São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Estudando Composição de Carteiras de Investimento via Programação Matemática

Leon Victor Lima, Laura Silva de Assis, Diego Brandão
Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
R. Gen. Canabarro, 485 - Maracanã, Rio de Janeiro - RJ, 20271-204, Brasil
leon.lima@aluno.cefet-rj.br,
{laura.assis,diego.brandao}@cefet-rj.br

Israel Mendonça
Kumamoto University
2 Chome-39-1 Kurokami, Chuo Ward, Kumamoto, 860-0862, Japão
israel@cs.kumamoto-u.ac.jp

Pedro Henrique González
Universidade Federal do Rio de Janeiro
R. Antônio Barros de Castro, 119 - Cidade Universitária, Rio de Janeiro - RJ, 21941-853, Brasil
pegonzalez@cos.ufrj.br

RESUMO

Os mercados financeiros e de investimentos são cruciais para a economia. Na literatura existem diversas abordagens na busca pela composição de uma carteira diversificada de investimento. Contudo, muitas delas consideram implementar restrições sem limite de categorias de ativos limitando apenas ao total de ativos a escolher. Este trabalho apresenta uma nova formulação para a otimização de portfólio de objetivo único com restrições de cardinalidade com múltiplas categorias de ativos. Esta abordagem visa compor uma carteira de múltiplos ativos com um número fixo de três categorias de ativos distintas para minimização do risco, sendo utilizado dados históricos coletados dos índices financeiros do Brasil (BR) e dos Estados Unidos da América (EUA) nos anos de 2014 a 2021. Nos testes verificou-se o impacto das soluções encontradas no tempo computacional e qualidade, observando a volatilidade das carteiras, além de comparar seus resultados com os dos índices da Bovespa (BR), Nasdaq (EUA) e FTSE (EUA).

PALAVRAS CHAVE. Otimização de Portfólio, Diversificação, Múltiplas Categorias. Outras Aplicações em PO, Otimização Combinatória.

ABSTRACT

The Financial markets and investments are crucial to the economy. In the literature, many approaches search for diversified portfolio selection. However, many of them consider implementing restrictions with no limit on asset categories, limiting only the total number of assets to choose from. This work presents a new single objective portfolio optimization approach with cardinality constraints with multiple asset categories. This approach aims to compose a multiple-asset portfolio with a fixed number of three distinct asset categories to minimize the risk. We used historical

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

data collected from financial markets in Brazil (BR) and the United States of America (USA) from 2014 to 2021. In these instances, we observed the solution's impact on the computational time and quality. In addition, we make benchmarks with their results and those of the Bovespa (BR), Nasdaq (USA), and FTSE (USA) indexes.

KEYWORDS. Portfolio Optimization, Diversification, Multiple Categories. Other Applications in OR, Combinatorial Optimization.

1. Introdução

As recentes alterações na reforma da previdência brasileira em 2019, as quais modificaram as regras de aposentadoria e pensão, trouxeram incertezas para o futuro financeiro da população. Diante desse cenário, o planejamento financeiro tem se tornado fundamental. Nesse sentido, a diversificação na alocação de investimentos emerge como uma estratégia essencial para lidar com as incertezas econômicas e reduzir o risco. É importante ressaltar que os mercados financeiros desempenham um papel crucial nesse processo. Esses mercados englobam diversos locais onde ocorre a negociação de valores mobiliários, como o mercado de ações, títulos, câmbio, entre outros. Eles são vitais para o bom funcionamento da economia e oferecem oportunidades de retorno ao longo do tempo.

No mercado de ações, por exemplo, as empresas listam suas ações, as quais podem ser compradas e vendidas por investidores. Além disso, outra opção de investimento é o fundo de investimento imobiliário, conhecido como *Real Estate Investment Trust* (REIT). Os investidores podem adquirir ações desse fundo, que possui e administra uma coleção de propriedades imobiliárias ou hipotecas. Portanto, considerando as incertezas trazidas pelas alterações na Previdência, a diversificação na alocação de investimentos nos mercados financeiros se apresenta como uma estratégia eficaz para enfrentar os desafios econômicos.

Uma carteira de investimentos, também conhecida como portfólio, é composta por um conjunto de ativos negociáveis nos quais um investidor alocará seu capital. A otimização de portfólio desempenha um papel fundamental na gestão de ativos, buscando encontrar a combinação ideal de ativos que atenda às necessidades de um investidor. Nesse sentido, o investidor expressa suas preferências e restrições em relação ao risco e à taxa de retorno esperada.

