São José dos Campos - SP
LV SBPO
LV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional
São José dos Campos, SP - 6 a 9 de novembro de 2023

Formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy

Mateus Carvalho, Rafael A. Melo
Instituto de Computação, Universidade Federal da Bahia
Salvador, BA, Brasil
mateuscs@ufba.br, rafael.melo@ufba.br

Mauricio G. C. Resende
Industrial and Systems Engineering, University of Washington
Seattle, WA, USA
mgcr@uw.edu

Marcio C. Santos
Departamento de Ciência da Computação, Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte, MG, Brasil
marciocs@dcc.ufmg.br

Rodrigo F. Toso
Microsoft Bing, One Microsoft Way
Redmond, WA, USA
rofran@microsoft.com

RESUMO

Dado um grafo $G = (V, E)$, o problema da coloração de Grundy consiste em encontrar uma atribuição de cores a cada um de seus vértices de forma que vértices adjacentes recebam cores diferentes, e as regras da heurística *first-fit* sejam respeitadas. Tais regras implicam que uma dada cor, exceto a de menor índice, só pode ser utilizada para um vértice se todas as outras cores de índice inferior estiverem presentes na sua vizinhança. Sua solução ótima define o número de Grundy $\Gamma(G)$ de um grafo, o qual fornece um limite de pior caso para o desempenho da abordagem gulosa *first-fit* para o conhecido problema da coloração de vértices. Neste trabalho, são propostas formulações de programação inteira, padrão e por representativos, para o problema da coloração de Grundy. Experimentos computacionais preliminares indicam que a formulação por representativos tem desempenho melhor do que uma formulação padrão, especialmente em grafos mais densos.

PALAVRAS CHAVE. Coloração de Grundy. Programação inteira. Algoritmos gulosos.

Otimização Combinatória, Teoria e Algoritmos em Grafos, Programação Matemática

ABSTRACT

Given a graph $G = (V, E)$, the Grundy coloring problem consists in finding a color assignment to each of its vertices so that adjacent vertices receive different colors, and the first-fit

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

heuristic constraints are respected. Such constraints imply that a given color, except for the one with the lowest index, can only be used for a vertex if all the other colors with lower index are present in its neighborhood. Its optimal solution defines the Grundy number $\Gamma(G)$ of a graph, which provides a worst-case bound on the performance of the greedy first-fit approach to the well-known vertex coloring problem. In this work, integer programming formulations, standard and by representatives, are proposed for the Grundy coloring problem. Preliminary computational experiments indicate that a formulation by representatives performs better than a standard formulation, especially on denser graphs.

KEYWORDS. Grundy coloring. Integer programming. Greedy algorithms.

Combinatorial Optimization, Graph Theory and Algorithms, Mathematical Programming

1. Introdução

1.1. Definições básicas

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto de cores K, uma *coloração* é um mapeamento $c : V \to K$. Em uma *coloração própria*, vértices adjacentes recebem cores diferentes, ou seja, $c(u) \neq c(v)$ para toda $uv \in E$. Uma coloração utilizando exatamente k cores é denominada k-*coloração*. O *número cromático* de G, $\chi(G)$, é o menor k tal que G admite uma k-coloração. Defina a *vizinhança* de v como $N(v)$ (formada pelos vértices adjacentes a v) e sua *anti-vizinhança* como $\bar{N}(v)$ (formada pelos vértices não adjacentes a v). Ademais, defina a *anti-vizinhança fechada* de v como $\bar{N}[v] = \bar{N}(v) \cup \{v\}$. Denote o grau de um vértice v por $d(v) = |N(v)|$ e o maior grau de um vértice em G como $\Delta(G)$.

Considere a heurística de coloração gulosa *first-fit*, que atribui iterativamente a cada vértice v a cor de menor índice que não está presente na sua vizinhança. Em outras palavras, uma dada cor, com exceção daquela de menor índice, só pode ser atribuída a um vértice se todas as outras cores de índice inferior forem atribuídas a vértices na sua vizinhança. Uma *coloração de Grundy* é uma coloração que respeita as propriedades da heurística *first-fit*. O *número de Grundy*, $\Gamma(G)$, também conhecido como *número cromático de Grundy*, é o maior k tal que G admite um k-coloração de Grundy. O *problema da coloração de Grundy* consiste na obtenção de uma coloração de Grundy que maximize o número de cores. Note que $\chi(G) \leq \Gamma(G) \leq \Delta(G) + 1$, embora a diferença $\Gamma(G) - \chi(G)$ possa ser eventualmente muito grande [Benevides et al., 2014].

