São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Uma teoria de globalização de métodos de Restauração Inexata com uso de Programação Quadrática Sequencial*

Thiago Siqueira Santos
Instituto Federal de São Paulo
Rua Monsenhor José Vita, 280, Campos do Jordão - SP
thiago.siqueira@ifsp.edu.br

Dimary Moreno / Luís Felipe Bueno / Thadeu Alves Senne
Universidade Federal de São Paulo
Avenida Cesare Mansueto Giulio Lattes, 1201, São José dos Campos - SP
dimarydelcmoreno@gmail.com/lfelipebueno@gmail.com/tsenne@gmail.com

Tiara Martini dos Santos
Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 - Vila das Acacias, São José dos Campos - SP
tiaramartini@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho, identificamos algumas condições muito gerais que garantem a convergência global de métodos numéricos para resolver problemas de otimização não linear com restrições. Com isso em mente, mostramos que uma variedade de métodos de Restauração Inexata se encaixam no *framework* apresentado. Além disso, propomos um algoritmo SQP específico nessa linha, combinado com um processo de aceleração suportado pela teoria geral de convergência.

PALAVRAS CHAVE. Restauração Inexata, Otimização não linear, Programação Quadrática Sequencial.

Programação Matemática, Outras aplicações em PO, Otimização não linear.

ABSTRACT

In this work we identify some very general conditions that guarantee the global convergence of numerical methods to solve constrained nonlinear optimization problems. With that in mind, we show that a range of Inexact Restoration methods fit the presented framework. Furthermore, we propose a particular SQP algorithm in this line, combined with an acceleration process supported by the general theory of convergence.

KEYWORDS. Inexact Restoration, Nonlinear Optimization, Sequential Quadratic Programming.

Mathematical programming, Other applications in OR, Non-linear optimization.

*Apoio FAPESP - 2021/14011-0

1. Introdução

Uma infinidade de aplicações podem ser modeladas como problemas de otimização, nas quais busca-se minimizar ou maximizar um certo objetivo, respeitando algumas condições específicas. Uma formulação adequada de uma situação como um problema de otimização permite que o tomador de decisão faça melhores escolhas e por isso cada vez mais está sendo empregada em diversas áreas do conhecimento. A teoria acerca deste tema é riquíssima e todos os dias novos resultados são obtidos sobre o assunto. Muito dos trabalhos focam nas propriedades matemáticas do problema de otimização e enquanto outros se dedicam ao desenvolvimento de métodos computacionais para obter soluções dos mesmos. Embora seja um tema extremamente estudado, não há uma técnica universalmente aceita como a melhor para resolver problemas de otimização independente de sua formulação. A maioria dos algoritmos para resolver problemas de otimização é iterativo, partindo de uma ou mais estimativas iniciais de solução e gerando novas aproximações que espera-se ser de melhor qualidade do que as anteriores.

Muitos dos métodos para encontrar soluções são específicos para um problema de interesse enquanto outros podem ser aplicados para uma gama maior de problemas, geralmente não tão eficientes quando algo desenvolvido especificamente para um problema em questão. Dentre os trabalhos que se dedicam a métodos de solução, podemos dividi-los em dois grupos: os que tem uma sólida teoria de convergência e os que não possuem, geralmente baseados em escolhas empíricas na busca de aproximações da solução. Para os casos com maior suporte teórico, a análise dos algoritmos pode ou não depender de uma escolha de ponto inicial relativamente próxima de uma solução. No caso da dependência do ponto inicial dizemos que o método tem convergência local, enquanto no caso contrário dizemos que a convergência é global.

Neste trabalho estamos interessados em identificar alguns elementos básicos que podem assegurar a convergência global de algoritmos para problemas suaves gerais de otimização contínua. Desta maneira, abrimos a possibilidade de enquadrar várias propostas específicas dentro do arcabouço teórico que garante boas propriedades de convergência. Com isso é possível não só ter uma teoria de convergência unificada para vários métodos para problemas gerais de otimização, mas também agregar estratégias específicas para problemas particulares, que muitas vezes não possuem teoria bem estabelecida. Como delimitação do escopo deste artigo, vamos focar em usar um esquema de globalização para garantir a convergência de métodos de Restauração Inexata com uso de Programação Quadrática Sequencial.