A diversificação é uma medida importante para lidar com o risco associado a uma carteira, uma vez que diferentes tipos de riscos estão relacionados ao crescimento econômico, política e características específicas dos ativos. Uma estratégia tradicional para diversificação consiste em alocar na carteira de investimentos diferentes categorias de ativos, em vez de concentrar-se exclusivamente em uma única categoria. Dessa forma, a escolha de uma combinação favorável de ativos, com proporções adequadas, torna-se uma decisão crucial para gerenciar os riscos e buscar lucros.

O estudo pioneiro do Problema da Seleção de Portfólio (PSP) foi realizado por Markowitz em 1952 [Markowitz, 1952]. O objetivo do PSP é minimizar o risco de investimento para um determinado nível de retorno esperado, resultando na chamada fronteira eficiente irrestrita. Essa fronteira representa os pontos de menor risco que podem ser alcançados para um determinado nível de retorno esperado. Um princípio fundamental nesse contexto é a diversificação do portfólio, que se baseia na ideia de que o risco de um portfólio depende das correlações entre seus ativos constituintes, e não apenas do risco médio de cada participação isoladamente [Kolm et al., 2014]. Dessa forma, a diversificação permite reduzir o risco global do portfólio, mesmo quando alguns ativos individuais apresentem riscos mais elevados.

No entanto, uma das principais dificuldades computacionais associadas à resolução do Problema de Programação Quadrática está no tratamento de matrizes de covariância densas [Konno

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

e Yamazaki, 1991]. Com o intuito de buscar abordagens mais práticas para o modelo proposto por Markowitz [Markowitz, 1952], diversos outros modelos para a seleção de portfólios têm sido propostos na literatura. Alguns exemplos são: *i)* Semi-Variance (S-V)[Markowitz, 1959], *ii)* Variance with Skewness (VwS)[Samuelson, 1970], *iii)* Mean-Absolute Deviation (MAD)[Konno e Yamazaki, 1991], *iv)* Value-at-Risk (VaR)[Jorion, 1997], *v)* Minimax (MM)[Young, 1998], entre outros[Chagas, 2023].

Além disso, diversos autores têm procurado incorporar características mais realistas ao modelo original proposto por Markowitz [Markowitz, 1952]. Dentre as características estudadas incluí-se, a restrição do número de ativos na carteira (cardinalidade) e restrições de pré-atribuição que refletem as preferências do investidor. No entanto, devido à sua complexidade, ao considerar instâncias realistas, esse problema geralmente se torna NP-difícil [Panadero et al., 2020].

Considerando o cenário apresentado, este trabalho aborda o problema de otimização de portfólio com um único objetivo e restrições de múltiplas categorias de ativos. A proposta é desenvolver uma formulação que permita a construção de uma carteira ótima com base em um número fixo de três categorias de ativos distintas, visando minimizar o risco da carteira. A métrica utilizada para a minimização do risco é a correlação de Pearson.

O objetivo desta pesquisa é contribuir para a literatura por meio da formulação do Problema da Seleção de Portfólio (PSP) com a inclusão de categorias distintas de ativos, bem como compreender o tempo computacional e a qualidade das soluções encontradas, com foco na diversificação. Para isso, são utilizados dados históricos dos índices financeiros do Brasil (BR) e dos Estados Unidos da América (EUA) no período de 2014 a 2021. Além disso, é realizado um *benchmarking* dos resultados obtidos com os índices da Bovespa (BR), Nasdaq (EUA) e FTSE (EUA). Essa abordagem busca fornecer informações valiosas sobre a construção de carteiras de investimentos ótimas, levando em consideração múltiplas categorias de ativos e utilizando dados reais dos mercados financeiros do Brasil e dos Estados Unidos.

O restante deste trabalho está organizado como segue. A Seção 2 apresenta o modelo de Média-Variância de Markowitz. A Seção 3 descreve o modelos matemático proposto para o PSP em estudo. Os dados coletados e experimentos realizados são apresentados e discutidos na Seção 4. A Seção 5 apresenta as considerações finais sobre o trabalho realizado e aborda possíveis evoluções do mesmo.