1.2. Literatura relacionada

Problemas de coloração de grafos são encontrados em diversas áreas de aplicação. Dentre essas, podem-se ressaltar: escalonamento de tarefas [Leighton, 1979; Gamache et al., 2007], planejamento de quadros de horários [de Werra, 1985; Burke et al., 2007], redes de comunicação [Zhu et al., 2015], sinopses de vídeos [He et al., 2017], e projetos de estações ferroviárias [Jovanović et al., 2020].

Grundy [1939] introduziu o conceito do número de Grundy no contexto de teoria dos jogos e digrafos [Berge, 1973]. Em teoria dos grafos, o número de Grundy foi formalizado em Christen e Selkow [1979], além de ser independentemente proposto como número *ochromatic* em Simmons [1983]. A equivalência entre os números de Grundy e *ochromatic* foi demonstrada em Erdős et al. [1987].

De maneira geral, os estudos sobre o número de Grundy têm se concentrado na análise de sua complexidade e algoritmos para classes específicas de grafos [Hedetniemi et al., 1982; Telle

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

e Proskurowski, 1997; Effantin e Kheddouci, 2007]. Goyal e Vishwanathan [1997] provaram que estabelecer se $\Gamma(G) \geq k$ é NP-completo para o problema em grafos quaisquer. Outros trabalhos mostraram que o problema é NP-completo mesmo para grafos bipartidos e complementos de grafos bipartidos [Zaker, 2005; 2006; Havet e Sampaio, 2013]. Zaker [2006] demonstrou que, quando k é fixo, é possível determinar em tempo polinomial se $\Gamma(G) \geq k$.

Benevides et al. [2014] e Mota et al. [2020] consideraram colorações de Grundy conexas, i.e., aquelas que respeitam as regras da heurística *first-fit* conexa. Bonnet et al. [2018] estabeleceram que calcular o número conexo de Grundy é NP-completo para $k \geq 7$. Colorações de Grundy conexas das arestas foram estudadas em Bonamy et al. [2021]. Outros problemas em grafos relacionados à coloração de Grundy são o número dominante de Grundy [Campêlo e Severín, 2021] e o número b-cromático [Masih e Zaker, 2022; Melo et al., 2021].

1.3. Contribuições do trabalho e organização

Neste trabalho, são propostas duas formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy. Enquanto a primeira formulação modela o particionamento dos vértices em classes de cores usando uma abordagem padrão, a segunda emprega a ideia de formulação por representativos. As técnicas apresentadas se caracterizam como as primeiras formulações para o problema, e consequentemente, para a obtenção do número de Grundy em grafos gerais.

O restante do trabalho é organizado como segue. A Seção 2 apresenta as formulações de programação inteira. A Seção 3 resume os resultados computacionais e apresenta algumas inferências sobre o comportamento das formulações propostas de acordo com a densidade dos grafos das instâncias. A Seção 4 discute algumas considerações finais.

2. Formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy

Formulações de programação inteira (PI) se mostraram eficazes para lidar com diversos problemas de otimização em grafos recentemente, incluindo coloração e variantes [Melo et al., 2016; Furini et al., 2018; de Freitas et al., 2021; Dias et al., 2021; Marzo et al., 2022; Melo e Ribeiro, 2022; 2023]. Nesta seção, apresentamos formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy. A Seção 2.1 apresenta a formulação padrão, enquanto a Seção 2.2 descreve a formulação por representativos.

Com o intuito de simplificar a notação, denota-se no restante do texto o conjunto de vértices por $V = \{1, \ldots, n\}$. Além disso, considere o conjunto de cores disponíveis como $K = \{1, \ldots, \Delta(G) + 1\}$.

2.1. Formulação padrão

Para formular o problema da coloração de Grundy utilizando programação inteira, considere as variáveis de decisão:

$$x_{kv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vértice } v \in V \text{ recebe a cor } k \in K, \text{ i.e., a } k\text{-ésima cor,} \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

$$w_k = \begin{cases} 1, & \text{se a cor } k \in K \text{ é usada,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O problema da coloração de Grundy pode ser modelado como:

$$\max \sum_{k \in K} w_k \tag{1}$$

$$x_{ku} + x_{kv} \leq w_k, \qquad \forall k \in K,\ uv \in E, \tag{2}$$

$$x_{kv} \leq w_k, \qquad \forall k \in K,\ v \in V,\ \text{s.t. } |N(v)| = 0, \tag{3}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