Consideremos o problema geral de Programação Não Linear

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & h(x) = 0 \\ & x \in \Omega \end{array} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ são suficientemente suaves e Ω é um politopo compacto, convexo e não vazio.

2. Elementos essenciais para a globalização

Um trabalho importante na literatura que também busca identificar elementos essenciais para a globalização de algoritmos gerais de otimização é o [Gonzaga et al., 2003], no qual os autores usam uma estratégia de filtros. Outra estratégia usual para garantir a globalização é o uso de funções de mérito, que combinam a função objetivo com as restrições. Nossa abordagem seguirá por esta linha e, para isso, vamos considerar o Lagrangiano $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T h(x)$ e, para $\theta \in (0, 1)$, a função de mérito, conhecida como Lagrangiano Afiado,

$$\Phi(x, \lambda, \theta) := \theta L(x, \lambda) + (1 - \theta)\|h(x)\|. \tag{2}$$

Métodos de Restauração Inexata (IR) são propostas para resolver problemas de Otimização que lidam com a viabilidade e a otimalidade em fases diferentes em cada iteração. Estas ideias tem como base os trabalhos de [Rosen, 1960; Miele et al., 1969] e os primeiros trabalhos com a nomenclatura de IR foram [Martínez e Pilotta, 2000] e [Martínez, 2001]. Dado um ponto, primeiro a viabilidade é parcialmente restaurada, o que chamamos de fase de restauração. Na segunda fase a otimalidade é melhorada, geralmente mantendo-se no espaço tangente das restrições para um controle da deterioração da viabilidade em relação ao ponto restaurado. Geralmente não é especificado como obter o ponto restaurado, abrindo possibilidade do uso de uma gama de métodos, exigindo apenas que a distância até o iterando anterior seja controlada pelo valor de sua inviabilidade.

Em [Martínez e Pilotta, 2000] a função de mérito Φ é utilizada considerando sempre $\lambda = 0$, ou seja, uma combinação direta entre a função objetivo e a medida de inviabilidade. Já em [Martínez, 2001] é considerado o uso dos multiplicadores de Lagrange, e é argumentado que isso pode acelerar a convergência do algoritmo, permitindo o aceite de passos maiores, já que as condições de otimalidade de segunda ordem envolvem o Lagrangiano no espaço tangente das restrições e não a função original. Ao contrário da maioria dos trabalhos anteriores, que utilizavam estratégias de região de confiança para obter decréscimo suficiente, em [Fischer e Friedlander, 2010] é proposto um algoritmo de IR com busca linear. Este trabalho não usa informações dos multiplicadores de Lagrange na função de mérito e foi um marco no desenvolvimento de métodos deste tipo em virtude da teoria ser mais limpa do que seus precedentes.

Seguindo as ideias de [Fischer e Friedlander, 2010], em [Bueno et al., 2015] foi proposto um algoritmo de IR permitindo maior flexibilidade na escolha dos passos intermediários do algoritmo, além do uso de multiplicadores de Lagrange e o uso de modelos quadráticos para determinar a direção de busca na fase de otimização. Estas adaptações se mostraram mais eficientes na prática, o que motivou o uso de técnicas de Programação Quadrática Sequencial (SQP) em métodos de IR em outros trabalhos. Em [Birgin et al., 2015] os autores mostram que um passo de Newton indeterminado para uma linearização das restrições sucedido do passo de SQP tem convergência local quadrática. A fim de assegurar a convergência global, este procedimento é embarcado no esquema de IR de [Bueno et al., 2015]. Entretanto, os testes numéricos mostram que, embora haja um ganho grande em robustez, o algoritmo perde eficiência nos problemas onde o esquema newtoniano puro era bem sucedido. Em decorrência disso, outros dois algoritmos são propostos em [Birgin et al., 2016] buscando aproveitar melhor os passos do algoritmo local. A primeira estratégia, chamada de semilocal, consiste simplesmente em aplicar o algoritmo local com uma busca linear que exige apenas que os valores de inviabilidade não cresçam na restauração e os valores do Lagrangiano não cresçam na fase de otimalidade. Esta estratégia mantém a convergência local quadrática do algoritmo. A segunda ideia é um algoritmo híbrido que no início de cada iteração permite um número de iterações do algoritmo semilocal. Caso o ponto encontrado seja melhor do que o iterando atual, ele é considerado como novo iterando do algoritmo. Caso contrário voltamos ao ponto anterior e prosseguimos a iteração como no método global.