2. Modelo Matemático de Média-Variância

O Problema de Otimização de Portfólio (POP) clássico, proposto por Markowitz [Markowitz, 1952], é um problema de um único objetivo que atende a um dos seguintes princípios: *i)* o investidor minimiza a exposição ao risco sujeito a um retorno mínimo esperado, ou *ii)* o investidor maximiza o retorno esperado para um dado nível de risco [Doering et al., 2016]. O modelo de Markowitz é descrito em sua forma canônica através do Modelo (1)-(4) [Di Tollo e Roli, 2008]:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}x_i x_j \tag{1}$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \geq R_p \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{3}$$

$$x_i \geq 0 \qquad\qquad i = 1, .., n, \tag{4}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

onde n é o número de ativos disponíveis, r_i é o retorno mínimo esperado do ativo i, R_p representa a expectativa de retorno mínimo do portfólio, σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j, e x_i representa a proporção do capital investido no ativo i. Conforme apresentado na função objetivo (1), o modelo de Markowitz é um problema de programação quadrática simples.

Uma crítica ao modelo de Média-Variância é que ele considera o retorno dos ativos como uma distribuição normal, o que raramente ocorre na prática [Chang et al., 2009]. Além disso, outra crítica é que o modelo pressupõe um mercado perfeito, ignorando custos e taxas [Pai e Michel, 2009].

3. Modelo Matemático Proposto

O modelo proposto neste trabalho apresenta algumas diferenças em relação aos modelos existentes na literatura. Em primeiro lugar, o objetivo deste modelo é avaliar a composição de um portfólio de investimentos visando a redução do risco, ou seja, o foco principal não é avaliar o retorno do portfólio, mas sim a minimização da sua volatilidade. Em segundo lugar, a composição de um portfólio diversificado é realizada considerando uma porcentagem mínima de ativos de diferentes categorias no portfólio, ou seja, o portfólio é obrigatoriamente composto por ativos de classes distintas.

Neste modelo, busca-se encontrar um portfólio onde a soma das correlações entre os ativos que o compõem seja a menor dentre todas as combinações possíveis no conjunto. Sua formulação matemática é descrita na Equação 5, em que s e $\overline{s}$ representam portfólios selecionados, $\rho_{i,j}$ é a correlação entre os ativos i e j, e S é o conjunto de soluções possíveis.

$$P = \left\{ s \in S | \sum_{i,j \in S} \rho_{ij} \leq \sum_{i,j \in \overline{S}} \rho_{ij}, \forall \overline{s} \neq s, \overline{s} \in S \right\} \tag{5}$$

3.1. Modelo de Programação Quadrática

O modelo proposto em 5, pode ser reformulado como um modelo de Programação Quadrática, como descrito a seguir:

$$\min \quad \sum_{i \in V} \sum_{j \in V | i<j} \rho_{ij} y_i y_j \tag{6}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in V(k)} y_i = C_k \qquad \forall\, k \in K, \tag{7}$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall\, i \in V. \tag{8}$$

O conjunto K representa cada conjunto de categorias distintas de ativos, e V é a união desses conjuntos distintos de ativos, ou seja, todos os ativos disponíveis. A variável ρ_{ij} representa a correlação entre os ativos i e j e retrata a medida de risco. Por sua vez, C_k indica o número de ativos de cada uma das diferentes categorias. A função objetivo (6) seleciona os ativos que possuem a menor correlação para a carteira, minimizando assim o risco do portfólio.

A família de Restrições (7) limita a quantidade máxima de ativos que devem ser inseridos de cada uma das diferentes categorias, garantindo que o somatório de cada categoria dos ativos escolhidos (y_i) seja limitado pelo tamanho de cada "subcarteira" da categoria de ativos (C_k). Já as Restrições (8) definem a variável binária y_i, que possui valor igual a um para indicar se o ativo i foi selecionado para o portfólio e 0 caso contrário.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