$$\sum_{k \in K} x_{kv} = 1, \qquad \forall v \in V, \tag{4}$$

$$w_k \leq \sum_{v \in V} x_{kv}, \qquad \forall k \in K, \tag{5}$$

$$x_{k'v} \leq \sum_{u \in N(v)} x_{ku}, \qquad \forall v \in V,\ k, k' \in K, \text{ com } k < k', \tag{6}$$

$$w_{k'} \leq w_k, \qquad \forall k, k' \in K, \text{ com } k < k', \tag{7}$$

$$x_{ku} \in \{0, 1\}, \qquad \forall u \in V,\ k \in K, \tag{8}$$

$$w_k \in \{0, 1\}, \qquad \forall k \in K. \tag{9}$$

A função objetivo (1) maximiza o número de cores utilizadas. As restrições (2)-(3) garantem que vértices adjacentes não recebam a mesma cor e um vértice só possa receber uma cor quando essa cor é usada. As restrições (4) estabelecem que cada vértice receba exatamente uma cor. As restrições (5) determinam que w_k somente assume valor 1 se a cor k é atribuída a pelo menos um vértice. As restrições (6) garantem a propriedade de Grundy, isto é, uma cor só é atribuída a um vértice se cada uma das cores anteriores for atribuída a pelo menos um dos seus vizinhos. As restrições (7) impõem uma ordem entre as cores utilizadas. As restrições (8)-(9) definem a integralidade das variáveis.

2.2. Formulação por representativos

Formulações por representativos [Corrêa et al., 2004; Frota et al., 2010] têm sido aplicadas com sucesso para coloração em grafos e diversos outros problemas de particionamento [Campêlo et al., 2005; Bahiense et al., 2014; Melo e Ribeiro, 2015; Melo et al., 2021; 2022]. A seguir, apresentamos uma formulação de programação inteira por representativos para o problema da coloração de Grundy.

Considere as variáveis de decisão:

$$X_{vu} = \begin{cases} 1, \text{ se o vértice } v \in V \text{ representa a cor do vértice } u \in \bar{N}(v), \text{ para } v \leq u; \\ 0, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

$$X_{vv} = \begin{cases} 1, \text{ se o vértice } v \in V \text{ é um representativo,} \\ 0, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

$$y_{vu} = \begin{cases} 1, \text{ se os vértices } v, u \in V \text{ são representativos e a cor de } v \text{ precede a de } u, \text{ para } v \neq u, \\ 0, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Considere ainda a variável ϕ_v para cada $v \in V$ representando o potencial do vértice. O problema pode ser expresso como a seguinte formulação de PI por representativos:

$$\max \sum_{v \in V} X_{vv} \tag{10}$$

$$X_{uv} + X_{uw} \leq X_{uu}, \qquad \forall\, u \in V,\ v, w \in \bar{N}(u),\ \text{ s.t. } vw \in E \text{ e } u \leq v < w, \tag{11}$$

$$X_{uv} \leq X_{uu}, \qquad \forall\, u \in V,\ v \in \bar{N}(u),\ \text{s.t. } N(v) \cap \bar{N}(u) = \emptyset \text{ e } u \leq v, \tag{12}$$

$$\sum_{\substack{v \in \bar{N}[u], \\ v \leq u}} X_{vu} = 1, \qquad \forall\, u \in V, \tag{13}$$

$$X_{uv} \leq \sum_{\substack{w \in N(v) \cap \bar{N}[p], \\ w \geq p}} X_{pw} + 1 - y_{pu}, \qquad \forall\, u, p \in V,\ v \in \bar{N}[u],\ \text{ s.t. } p \neq u \text{ e } u \leq v, \tag{14}$$

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

$$y_{vu} + y_{uv} \geq X_{uu} + X_{vv} - 1, \qquad \forall\, u, v \in V, \text{ s.t. } u < v, \tag{15}$$
$$y_{uv} + y_{vu} \leq X_{uu}, \qquad \forall\, u, v \in V, \text{ s.t. } u \neq v, \tag{16}$$
$$\phi_u - \phi_v + 1 \leq |V| * (1 - y_{uv}) \qquad \forall u, v \in V, \text{ s.t } u \neq v \tag{17}$$
$$0 \leq \phi_v \leq |V| - 1 \qquad \forall\, v \in V \tag{18}$$
$$X_{uv} \in \{0, 1\}, \qquad \forall\, u \in V,\ v \in \bar{N}[u], \text{ s.t. } u \leq v, \tag{19}$$
$$y_{uv} \in \{0, 1\}, \qquad \forall\, u, v \in V, \text{ s.t. } u \neq v, \tag{20}$$
$$\phi_v \in \mathbb{R}_+, \qquad \forall\, v \in V. \tag{21}$$