Para este trabalho em específico, estamos propondo uma estrutura geral que garante a convergência global. Isso permite usar, entre outros, passos como os feitos em [Birgin et al., 2015]. Considere que em uma iteração k de um dado algoritmo para otimização não linear com restrições que utilize uma estratégia da função de mérito, os novos iterandos x^{k+1} e θ_{k+1} são submetidos a dois testes de aceite, como mostra o Algoritmo 1. Nessa estrutura, sob certas condições, o teste (3) garante que teremos $\lim_{k\to\infty} h(x^k) = 0$ enquanto que (4) nos dá $\lim_{k\to\infty} \|x^{k+1} - x^k\| = 0$. Dessa forma, independente da estimativa inicial de x^0 e λ^0, temos que a sequência $\{x^k\}$ caminha para uma região viável, assumindo determinadas hipóteses sobre a sequência $\{\theta_k\}$.

Algoritmo 1: Estrutura geral da globalização

Passo 0: Inicialização
São definidos os parâmetros do algoritmo, $\alpha > 0$, $\bar{\alpha} > 0$, $\sigma > 0$, $\theta_0 \in (0, 1)$, e um valor inicial para a estimativa de solução, x^0 e λ^0. O contador de iterações k é zerado.
Passo 1: Teste de decréscimo da função L e Φ
Encontre $x^{k+1} \in \Omega$, λ^{k+1} e $\theta_{k+1} \in (0, 1)$ de modo que:

$$\Phi(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \theta_{k+1}) \leq \Phi(x^k, \lambda^k, \theta_{k+1}) - \alpha\|h(x^k)\|. \tag{3}$$

e

$$L(x^{k+1}, \lambda^{k+1}) \leq L(x^k, \lambda^k) - \sigma\|x^{k+1} - x^k\|^2 + \bar{\alpha}\|h(x^k)\|. \tag{4}$$

Passo 2: Se um determinado critério foi atingido, finalize o algoritmo.
Caso contrário, incremente k e volte ao Passo 1.

A ideia geral é que passos de Newton para o sistema KKT têm o potencial de acelerar o processo de otimização. Assim, para que a aceleração esteja contemplada pela teoria de convergência, podemos submeter os iterandos aos testes de aceite do Algoritmo 1. Caso eles não sejam satisfeitos, voltamos ao algoritmo de [Bueno et al., 2015].

3. Agradecimentos

Os autores agradecem à FAPESP pelo apoio financeiro (projeto 2021/14011-0) e ao CNPq.

Referências

Birgin, E. G., Bueno, L. F., e Martínez, J. M. (2015). Assessing the reliability of general-purpose inexact restoration methods. *J. Comput. Appl. Math.*, 282:1–16.

Birgin, E. G., Bueno, L. F., e Martínez, J. M. (2016). Sequential equality-constrained optimization for nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 65:699–721.

Bueno, L. F., Haeser, G., e Martínez, J. M. (2015). A flexible inexact-restoration method for constrained optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 165:188–208.

Fischer, A. e Friedlander, A. (2010). A new line search inexact restoration approach for nonlinear programming. *Computational Optimization and Applications*, 46:333–346.

Gonzaga, C. C., Karas, E. W., e Vanti, M. (2003). A globally convergent filter method for nonlinear programming. *SIAM J. Optim.*, 14:646–669.

Martínez, J. M. (2001). Inexact-restoration method with lagrangian tangent decrease and new merit function for nonlinear programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 111: 39–58.

Martínez, J. M. e Pilotta, E. A. (2000). Inexact-restoration algorithm for constrained optimization. *Computational Optimization and Applications*, 104:135–163.

Miele, A., Huang, H. Y., e Heideman, J. C. (1969). Sequential gradient-restoration algorithm for the minimization of constrained functions—ordinary and conjugate gradient versions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 4:213–243.

Rosen, J. B. (1960). The gradient projection method for nonlinear programming. part i. linear constraints. *Journal of The Society for Industrial and Applied Mathematics*, 8:181–217.