3.2. Modelo de Programação Linear Inteira

O modelo proposto, apresentado anteriormente nas definições **??** a 8, pode ser reformulado em um modelo de Programação Linear Inteira através de uma linearização simples. A formulação é descrita a seguir:

$$\min \quad \sum_{i \in V} \sum_{j \in V | i<j} \rho_{ij} z_{ij} \tag{9}$$

$$\text{s.a.} \quad \sum_{i \in V(k)} y_i = C_k \qquad \forall k \in K, \tag{10}$$

$$z_{ij} \leq y_i \qquad \forall i, j \in V | i \neq j, \tag{11}$$

$$z_{ij} \leq y_j \qquad \forall i, j \in V | i \neq j, \tag{12}$$

$$z_{ij} \geq y_i + y_j - 1 \qquad \forall i, j \in V | i \neq j, \tag{13}$$

$$y_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in V, \tag{14}$$

$$z_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i, j \in V. \tag{15}$$

O conjunto K representa cada conjunto de categorias distintas de ativos, e V é o conjunto de todos os ativos disponíveis. A função objetivo (9) minimiza o risco da carteira, onde $\rho_{i,j}$ define a correlação entre os ativos i e j, e z_{ij} é uma variável binária com valor igual a 1 para indicar se os ativos i e j foram selecionados e 0 caso contrário.

A restrição (10) garante que a soma da quantidade de ativos selecionados y_i seja igual ao tamanho de sua respectiva "subcarteira" C_k. Portanto, C_k define o tamanho da k-ésima "subcarteira" e, consequentemente, o tamanho total do portfólio.

As variáveis z_{ij} são limitadas pelas variáveis y_i e y_j introduzidas no modelo em **??** a 8. Se os ativos i e j forem escolhidos para a carteira, as restrições (11) a (13) garantem que seu valor seja um ($z_{ij} = 1$). Caso apenas um dos ativos seja escolhido, o valor será zero ($z_{ij} = 0$). Sendo assim, as restrições (11)– (13) relacionam o valor de z_{ij} às variáveis binárias y_i e y_j.

Por fim, as Restrições (14) e (15) definem que z_{ij} e y_i são variáveis binárias.

4. Experimentos Computacionais

Esta seção é dividida em várias subseções, cada uma abordando aspectos específicos dos experimentos realizados. Na Subseção 4.1 são apresentadas as instâncias utilizadas para a realização dos experimentos computacionais. Já na Subseção 4.2 é descrito o protocolo experimental. Na Subseção 4.3, são apresentados os resultados obtidos pelos modelos quadrático e linear. A Subseção 4.4 analisa a volatilidade das carteiras ótimas selecionadas nos experimentos. Por último, a Subseção 4.5 aborda os retornos das carteiras ótimas selecionadas.

.

4.1. Instâncias

Para avaliar o desempenho dos modelos propostos, utilizamos conjuntos de dados financeiros históricos de três tipos de ativos: *i)* ações brasileiras, *ii)* ações americanas, e *iii)* REITs americanos. Coletamos os dados considerando as cotações diárias fechadas obtidas através da biblioteca "*Yahoo Finance*" em Python.

Os conjuntos de dados foram coletados dos seguintes mercados financeiros: NASDAQ (Estados Unidos da América) e B3 (Brasil). Os dados foram coletados para o período de 2014 a 2021. Os dados dos anos de 2014 a 2017 foram utilizados para realizar os experimentos, ou seja,

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

para a seleção da carteira, enquanto os dados dos anos de 2018 a 2021 foram utilizados para avaliar o desempenho das carteiras selecionadas.

Além dos dados individuais de cada ativo, também coletamos os índices correspondentes: Nasdaq Composite (EUA), FTSE Nareit All REITs Index (EUA) e Bovespa (BR), nos anos de 2018 a 2021. Esses índices foram utilizados para fins de comparação com as soluções geradas pelos modelos propostos.

A correlação de Pearson foi calculada para os dados de treino por meio da matriz de retorno das ações, calculada pela diferença da variação do preço ação no instante t e o preço da ação em $t-1$, divido pelo preço no instante $t-1$.

4.2. Experimentos

Os experimentos computacionais foram realizados utilizando a linguagem de programação Python (versão 3.8.8). Todos os testes foram executados utilizando o *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio* versão 20.1.0 em um computador com as seguintes configurações: processador Intel Core i5 de 2,30 GHz, memória RAM de 8 GB e sistema operacional Windows 10 de 64 bits.

A Tabela 1 apresenta um resumo dos testes realizados. A coluna 1 indica a divisão das instâncias dos testes, enquanto as colunas 2 a 4 mostram a quantidade de ativos disponíveis em cada categoria. A coluna 5 exibe a disponibilidade total de ativos, e a coluna 06 mostra a quantidade de ativos a serem selecionados para cada instância.

