo de zero a D_{max}, em subintervalos de igual tamanho. Para cada ponto de venda foi escolhido, aleatoriamente, um valor dentre 2 e 5 como a quantidade destes subintervalos. Criamos um função $f(s, l)$, constante por partes, que mapeia cada ponto de venda, $s \in S$, e subintervalo $l \in \{0 \cdots |L_s| - 1\}$, ao valor deste custo. O valor de $f(s, 1)$, custo do primeiro subintervalo, é o maior valor de custo operacional de s e foi obtido a partir de um percentual aleatório da média entre o preço máximo e mínimo de s. Os valores de custo dos próximos subintervalos são obtidos a partir um parâmetro λ, que é o percentual de quanto o custo cai a cada subintervalo. Portanto, o custo de $f(s, 2)$ = $f(s, 1)$ - $\lambda * f(s, 1)$; o custo de $f(s, 3)$ = $f(s, 1) - 2 * \lambda * f(s, 1)$, e assim por diante. As instâncias foram geradas com $\lambda = 0.1$.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

$\|S\|$	$\|S^c\|$	$\|B\|$	m	$\|S\|_{pre}$	$\|S^c\|_{pre}$	$\|B\|_{pre}$	m_{pre}
10	5	20	300	9	5	20	47
10	5	100	1500	10	5	100	278
10	5	500	7500	10	5	500	1283
10	5	1000	15000	10	5	1000	2201
10	5	3000	45000	10	5	3000	8371
10	5	5569	83535	10	5	5569	14018
10	9	20	380	9	9	20	51
10	9	100	1900	10	8	100	222
10	9	500	9500	10	9	500	1205
10	9	1000	19000	10	9	1000	2091
10	9	3000	57000	9	9	3000	7163
10	9	5569	105811	10	9	5569	14930
30	5	20	700	27	4	20	125
30	5	100	3500	30	5	100	498
30	5	500	17500	30	5	500	2764
30	5	1000	35000	29	5	1000	5106
30	5	3000	105000	30	5	3000	18871
30	5	5569	194915	30	5	5569	29911
30	9	20	780	25	5	20	101
30	9	100	3900	29	9	100	450
30	9	500	19500	30	9	500	2329
30	9	1000	39000	29	9	1000	4494
30	9	3000	117000	29	9	3000	14063
30	9	5569	217191	29	9	5569	23807

Tabela 4: Resultado do Pré-processamento.

Pré-processamento: Considere cada instância do problema PMCOI como um grafo bipartido $G = (\mathbb{S} \cup B, E)$ com partições de vértices $\mathbb{S}$ e B, onde $E = \{(b, s) \mid b \in B \text{ e } s \in \mathbb{S}\}$ representa a possibilidade de atendimento à demanda do consumidor $b \in B$ pelo ponto de venda $s \in \mathbb{S}$. Este grafo bipartido é a princípio completo, uma vez que os consumidores podem ser atendidos por qualquer ponto de venda. Nesse sentido, foi implementado um pré-processamento de instâncias com o objetivo de diminuir o número de arestas e até mesmo o número de vértices deste grafo. Vimos que cada ponto de venda da companhia determina seu preço dentro de uma faixa de preços (preço mínimo e preço máximo); o custo de aquisição unitário do consumidor é igual ao valor unitário do custo logístico mais o preço; e o consumidor compra do ponto de venda de menor custo de aquisição. Suponha que, para ganhar um consumidor $b \in B$, um ponto de venda $s \in \mathbb{S}$ coloque seu preço no valor mínimo, que é o melhor que ele pode fazer para ganhar este consumidor. Se existir um outro ponto de venda $q \in \mathbb{S}$ (diferente de s), que, colocando seu preço no seu limite máximo, proporcione a este consumidor b um menor custo de aquisição que s, então podemos concluir que o ponto de venda s nunca conseguirá vender para b, pois o vendedor q sempre oferecerá um custo menor que o dele. Note também que o vendedor s não pode mais baixar seu preço e q não pode aumentar o seu, porque ele está no máximo. Logo, notamos que s não conseguirá atender b, independente do preços estipulado por s. Portanto, esta aresta (b, s) será considerada dominada pela aresta (b, q), e poderá ser retirada do grafo. O pré-processamento consiste, então, em calcular todas estas arestas dominadas e retirá-las do grafo. Após esta remoção de arestas, se algum ponto de venda ficar sem arestas incidentes, poderá ser retirado da instância. A Tabela 4 contém os resultados do pré-processamento. Cada instância é identificada pelas suas quantidades de pontos de

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

venda da companhia ($|S|$), dos concorrentes ($|S^c|$) e consumidores ($|B|$). As 3 primeiras colunas identificam cada instância; a quarta coluna mostra o total inicial de arestas da instância (m). As 4 colunas seguintes trazem como ficaram estas quantidades após o pré-processamento: quantidades de pontos de venda da companhia ($|S|_{pre}$), de concorrentes ($|S^c|_{pre}$), e de consumidores ($|B|_{pre}$), e a quantidade de arestas (m_{pre}) que representam arestas viáveis após o pré-processamento.