A função objetivo (10) maximiza o número de vértices representativos, o que determina as cores. As restrições (11)-(12) garantem que vértices adjacentes não recebam a mesma cor e que um vértice pode somente representar outro se ele for um representativo. As restrições (13) asseguram que cada vértice tenha exatamente uma cor. As restrições (14) forçam um vértice v recebendo a cor representada por u a ter pelo menos um vizinho w que receba a cor representada por um vértice p sempre que a cor de p preceder a de u. As restrições (15)-(17) determinam uma ordem entre dois vértices se e somente se ambos forem representativos. As restrições (18) limitam o intervalo dos valores que ϕ pode assumir. As restrições (19)-(20) definem a integralidade das variáveis e (21) definem para todo vértice a qual domínio pertence ϕ_v.

3. Experimentos computacionais preliminares

Os testes computacionais foram executados em uma máquina com sistema operacional Ubuntu x86-64 GNU/Linux, processador Intel Core i7-10700 Octa-Core 2.90 Ghz, e 16Gb de RAM. As formulações foram implementadas em Julia utilizando o pacote JuMP e o *solver* Gurobi v. 10.0.1, sendo utilizadas as configurações padrões, exceto pelo fato que o paralelismo foi desabilitado. As formulações foram resolvidas com um tempo limite de 3600 segundos (uma hora). Uma solução inicial (*warm start*) foi fornecida para as formulações.

No que segue, a Seção 3.1 descreve as instâncias do *benchmark*. A Seção 3.2 descreve como as soluções inciais fornecidas para as formulações foram geradas. A Seção 3.3 sumariza os resultados computacionais.

3.1. Instâncias

Os testes foram realizados em um conjunto de instâncias utilizado anteriormente para outra variante do problema de coloração de vértices [Melo et al., 2021]. O mesmo é formado por grafos geométricos e randômicos criados com o gerador de grafos *ggen*. Eles possuem $|V| \in \{50, 60, 70, 80\}$ e foram gerados considerando as probabilidades de possuir uma aresta (para os grafos randômicos) e a distância euclidiana (para grafos geométricos) dentre $\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8\}$. Cada grupo de instâncias, definido para uma combinação entre número de vértices e distância euclidiana (ou probabilidade para grafos randômicos) possui 5 instâncias. Cada grupo será identificado como C_n_p, em que C representa a classe do grafo: randômicos (rand), geométricos (geo); n o número de vértices e p a probabilidade para os grafos randômicos e a distância euclidiana para os grafos geométricos. Os resultados para cada grupo será a média dentre as suas 5 instâncias. Além dessas, foram utilizadas algumas instâncias compostas por grafos bipartidos e o complementar desses grafos bipartidos, tendo $|V| \in \{50, 60, 70\}$.

3.2. Geração de solução inicial

A solução inicial para o problema da coloração de Grundy é a solução com maior quantidade de cores obtidas dentre alguns critérios gulosos bem estabelecidos na literatura para o problema da coloração de vértices e de duas heurísticas gulosas visando maximizar o número de cores. Os critérios gulosos utilizados são:

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

1. *maximum-degree first* (MDF): define uma sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ na qual prioriza os vértices de maior grau;

2. *adaptive-maximum degree first* (AMDF): define uma sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ de forma análoga ao MDF, com a diferença que os graus dos vizinhos de um vértice colorido são reduzidos em 1 quando da sua coloração;

3. *smallest-degree last* (SDL) [Matula e Beck, 1983]: define uma sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ baseado na retirada gradual do vértice de menor grau em um subgrafo $H \subseteq G$;

4. *DSatur* [Brélaz, 1979]: define uma sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ usando um critério adaptativo baseado no grau máximo de saturação dos vértices, definido pela quantidade de vértices com cores diferentes adjacentes a eles.

5. *minimum-degree first* (MinDF): define uma sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ priorizando os vértice de menor grau.

Observe que MinDF tenta obter uma sequência maximizando o número de cores ao priorizar a coloração de vértices de menor grau. Assim, tenta-se fazer com que vértices de grau baixo recebam as cores de menor índice, viabilizando que vértices com graus mais altos recebam cores de índices ainda mais altos.