É importante observar que a quantidade de ativos disponíveis coletados através da biblioteca "*Yahoo Finance*" é maior do que a quantidade disponibilizada para a execução dos experimentos. Portanto, foi realizada uma seleção aleatória proporcional para cada categoria de ativo, a fim de escolher os ativos que fariam parte dos experimentos. Tal seleção se fez necessária porque, considerando os modelos propostos, a disponibilidade de uma grande quantidade de ativos impossibilitaria encontrar soluções ótimas, dificultando a avaliação de sua qualidade pelos modelos propostos.

Tabela 1: Guia dos experimentos.

Testes	Ações (EUA)	REITs (EUA)	Ações (BR)	Total disponíveis	Ativos para selecionar
01 - 03	05	05	05	15	03, 06, 12
04 - 08	10	10	10	30	03, 06, 12, 18, 24
09 - 14	20	20	20	60	03, 06, 12, 18, 24, 30
15 - 20	25	25	25	75	03, 06, 12, 18, 24, 30
21 - 26	30	30	30	90	03, 06, 12, 18, 24, 30
27 - 32	40	40	40	120	03, 06, 12, 18, 24, 30
33 - 38	50	50	50	150	03, 06, 12, 18, 24, 30

A Tabela 1 apresenta os diferentes testes realizados. Os testes foram divididos em faixas numeradas de 01 a 38. Cada teste foi caracterizado pela quantidade de ativos disponíveis em cada categoria (ações dos EUA, REITs dos EUA e ações do Brasil). A coluna "Total disponíveis" indica a quantidade total de ativos disponíveis considerando todas as categorias, enquanto a coluna "Ativos para selecionar" indica a quantidade de ativos a serem selecionados em cada instância de teste. Por exemplo, no Teste 01, foram selecionados 3 ativos, sendo 1 ativo de cada categoria. Já no Teste 02, foram selecionados 6 ativos, sendo 2 de cada categoria. Os demais experimentos seguem a mesma lógica e, assim, a quantidade total de ativos a serem selecionados na carteira é a soma das subcarteiras de cada categoria.

4.3. Resultados Computacionais

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos pelos modelos quadrático e linear. A coluna 1 indica as instâncias executadas, totalizando 38. As colunas 2 a 4 mostram o custo, o *gap* (diferença

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

em relação à solução ótima) e o tempo de execução em segundos para as soluções encontradas pelo modelo quadrático em cada instância. As colunas 5 a 7 exibem os mesmos valores para o modelo linear. A coluna 8 indica se a carteira escolhida pelos modelos quadrático e linear é a mesma.

A Tabela 3 exibe os resultados calculados para o retorno e volatilidade de cada instância, bem como as soluções ótimas encontradas. O retorno dos portfólios é calculado como a soma das variações percentuais dos preços (rendimento), enquanto a volatilidade é medida como o desvio padrão dos retornos dos portfólios gerados para cada instância.

Na Tabela 2, pode-se observar que o modelo quadrático encontrou soluções ótimas e provou suas otimalidades em aproximadamente 65% das instâncias executadas (25 instâncias de 38). Por outro lado, o modelo linear foi capaz de encontrar e provar a otimalidade em apenas aproximadamente 45% das instâncias. Em relação ao tempo de execução, o modelo quadrático concluiu sua execução sem atingir o limite de tempo de 3 horas (ou 1.800 segundos) em 25 instâncias, representando cerca de 66% delas. Por outro lado, o modelo linear atingiu o limite de tempo em aproximadamente 55% das instâncias (21 instâncias).

A Figura 1 apresenta uma comparação entre o custo, *gap* e tempo de execução dos modelos quadrático e linear. É possível observar que, em termos de *gap*, o modelo quadrático superou o linear. No entanto, analisando mais detalhadamente o custo, pode-se verificar que as soluções encontradas pelo modelo linear foram tão boas quanto as do modelo quadrático, devido à proximidade dos valores de custo. Em relação ao tempo de execução, a influência do limite de tempo de 3 horas (1.800 segundos) foi evidente em ambos os modelos (Figura 1), mas observando a Tabela 1, vemos que o modelo linear atingiu o limite de tempo em mais experimentos que o modelo quadrático.

Em relação ao *gap* (Figura 1 e a Tabela 1), o modelo quadrático obteve um *gap* máximo em torno de 60%, enquanto o modelo linear ultrapassou esse valor em mais de 50% das execuções, chegando a obter um *gap* superior a 1.000% em alguns casos.