Solução Exata: Os experimentos foram realizados em um computador com um processador 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7 com 2.40 GHz e 32,0 GB de RAM no Linux Ubuntu. As instâncias foram resolvidas usando um único *thread* e o CPLEX v12.10 como o *solver*. O tempo máximo de processamento foi 1 hora. A Tabela 5 mostra o resultado do processamento exato de cada instância. As três primeiras colunas contém a identificação da instância ($|S|$, $|S^c|$ e $|B|$), enquanto que a quarta coluna traz o valor final da função objetivo encontrado pelo processamento. Se for uma solução ótima, este valor estará em negrito. As colunas seguintes trazem, o tempo de processamento gasto em segundos (o símbolo "-" indica que o limite de tempo foi ultrapassado), a quantidade de nós usadas no processamento do método exato, e o valor do gap para a solução encontrada.

$\|S\|$	$\|S^c\|$	$\|B\|$	**Valor**	**Tempo**	**Nós**	**Gap**
10	5	20	**16349.00**	0.00	0	0.000000
10	5	100	**126263.00**	0.00	0	0.007650
10	5	500	**289013.00**	0.00	5	0.009586
10	5	1000	**278718.00**	1.00	0	0.000000
10	5	3000	**1723429.00**	67.00	2001	0.008886
10	5	5569	**1585486.00**	1676.00	74612	0.009999
10	9	20	**9216.00**	0.00	0	0.000000
10	9	100	**88038.00**	0.00	16	0.000000
10	9	500	**182055.00**	0.00	148	0.008789
10	9	1000	**638415.00**	3.00	443	0.006412
10	9	3000	**1328160.00**	5.00	0	0.000000
10	9	5569	**1633640.00**	82.00	0	0.000000
$\|S\|$	$\|S^c\|$	$\|B\|$	**Valor**	**Tempo**	**Nós**	**Gap**
30	5	20	**19255.00**	0.00	11	0.000000
30	5	100	**98865.00**	0.00	4503	0.009969
30	5	500	**375418.00**	6.00	437	0.009817
30	5	1000	1566028.00	-	69861	0.300351
30	5	3000	2278961.00	-	2095	3.361555
30	5	5569	3970105.00	-	4600	5.745969
30	9	20	**38088.00**	0.00	15	0.000000
30	9	100	**128869.00**	2.00	2377	0.009887
30	9	500	**283081.00**	7.00	1110	0.007032
30	9	1000	**2400637.00**	494.00	18476	0.009997
30	9	3000	1326995.00	-	96925	0.055091
30	9	5569	**2701591.00**	816.00	25805	0.009995

Tabela 5: Resultado do Modelo Matemático.

Análise dos resultados: Foram testadas 24 instâncias com diferentes números de consumidores e pontos de venda, conforme mostra a Tabela 5. Para 20 destas instâncias, a implementação do método exato obteve o valor ótimo em até 1h de processamento. Observamos que o número de

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167

consumidores influencia mais no tempo de processamento do que o número de pontos de venda, pois mesmo para instâncias com 35 pontos de venda e 1000 ou 3000 consumidores não alcançamos o valor ótimo. Para as 4 instâncias que o método não obteve o resultado ótimo, o método exato trouxe valores finais com gap de no máximo 5.74% e apenas em 2 instâncias o gap foi superior a 1%. Consideramos, portanto, que o método exato implementado permite a obtenção de soluções ótimas ou com valores próximos ao ótimo em instâncias de tamanhos similares aos explorados nos experimentos conduzidos.

5. Conclusão e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, formalizamos o problema PRECIFICAÇÃO EM MERCADOS COMPETITIVOS COM OFERTA IRRESTRITA (PMCOI), apresentamos sua modelagem como um problema de programação linear inteira mista e a a prova de que seu problema de decisão associado pertence à classe $\mathcal{NP}$-Difícil. Mostramos a implementação de um método exato baseado na formulação apresentada, incluindo um método de pré-processamento, a criação de instâncias sintéticas de testes e a realização de experimentos computacionais, com a avaliação da performance desta modelagem. A avaliação dos resultados permite afirmar que o método exato é uma boa opção para resolução do PMCOI em instâncias com os tamanhos considerados. Trazemos como sugestões para próximos trabalhos o desenvolvimento de heurísticas que permitam obter resultados próximos ao ótimo em tempos computacionalmente razoáveis, além da criação e análise de instâncias que agreguem consumidores ou pontos de venda por unidades federativas ou por regiões brasileiras.

Referências

Ahmadi-Javid, A. et al. (2018). A profit-maximization location-routing-pricing problem: A branch-and-price algorithm. *European Journal of Operational Research*, 271:866–881.

Deksnyte, I. e Lydeka, Z. (2012). Dynamic pricing and its forming factors. *International Journal of Business and Social Science*, 3:23.

Hoesel, S. v. (2008). An overview of stackelberg pricing in networks. *European Journal of Operational Research*, 189:393–1402.

Karp, R. M. (1972). Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations, 197*, p. 85–103.

Lin, Y. H. e Tian, Q. (2023). Facility location and pricing problem: Discretized mill price and exact algorithms. *European Journal of Operational Research*, 308:568–580.

Marn, M. e Rosiello, R. (1992). Managing price, gaining profit. *Harvard Business Review*, September/October:84–93.

Phillips, R. L. (2021). *Pricing and revenue optimization*. Stanford University Press.

Plyasunov, A. V. e Panin, A. A. (2013). The pricing problem part i: Exact and approximate algorithms. *J. Appl. Indust. Math.*, 7:241–251.

Simon, H. e Fassnacht, M. (2019). *Price Management*. Springer Nature.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175167
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175167