3.3. Resultados computacionais

As Tabelas 1 e 2 apresentam os resultados dos experimentos para os grafos randômicos e geométricos, respectivamente. Nessas tabelas, a primeira coluna representa o grupo de 5 instâncias, de forma que cada linha corresponde aos valores médios para as 5 instâncias. A segunda coluna (h) indica o valor médio da solução inicial fornecida para o modelo. No que segue, para cada uma das formulações, as colunas indicam a média das melhores soluções encontradas (best), o tempo médio de execução (time), o *gap* de otimalidade médio, e a quantidade de instâncias resolvidas pelo solver (#opt). As duas últimas linhas das tabelas indicam a média dos valores entre todas as linhas e o total de instâncias resolvidas à otimalidade. Na coluna best, os melhores valores médios estão realçados em negrito, enquanto um $*$ representa que a otimalidade foi provada para todas as instâncias do grupo.

A Tabela 1 mostra que para todos os grupos de instâncias as formulações conseguiram melhorar os resultados a partir da solução inicial. Além disso, na média, o modelo por representativos chegou a melhores soluções, encontrando 5 soluções ótimas para o grupo *rand_50_0.8* e 2 para *rand_60_0.8*. É interessante notar o padrão nessa tabela em que a formulação padrão tem melhor performance quando a probabilidade $p \in \{0.2, 0.4\}$; e a formulação por representativos alcança os melhores resultados quando $p \in \{0.6, 0.8\}$, o que gera grafos mais densos.

A Tabela 2 indica que as instâncias geométricas se mostraram mais fáceis de resolver, tendo a formulação padrão provado a otimalidade em 11 casos e a formulação por representativos em 20. Novamente, a formulação por representativos teve melhores resultados na maioria das instâncias. Contudo, na média, os desempenhos das duas formulações foram muito próximos. Outro ponto interessante é que o padrão encontrado para as instâncias randômicas se repete nas instâncias geométricas com 60 ou mais vértices. Isto é, a formulação por representativos tem melhores resultados quando a distância euclidiana é de 0.6 e 0.8, e a formulação padrão nas demais.

A Tabela 3 apresenta os resultados para os grafos bipartidos e os complementos dos bipartidos. A estrutura é similar à das tabelas anteriores, exceto pelo fato de cada linha representar uma única instância. Dessa forma, as demais colunas deixam de ser a média e por isso as colunas #opt

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

		std				rep			
Grupo	h	best	time	gap (%)	#opt	best	time	gap (%)	#opt
rand_50_0.2	7.6	**11.0**	3600	65.5	0	10.4	3600	123.6	0
rand_50_0.4	11.8	**15.4**	3600	87.2	0	**15.4**	3600	84.6	0
rand_50_0.6	16.6	22.2	3600	69.4	0	**22.6**	3600	33.7	0
rand_50_0.8	23.8	29.6	3600	53.4	0	**31.6***	146	0.0	5
rand_60_0.2	8.6	**12.0**	3600	66.7	0	11.6	3600	156.3	0
rand_60_0.4	12.8	**18.0**	3600	91.2	0	17.8	3600	97.2	0
rand_60_0.6	19.0	25.2	3600	77.8	0	**26.2**	3600	44.4	0
rand_60_0.8	27.6	34.8	3600	57.6	0	**36.8**	2755	2.2	2
rand_70_0.2	9.2	**12.4**	3600	93.8	0	12.0	3600	194.0	0
rand_70_0.4	15.8	**20.0**	3600	94.2	0	19.8	3600	111.2	0
rand_70_0.6	21.0	26.4	3600	92.1	0	**28.6**	3600	57.4	0
rand_70_0.8	30.8	37.2	3600	71.0	0	**40.0**	3600	12.5	0
rand_80_0.2	11.2	**14.2**	3600	80.4	0	12.8	3600	219.7	0
rand_80_0.4	16.0	**20.8**	3600	106.1	0	20.2	3600	137.7	0
rand_80_0.6	23.8	30.0	3600	96.3	0	**30.6**	3600	69.4	0
rand_80_0.8	32.6	41.2	3600	75.3	0	**44.8**	3600	16.1	0
Médias	18.0	23.1	3600.0	79.8		23.8	3331.3	85.0	
Total ótimas					0				7