Em termos de tempo de execução, o modelo linear teve uma média de 6,251 segundos, enquanto o modelo quadrático teve um tempo médio de execução de cerca de 3,873 segundos, ou seja, aproximadamente 40% mais rápido que o modelo linear.

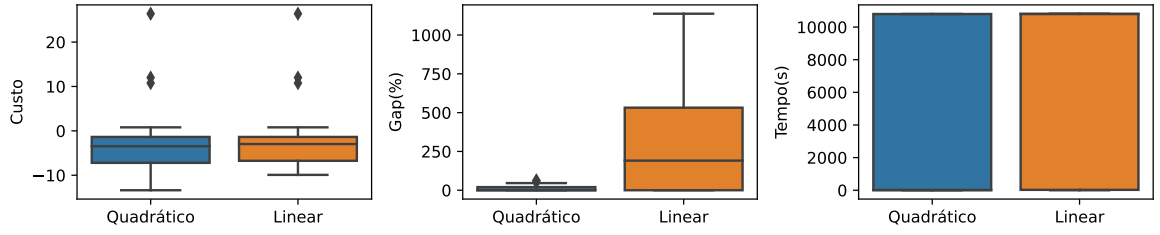

Figura 1: Comparações dos modelos quadrático e linear.

4.4. Volatilidade

A Figura 2 apresenta a volatilidade das carteiras ótimas selecionadas nos experimentos. Ao analisar a figura, pode-se observar que algumas carteiras selecionadas foram mais voláteis do que todas as carteiras de referência (*benchmark*). No entanto, quando consideramos apenas a volatilidade do índice Bovespa, constatamos que apenas 28% das carteiras ótimas selecionadas apresentaram uma volatilidade maior que a do índice. Essas instâncias são: 01, 02, 04, 09, 10, 15 e 16. Por outro lado, ao realizar a mesma análise para os índices Nasdaq e FTSE, encontramos um valor mais alto, com 88% das carteiras selecionadas apresentando maior volatilidade em relação a ambos os índices.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

Tabela 2: Resultados dos experimentos.

	Quadrático			Linear			
Instâncias	Custo	Gap(%)	tempo(s)	Custo	Gap (%)	tempo(s)	Portfólio Iguais
1	-0,99	0	0,03	-0,99	0	0,06	X
2	-0,74	0	0,13	-0,74	0	0,22	X
3	12,01	0	0,02	12,01	0	0,05	X
4	-1,16	0	0,06	-1,16	0	0,55	X
5	-2,62	0	0,05	-2,62	0	2,70	X
6	-4,17	0	0,05	-4,17	0	3,81	X
7	0,79	0	0,05	0,79	0	1,27	X
8	26,39	0	0,02	26,39	0	0,48	X
9	-1,25	0	0,28	-1,25	0	6,88	X
10	-2,72	0	1,33	-2,72	0	420,69	X
11	-5,05	0	3,73	-5,05	106	10813,80	X
12	-5,95	0	1,59	-5,50	202	10818,30	
13	-3,11	0	0,13	-3,07	375	10802,60	
14	10,77	0	0,47	10,77	0	3576,11	X
15	-1,25	0	0,50	-1,25	0	17,16	X
16	-2,73	0	5,05	-2,73	0	1466,66	X
17	-5,22	0	131,03	-5,17	179	10818,70	
18	-7,07	0	55,09	-6,76	394	10812,70	
19	-7,25	0	3,44	-6,71	448	10807,60	
20	-3,82	0	0,30	-2,79	989	10800,20	
21	-1,37	0	1,13	-1,37	0	42,47	X
22	-2,82	0	31,61	-2,82	0	4408,55	X
23	-5,60	16	10801,90	-5,58	278	10812,40	
24	-8,16	22	10800,10	-7,68	461	10808,60	
25	-10,15	16	10800,20	-9,55	556	10810,50	
26	-11,08	3	10800,10	-7,87	903	10807,50	
27	-1,38	0	49,81	-1,38	0	161,42	X
28	-2,88	0	6377,61	-2,87	208	10808,30	
29	-5,72	42	10801,80	-5,16	707	10806,60	
30	-8,44	46	10800,20	-7,58	836	10809,20	
31	-10,91	40	10800,20	-9,69	901	10808,20	
32	-12,88	32	10800,20	-9,92	1137	10802,20	
33	-1,38	0	107,80	-1,38	0	455,16	X
34	-2,89	23	10800,20	-2,80	1036	10815,60	
35	-5,72	62	10800,30	-5,58	278	10812,40	
36	-8,48	61	10800,30	-7,68	461	10808,60	
37	-11,11	51	10800,20	-9,55	556	10810,50	
38	-13,38	45	10800,20	-7,87	903	10807,50	

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

Tabela 3: Retorno e volatilidade.