Tabela 1: Resultados das formulações para grafos randômicos

		std				rep			
Grupo	h	best	time	gap	#opt	best	time	gap	#opt
geo_50_0.2	7.2	**9.0***	252	0.00	5	**9.0**	3600	91.50	0
geo_50_0.4	18.0	**22.2**	3600	35.74	0	**22.2**	3600	29.40	0
geo_50_0.6	26.6	**31.2**	3600	54.06	0	**31.2**	3434	7.54	1
geo_50_0.8	34.8	37.8	3600	32.58	0	**38.2***	643	0.00	5
geo_60_0.2	7.8	**10.2**	1682	4.22	3	10.0	3600	140.91	0
geo_60_0.4	19.4	**27.2**	3600	28.56	0	26.4	3600	35.19	0
geo_60_0.6	32.6	37.4	3600	51.53	0	**37.8**	3600	8.27	0
geo_60_0.8	44.6	47.0	3600	27.78	0	**47.6***	57	0.00	5
geo_70_0.2	9.6	**12.6**	3049	4.76	2	12.2	3600	146.72	0
geo_70_0.4	21.0	**28.2**	3600	32.68	0	27.4	3600	52.92	0
geo_70_0.6	36.4	41.6	3600	59.81	0	**42.0**	3600	14.14	0
geo_70_0.8	48.6	53.4	3600	31.36	0	**54.4**	935	0.36	4
geo_80_0.2	10.4	**12.6**	3101	8.01	1	11.8	3600	190.64	0
geo_80_0.4	24.4	**32.8**	3600	29.19	0	31.6	3600	53.73	0
geo_80_0.6	40.6	47.6	3600	62.57	0	**48.2**	3600	15.13	0
geo_80_0.8	58.2	61.8	3600	29.58	0	**63.2***	207	0.00	5
Médias	27.5	32.0	3205	30.7		32.0	2805	49.1	
Total ótimas					11				20

Tabela 2: Resultados das formulações para grafos geométricos

foram desconsideradas. As duas últimas linhas da tabela contêm a média dos valores entre todas as linhas e o total de instâncias resolvidas à otimalidade. A Tabela 3 mostra que os resultados das duas formulações parecem muito próximos se compararmos as médias das melhores soluções. Contudo, a formulação por representativos possui um tempo de execução médio de menos da metade daquele da formulação padrão. Além disse, o *gap* médio da mesma é bem menor. Ademais, a formulação padrão chegou ao ótimo para 8 instâncias, enquanto a formulação por representativos chegou ao ótimo em 17 instâncias, encontrando o ótimo para todas as instâncias que são complementares do bipartido. A prevalência da formulação por representativos é bem evidente para essas instâncias,

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

		std			rep		
Instância	h	best	time	gap	best	time	gap
B_50_20.0_2	**2.0**	**2.0***	0	0.0	**2.0***	0	0.0
B_50_40.0_11	2.0	**9.0***	1477	0.0	8.0	3600	50.0
B_50_60.0_14	2.0	**12.0**	3600	58.3	11.0	3600	109.1
B_50_80.0_6	2.0	**6.0***	93	0.0	**6.0***	1	0.0
B_60_20.0_3	2.0	**3.0***	0	0.0	**3.0***	1	0.0
B_60_40.0_11	2.0	**9.0**	3600	188.9	8.0	3600	50.0
B_60_60.0_17	2.0	**11.0**	3600	118.2	**11.0**	3600	72.7
B_60_80.0_18	2.0	**13.0**	3600	100.0	**13.0**	3600	92.3
B_70_20.0_9	2.0	**6.0***	132	0.0	**6.0**	3600	16.7
B_70_40.0_8	2.0	**7.0***	1440	0.0	**7.0***	56	0.0
B_70_60.0_19	2.0	**13.0**	3600	130.8	**13.0**	3600	107.7
B_70_80.0_8	2.0	**8.0***	928	0.0	**8.0***	2	0.0
CB_50_20.0_2	**49.0**	**49.0***	332	0.0	**49.0***	0	0.0
CB_50_40.0_11	36.0	37.0	3600	35.1	**38.0***	3	0.0
CB_50_60.0_14	27.0	30.0	3600	40.0	**31.0***	9	0.0
CB_50_80.0_6	**45.0**	**45.0**	3600	8.9	**45.0***	0	0.0
CB_60_20.0_3	**58.0**	**58.0**	3600	1.7	**58.0***	0	0.0
CB_60_40.0_11	47.0	47.0	3600	25.5	**48.0***	3	0.0
CB_60_60.0_17	41.0	41.0	3600	39.0	**42.0***	8	0.0
CB_60_80.0_18	35.0	36.0	3600	44.4	**37.0***	56	0.0
CB_70_20.0_9	58.0	58.0	3600	20.7	**59.0***	1	0.0
CB_70_40.0_8	**62.0**	**62.0**	3600	12.9	**62.0***	0	0.0
CB_70_60.0_19	44.0	45.0	3600	46.7	**46.0***	191	0.0
CB_70_80.0_8	**63.0**	**63.0**	3600	9.5	**63.0***	0	0.0
Resumo	24.5	27.9	2583	36.6	28.0	1064	20.7
Total ótimas		8			17		

Tabela 3: Resultados das formulações para grafos bipartidos e complementares dos bipartidos

em especial para as complementares dos grafos bipartidos, que são muito densas. Pode ser observado que o valor da solução inicial fornecida já é o ótimo para 5 instâncias, mas o mais interessante é que elas parecem se tornar fáceis para a formulação por representativos, mas ainda são difíceis para a formulação padrão provar a otimalidade. Se observarmos a formulação por representativos (seção 2.2), quanto mais denso um grafo, menor será a anti-vizinhança de um vértice, então terá uma quantidade reduzida de variáveis X e serão geradas menos restrições. Isso acaba diminuindo a quantidade de escolhas possíveis.

4. Comentários finais

Nesse trabalho, foram apresentadas formulações de programação inteira para o problema da coloração de Grundy. Uma das formulações utiliza uma ideia padrão para o particionamento dos vértices em classes de cores enquanto a outra aplica a ideia de representativos. Salvo melhor juízo, essa é a primeira vez que o uso de programação inteira é aplicado ao problema.

Os experimentos computacionais realizados indicam que a formulação por representativos tem um desempenho melhor do que a formulação padrão. O problema da coloração de Grundy se mostrou desafiador para as formulações, mesmo para instâncias com 50 vértices. Essas, apesar de conseguirem melhorar os resultados a partir da solução inicial fornecida, não conseguem provar a otimalidade para a maioria das instâncias dentro do tempo limite de 3600 segundos. Ademais, as mesmas finalizaram com um *gap* de otimalidade maior do que 50% em 43% das instâncias para a formulação padrão e em 40% dos casos para a formulação por representativos. Contudo, a formulação por representativos mostrou ser eficiente em grafos mais densos, pois ela consegue

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

se aproveitar dessa característica do grafo para gerar um modelo com uma quantidade reduzida de variáveis e com menos simetria do que a formulação padrão.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. O trabalho de Rafael A. Melo foi apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), projeto número 314662/2020-0.

Referências

Bahiense, L., Frota, Y. A. M., Noronha, T. F., e Ribeiro, C. C. (2014). A branch-and-cut algorithm for the equitable coloring problem using a formulation by representatives. *Discrete Applied Mathematics*, 164: 34–46.

Benevides, F., Campos, V., Dourado, M., Griffiths, S., Morris, R., Sampaio, L., e Silva, A. (2014). Connected greedy colourings. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, p. 433–441. Springer.

Berge, C. (1973). *Graphs and hypergraphs*. North-Holland Publishing Co.

Bonamy, M., Groenland, C., Muller, C., Narboni, J., Pekárek, J., e Wesolek, A. (2021). A note on connected greedy edge colouring. *Discrete Applied Mathematics*, 304:129–136.

Bonnet, É., Foucaud, F., Kim, E. J., e Sikora, F. (2018). Complexity of Grundy coloring and its variants. *Discrete Applied Mathematics*, 243:99–114.

Brélaz, D. (1979). New methods to color the vertices of a graph. *Communications of the ACM*, 22(4): 251–256.

Burke, E. K., McCollum, B., Meisels, A., Petrovic, S., e Qu, R. (2007). A graph-based hyper-heuristic for educational timetabling problems. *European Journal of Operational Research*, 176(1):177–192.

Campêlo, M., Campos, V., e Corrêa, R. (2005). On the asymmetric representatives formulation for the vertex coloring problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 19:337–343.

Campêlo, M. e Severín, D. (2021). An integer programming approach for solving a generalized version of the Grundy domination number. *Discrete Applied Mathematics*, 301:26–48.

Christen, C. A. e Selkow, S. M. (1979). Some perfect coloring properties of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(1):49–59.

Corrêa, R. C., Campêlo, M., e Frota, Y. A. M. (2004). Cliques, holes and the vertex coloring polytope. *Information Processing Letters*, 89:159–164.

de Freitas, R., Dias, B., Maculan, N., e Szwarcfiter, J. (2021). On distance graph coloring problems. *International Transactions in Operational Research*, 28(3):1213–1241.

de Werra, D. (1985). An introduction to timetabling. *European Journal of Operational Research*, 19(2): 151–162.

Dias, B., de Freitas, R., Maculan, N., e Michelon, P. (2021). Integer and constraint programming approaches for providing optimality to the bandwidth multicoloring problem. *RAIRO: Recherche Opérationnelle*, 55: 1949.