Índice/Inst	Retorno (%)	Volat. no Período (%)	Índice/Inst	Retorno (%)	Volat. Período (%)
Nasdaq	92%	24%	Inst. 12	60%	25%
FTSE	48%	25%	Inst. 13	38%	26%
Bovespa	46%	29%	Inst. 14	40%	27%
Inst. 1	65%	34%	Inst. 15	34%	35%
Inst. 2	39%	32%	Inst. 16	24%	33%
Inst. 3	60%	24%	Inst. 17	38%	28%
Inst. 4	41%	34%	Inst. 18	40%	27%
Inst. 5	44%	27%	Inst. 19	41%	25%
Inst. 6	35%	26%	Inst. 20	48%	25%
Inst. 7	60%	23%	Inst. 21	66%	27%
Inst. 8	52%	23%	Inst. 22	76%	26%
Inst. 9	34%	35%	Inst. 27	85%	28%
Inst. 10	44%	32%	Inst. 28	37%	25%
Inst. 11	63%	27%	Inst. 33	85%	28%

Além disso, é interessante observar que em 12% das instâncias onde soluções ótimas foram obtidas, o método obteve resultados com volatilidade inferior à dos índices, ou seja, obteve um resultado com menor risco em comparação com as carteiras de referência. Essas instâncias específicas (instâncias 03, 07 e 08) também apresentaram a menor volatilidade em todos os portfólios e índices avaliados, sendo que a instância 08 foi a de menor risco em todo o experimento. Isso mostra que o modelo proposto é capaz de fornecer soluções de qualidade por meio da seleção de múltiplos ativos.

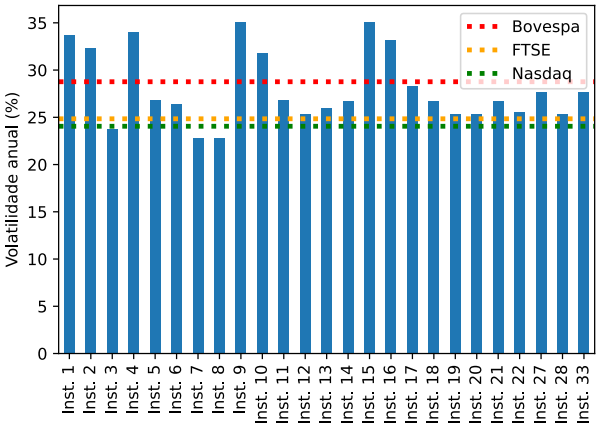

Figura 2: Volatilidade anual.

4.5. Retorno

Embora não seja o objetivo principal do modelo proposto, os retornos das carteiras ótimas selecionadas são exibidos na Figura 3. Ao analisar os resultados, observamos que o índice Nasdaq obteve um retorno de 92%, superando todas as carteiras geradas pelo método proposto. No entanto, as instâncias 27 e 33 apresentaram retornos de 85%, ou seja, próximos ao retorno do índice Nasdaq.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

Quando analisamos em conjunto os índices FTSE e Bovespa, 10 carteiras (40% do total de instâncias) obtiveram retornos superiores a eles. Por fim, comparando apenas com o índice brasileiro, 44% das carteiras (instâncias 01, 03, 07, 08, 11, 12, 20, 21, 22, 27, 33) superaram o índice em retorno, e 40% (instâncias 03, 07, 08, 11, 12, 20, 21, 22, 27, 33) superaram tanto em retorno quanto em volatilidade. Esses resultados também contribuem para demonstrar a qualidade das soluções não apenas em termos de volatilidade.

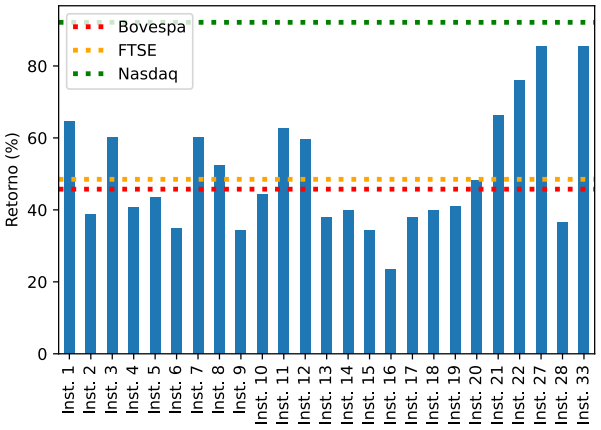

Figura 3: Retorno (%).