Effantin, B. e Kheddouci, H. (2007). Grundy number of graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 27(1):5–18.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

Erdős, P., Hare, W., Hedetniemi, S. T., e Laskar, R. (1987). On the equality of the Grundy and ochromatic numbers of a graph. *Journal of Graph Theory*, 11(2):157–159.

Frota, Y., Maculan, N., Noronha, T. F., e Ribeiro, C. C. (2010). A branch-and-cut algorithm for partition coloring. *Networks: An International Journal*, 55:194–204.

Furini, F., Malaguti, E., e Santini, A. (2018). An exact algorithm for the partition coloring problem. *Computers & Operations Research*, 92:170–181.

Gamache, M., Hertz, A., e Ouellet, J. O. (2007). A graph coloring model for a feasibility problem in monthly crew scheduling with preferential bidding. *Computers & Operations Research*, 34(8):2384–2395.

Goyal, N. e Vishwanathan, S. (1997). NP-completeness of undirected Grundy numbering and related problems. *Manuscript, Bombay*.

Grundy, P. M. (1939). Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–9.

Havet, F. e Sampaio, L. (2013). On the Grundy and b-chromatic numbers of a graph. *Algorithmica*, 65(4): 885–899.

He, Y., Gao, C., Sang, N., Qu, Z., e Han, J. (2017). Graph coloring based surveillance video synopsis. *Neurocomputing*, 225:64–79.

Hedetniemi, S. M., Hedetniemi, S. T., e Beyer, T. (1982). A linear algorithm for the grundy (coloring) number of a tree. *Congressus Numerantium*, 36:351–363.

Jovanović, P., Pavlović, N., Belošević, I., e Milinković, S. (2020). Graph coloring-based approach for railway station design analysis and capacity determination. *European Journal of Operational Research*, 287(1): 348–360.

Leighton, F. T. (1979). A graph coloring algorithm for large scheduling problems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 84(6):489–506.

Marzo, R. G., Melo, R. A., Ribeiro, C. C., e Santos, M. C. (2022). New formulations and branch-and-cut procedures for the longest induced path problem. *Computers & Operations Research*, 139:105627.

Masih, Z. e Zaker, M. (2022). Some comparative results concerning the grundy and b-chromatic number of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 306:1–6.

Matula, D. W. e Beck, L. L. (1983). Smallest-last ordering and clustering and graph coloring algorithms. *Journal of the ACM*, 30(3):417–427.

Melo, R. A., Queiroz, M. F., e Santos, M. C. (2021). A matheuristic approach for the b-coloring problem using integer programming and a multi-start multi-greedy randomized metaheuristic. *European Journal of Operational Research*, 295(1):66–81.

Melo, R. A. e Ribeiro, C. C. (2015). Improved solutions for the freight consolidation and containerization problem using aggregation and symmetry breaking. *Computers & Industrial Engineering*, 85:402–413.

Melo, R. A. e Ribeiro, C. C. (2022). Maximum weighted induced forests and trees: New formulations and a computational comparative review. *International Transactions in Operational Research*, 29(4):2263–2287.

Melo, R. A. e Ribeiro, C. C. (2023). MIP formulations for induced graph optimization problems: a tutorial. *International Transactions in Operational Research*, 30(6):3159–3200.

Melo, R. A., Ribeiro, C. C., e Riveaux, J. A. (2022). The minimum quasi-clique partitioning problem: Complexity, formulations, and a computational study. *Information Sciences*, 612:655–674.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094

Melo, R. A., Samer, P., e Urrutia, S. (2016). An effective decomposition approach and heuristics to generate spanning trees with a small number of branch vertices. *Computational Optimization and Applications*, 65 (3):821–844.

Mota, E., Rocha, L., e Silva, A. (2020). Connected greedy coloring of H-free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 284:572–584.

Simmons, G. J. (1983). On the ochromatic number of a graph. *Congressus Numerantium*, 40:339–366.

Telle, J. A. e Proskurowski, A. (1997). Algorithms for vertex partitioning problems on partial k-trees. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 10(4):529–550.

Zaker, M. (2005). Grundy chromatic number of the complement of bipartite graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 31:325–330.

Zaker, M. (2006). Results on the Grundy chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics*, 306(23): 3166–3173.

Zhu, X., Dai, L., e Wang, Z. (2015). Graph coloring based pilot allocation to mitigate pilot contamination for multi-cell massive MIMO systems. *IEEE Communications Letters*, 19(10):1842–1845.

DOI: 10.59254/sbpo-2023-175094
http://live-proceedings.pantheonsite.io/p/175094