5. Conclusões e Trabalhos Futuros

Os resultados obtidos validaram o modelo proposto de diversificação da carteira de investimentos com múltiplos ativos. Em termos de resultados, o modelo de programação quadrática superou a abordagem linear em termos da qualidade da solução encontrada e do tempo computacional gasto. Em relação à qualidade das soluções encontradas, para as instâncias com mais ativos disponíveis para seleção, o modelo de programação quadrática apresentou um desempenho superior ao linear, com melhores médias de tempo de execução e gap.

Em relação à volatilidade, as carteiras selecionadas obtiveram resultados promissores, com três instâncias apresentando volatilidade menores em relação aos índices utilizados como referência. Além disso, a maior parte da carteira ótima escolhida pelo método atingiu volatilidades próximas aos índices da *FTSE* e Bovespa. Analisando o retorno, nehnuma carteira superou o índice da *Nasdaq*. Contudo, obtivemos carteiras que desempenharam melhores que os índices *FTSE* e Bovespa.

Embora os resultados neste trabalho não tenham sido implementados em grande quantidade de testes, resultados preliminares mostram a capacidade de tal modelo. Contudo, alguns ajustes necessários podem oferecer um grau de aplicabilidade mais ampla e melhor, como por exemplo: adição de restrições de retorno mínimo e a quantidade de capital a ser alocada, e compreensão do impacto destas restrições pode contribuir muito para a usabilidade do método proposto.

O método apresentado neste trabalho obteve resultados preliminares promissores, entretanto, a fim que torne se mais próximo de uma aplicação prática, algumas sugestões de trabalho futuro são:

1. Utilizar diferentes métricas de avaliação do risco do portfólio;

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146

2. Incluir restição de retorno e/ou volatilidade mínima;
3. Efetuar a escolha dos ativos disponíveis mais cuidadosamente, utilizando critérios como os dos índices de *benchmarking*;
4. Considerar portóflios diferentes e pesos na carteira
5. Aplicar algoritmos metaheurísticos para avaliar a qualidade das soluções e explorar um conjunto maior de ativos disponíveis para solução.

Referências

Chagas, E. d. C. (2023). Modelo de otimização de portfólios restrito: um modelo para custos para b3 e um estudo do impacto das restrições de cardinalidade e fronteira.

Chang, T.-J., Yang, S.-C., e Chang, K.-J. (2009). Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with applications*, 36(7):10529–10537.

Di Tollo, G. e Roli, A. (2008). Metaheuristics for the portfolio selection problem. *International Journal of Operations Research*, 5(1):13–35.

Doering, J., Juan, A. A., Kizys, R., Fito, A., e Calvet, L. (2016). Solving realistic portfolio optimization problems via metaheuristics: A survey and an example. In *International Conference on Modeling and Simulation in Engineering, Economics and Management*, p. 22–30. Springer.

Jorion, P. (1997). Value at risk: the new benchmark for controlling market risk. *(No Title)*.

Kolm, P. N., Tütüncü, R., e Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2):356–371. ISSN 0377-2217. URL `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221713008898`. 60 years following Harry Markowitz's contribution to portfolio theory and operations research.

Konno, H. e Yamazaki, H. (1991). Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to tokyo stock market. *Management science*, 37(5):519–531.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection in the journal of finance vol. 7.

Markowitz, H. M. (1959). Portfolio selection: E cient diversification of investments. *Cowles Foundation Monograph*, 16.

Pai, G. V. e Michel, T. (2009). Evolutionary optimization of constrained k-means clustered assets for diversification in small portfolios. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 13(5): 1030–1053.

Panadero, J., Doering, J., Kizys, R., Juan, A. A., e Fito, A. (2020). A variable neighborhood search simheuristic for project portfolio selection under uncertainty. *Journal of Heuristics*, 26(3):353–375.

Samuelson, P. A. (1970). The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances and higher moments. *The Review of Economic Studies*, 37(4):537–542.

Young, M. R. (1998). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management science*, 44(5):673–683.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175146
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175146